• 2교시 수학 영역 •

[가형]

1	②	**2**	⑤	**3**	③	**4**	④	**5**	①
6	①	**7**	⑤	**8**	④	**9**	③	**10**	②
11	②	**12**	①	**13**	④	**14**	⑤	**15**	②
16	④	**17**	③	**18**	②	**19**	④	**20**	③
21	①	**22**	32	**23**	49	**24**	45	**25**	3
26	8	**27**	12	**28**	192	**29**	11	**30**	9

1. [출제의도] 지수함수의 극한 계산하기

$\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{3x}=\frac{4}{3}\times\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{4x}=\frac{4}{3}$

2. [출제의도] 삼각함수의 값 계산하기

$\cos\frac{13}{6}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. [출제의도] 타원의 방정식 이해하기

타원 $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{7})^2}=1$의 장축의 길이는 $2\times4=8$

4. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\log_2 x+2$의 그래프가 점 $(a,1)$을 지나므로

$1=\log_2 a+2$, $\log_2 a=-1$

따라서 $a=\frac{1}{2}$

5. [출제의도] 여러 가지 미분법 이해하기

$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)=-\frac{1}{4}$

$f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}$ 이므로 $-\frac{1}{(a-2)^2}=-\frac{1}{4}$

따라서 양수 a의 값은 4

6. [출제의도] 여러 가지 적분법 이해하기

$\int_1^{16}\frac{1}{x\sqrt{x}}dx=\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^{16}=\frac{3}{2}$

7. [출제의도] 평면 곡선의 접선 이해하기

$\frac{dx}{dt}=2t+\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=3t^2+6$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 이므로 $t=1$에서 $\frac{dy}{dx}=3$

8. [출제의도] 여러 가지 미분법 이해하기

$f(5x-1)=e^{x^2-1}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$5f'(5x-1)=2xe^{x^2-1}$

따라서 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(4)=\frac{2}{5}$

9. [출제의도] 자연수의 분할 이해하기

$7=1+1+1+1+1+1+1$
$=1+1+1+1+1+2$
$=1+1+1+1+3$
$=1+1+1+2+2$
$=1+1+1+4$
$=2+2+2+1$

따라서 구하는 방법의 수는 6

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$f(0)=a=-3$

함수 $f(x)$의 주기가 π이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi$, $b=2$

$\therefore\ g(x)=2\sin x-3$

$-1\le\sin x\le1$이므로 $-5\le2\sin x-3\le-1$

따라서 함수 $g(x)$의 최댓값은 -1

11. [출제의도] 지수함수를 활용하여 문제해결하기

두 함수 $f(x)=\frac{2^x}{3}$, $g(x)=2^x-2$의 그래프가

y축과 만나는 점은 각각 $\mathrm{A}\left(0,\frac{1}{3}\right)$, $\mathrm{B}(0,-1)$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점은

$\frac{2^x}{3}=2^x-2$, $x=\log_2 3$

$\therefore\ \mathrm{C}(\log_2 3,1)$

점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{CH}}=\log_2 3$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CH}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\log_2 3=\frac{2}{3}\log_2 3$

12. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제해결하기

$\log_2(x+1)\le k$에서

진수의 조건에 의하여 $x>-1$이고

$x+1\le2^k$이므로

$A=\{x\mid-1<x\le2^k-1\}$

$\log_2(x-2)-\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\ge2$에서

$\log_2(x-2)(x+1)\ge2$

진수의 조건에 의하여 $x>2$이고

$(x-2)(x+1)\ge4$이므로

$B=\{x\mid x\ge3\}$

$n(A\cap B)=5$이므로 $2^k-1=7$

따라서 자연수 k의 값은 3

13. [출제의도] 여러 가지 함수의 정적분 이해하기

$xf(x)=3^x+a+\int_0^x tf'(t)dt$의

양변에 $x=0$을 대입하면 $0=1+a$

$\therefore\ a=-1$

$xf(x)=3^x-1+\int_0^x tf'(t)dt$의

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=3^x\ln3+xf'(x)$

$\therefore\ f(x)=3^x\ln3$

따라서 $f(-1)=\frac{\ln3}{3}$

14. [출제의도] 이항정리 이해하기

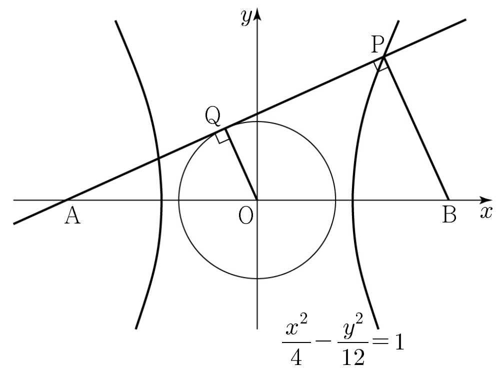
집합 A의 부분집합 중 두 원소 1, 2를 모두 포함하고 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는

집합 $\{3,4,5,\cdots,25\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수와 같으므로

${}_{23}\mathrm{C}_1+{}_{23}\mathrm{C}_3+{}_{23}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{23}\mathrm{C}_{21}+{}_{23}\mathrm{C}_{23}=2^{23-1}$

따라서 부분집합의 개수는 2^{22}

15. [출제의도] 쌍곡선을 활용하여 문제해결하기



원점을 O, 직선 AP와 원이 접하는 점을 Q라 하면 삼각형 ABP와 삼각형 AOQ는

서로 닮음이고, $\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{AO}}=4$이므로

닮음비는 $2:1$이다.

$\overline{\mathrm{OQ}}=r$라 하면 $\overline{\mathrm{BP}}=2r$

두 점 A, B가 쌍곡선의 초점이므로

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}=4$

$\overline{\mathrm{AP}}=4+2r$

직각삼각형 ABP에서 $(4+2r)^2+(2r)^2=64$

$r^2+2r-6=0$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{7}-1$

16. [출제의도] 부분적분법을 활용하여 문제해결하기

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left\{(\sin x)\ln x-\frac{\cos x}{x}\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x)\ln x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos x}{x}dx$$

$$=\left\{\Big[(-\cos x)\ln x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-\frac{\cos x}{x}\right)dx\right\}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos x}{x}dx$$

$$=\Big[(-\cos x)\ln x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\ln\pi$$

17. [출제의도] 순열과 조합을 활용하여 추론하기

빈 주머니가 생기지 않도록 나누어 넣는 경우의 수는
세 주머니 A, B, C에 먼저 흰 공 6개를 남김없이
나누어 넣은 후
검은 공 6개를 남김없이 나누어 넣을 때,
흰 공을 넣지 않은 주머니가 있으면 그 주머니에는
검은 공이 1개 이상 들어가도록 나누어 넣는
경우의 수와 같다.

흰 공이 들어가는 주머니의 개수를 n이라 하면

(i) $n=3$일 때

세 주머니 A, B, C에 흰 공을 각각 1개 이상 나누어 넣는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_3$,

검은 공을 나누어 넣는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_6$이므로

이 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_3\times\boxed{{}_3\mathrm{H}_6}$ 이다.

(ii) $n=2$일 때

세 주머니 A, B, C 중 2개의 주머니에 흰 공을 각각 1개 이상 나누어 넣는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{H}_4$,

1개의 빈 주머니에 검은 공 1개를 넣고
나머지 5개의 검은 공을 나누어 넣는
경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_5$이므로

이 경우의 수는 $\boxed{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{H}_4\times{}_3\mathrm{H}_5}$ 이다.

(iii) $n=1$일 때

세 주머니 A, B, C 중 1개의 주머니에 흰 공을 넣는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1\times1$,

2개의 빈 주머니에 검은 공을 각각 1개씩 넣고

나머지 4개의 검은 공을 나누어 넣는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_4$이므로

이 경우의 수는 $\boxed{{}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{H}_4}$ 이다.

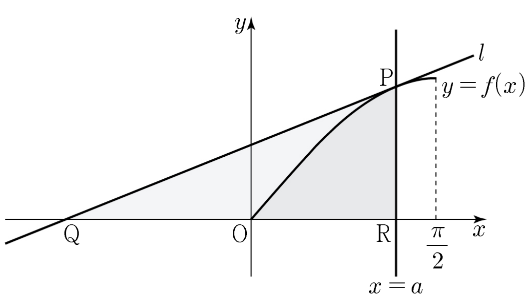
따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_3 \times \boxed{28} + \boxed{315} + \boxed{45}$ 이다.

$p=28,\ q=315,\ r=45$이므로

따라서 $p+q+r=388$

18. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$f'(x)=\cos x$이므로 점 P에서 그은 접선 l의 방정식은 $y=\cos a(x-a)+\sin a$이다.
직선 l이 x축과 만나는 점을 Q라 하면 점 $\mathrm{Q}\left(a-\dfrac{\sin a}{\cos a},\ 0\right)$이고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 하면 점 $\mathrm{R}(a,\ 0)$이다.



그림과 같이 곡선 $y=\sin x$와 x축 및 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=\sin x$와 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$S_1=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sin a}{\cos a}\times\sin a-\displaystyle\int_0^a \sin x\,dx$

$S_2=\displaystyle\int_0^a \sin x\,dx$

$S_1=S_2$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sin a}{\cos a}\times\sin a-\displaystyle\int_0^a\sin x\,dx=\int_0^a\sin x\,dx$

$\dfrac{\sin^2 a}{2\cos a}=2\displaystyle\int_0^a\sin x\,dx$

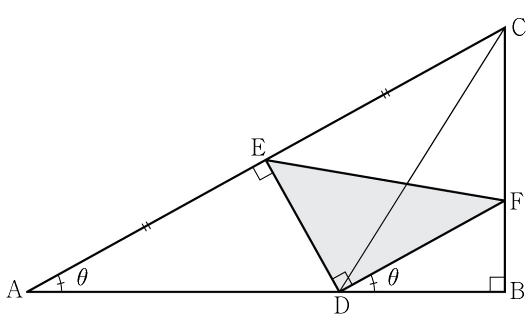
$\dfrac{1-\cos^2 a}{2\cos a}=2\Big[-\cos x\Big]_0^a$

$3\cos^2 a-4\cos a+1=(3\cos a-1)(\cos a-1)=0$

$0<a<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\cos a=\dfrac{1}{3}$

19. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}$이므로 삼각형 ADC는 이등변삼각형이고, $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{CE}}$이다. 또한, 선분 AC와 선분 DF가 평행하므로 $\angle\mathrm{BDF}=\theta$이고, 삼각형 DEF는 직각삼각형이다.



삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=\sec\theta$이므로 $\overline{\mathrm{AE}}=\dfrac{1}{2}\sec\theta$

삼각형 AED에서 $\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{AE}}\times\tan\theta=\dfrac{1}{2}\sec\theta\tan\theta$,

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}\times\sec\theta=\dfrac{1}{2}\sec^2\theta$이므로

$\overline{\mathrm{DB}}=1-\dfrac{1}{2}\sec^2\theta$

삼각형 DBF에서

$\overline{\mathrm{DF}}=\overline{\mathrm{DB}}\times\sec\theta=\sec\theta\left(1-\dfrac{1}{2}\sec^2\theta\right)$

$$\begin{aligned}S(\theta)&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DE}}\times\overline{\mathrm{DF}}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta\times\sec\theta\left(1-\frac{1}{2}\sec^2\theta\right)\\&=\frac{1}{4}\sec^2\theta\tan\theta\left(1-\frac{1}{2}\sec^2\theta\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{4}\sec^2\theta\tan\theta\left(1-\frac{1}{2}\sec^2\theta\right)}{\theta}\\&=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

20. [출제의도] 함수의 그래프의 개형 추론하기

점 P에서 원 $x^2+y^2=9$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx-mt+4$
원 $x^2+y^2=9$의 중심에서 접선까지의 거리는 반지름의 길이와 같다.

$\dfrac{|mt-4|}{\sqrt{m^2+1}}=3$

m에 대한 이차방정식 $(t^2-9)m^2-8tm+7=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로

두 접선의 기울기의 곱은 $f(t)=\dfrac{7}{t^2-9}$이다.

ㄱ. $f(\sqrt{2})=-1$ (참)

ㄴ. $f'(t)=-\dfrac{14t}{(t^2-9)^2}$, $f''(t)=\dfrac{42(t^2+3)}{(t^2-9)^3}$ 이므로
열린 구간 $(-3,\ 3)$에서 $f''(t)<0$ (참)

ㄷ. $9f(x)=3^{x+2}-7$, $f(x)=3^x-\dfrac{7}{9}$

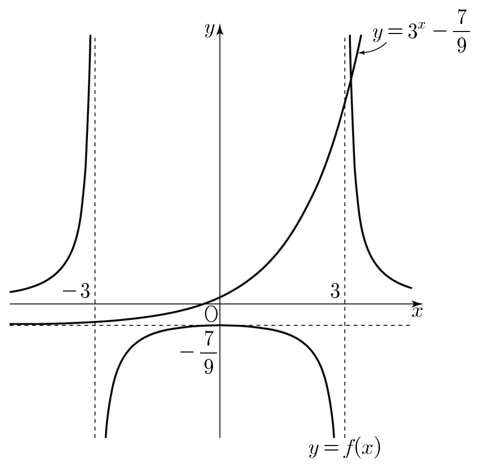
방정식 $f(x)=3^x-\dfrac{7}{9}$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=3^x-\dfrac{7}{9}$의 그래프가 만나는 점의 개수와 같다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	(-3)	$\cdots$	0	$\cdots$	(3)	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$+$		$-$	$-$	$-$		$+$
$f(x)$	↗		↗	$-\frac{7}{9}$	↘		↘

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to-3-}f(x)=\infty,$
$\displaystyle\lim_{x\to-3+}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to3-}f(x)=-\infty,$
$\displaystyle\lim_{x\to3+}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=0$

두 함수 $y=f(x)$와 $y=3^x-\dfrac{7}{9}$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 실근의 개수는 1이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

21. [출제의도] 삼각함수의 미분을 활용하여 추론하기

$$\begin{aligned}f'(x)&\\&=2\sin2x+2(2x-3n)\cos2x-(4x-6n)\cos2x\\&\quad+2(2x^2-6nx+4n^2-1)\sin2x\\&=(4x^2-12nx+8n^2)\sin2x\\&=4(x-n)(x-2n)\sin2x\end{aligned}$$

(i) $n=1$일 때
열린 구간 $(0,\ 3)$에서의 $f'(x)=0$인 x의 값은
$x=1,\ x=\dfrac{\pi}{2},\ x=2$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$a_1=3+\dfrac{\pi}{2},\ \cos a_1\neq0$

(ii) $n=2$일 때
열린 구간 $(3,\ 6)$에서의 $f'(x)=0$인 x의 값은
$x=\pi,\ x=4,\ x=\dfrac{3}{2}\pi$

x	(3)	$\cdots$	π	$\cdots$	4	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	(6)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$a_2=4+\dfrac{5}{2}\pi,\ \cos a_2\neq0$

(iii) $n=3$일 때
열린 구간 $(6,\ 9)$에서의 $f'(x)=0$인 x의 값은
$x=2\pi,\ x=\dfrac{5}{2}\pi$

x	(6)	$\cdots$	2π	$\cdots$	$\frac{5}{2}\pi$	$\cdots$	(9)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$a_3=\dfrac{9}{2}\pi,\ \cos a_3=0$이므로 $l=3$

(iv) $n=4$일 때
열린 구간 $(9,\ 12)$에서의 $f'(x)=0$인 x의 값은
$x=3\pi,\ x=\dfrac{7}{2}\pi$

x	(9)	$\cdots$	3π	$\cdots$	$\frac{7}{2}\pi$	$\cdots$	(12)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$a_4=\dfrac{13}{2}\pi$

(v) $n=5$일 때
열린 구간 $(12,\ 15)$에서의 $f'(x)=0$인 x의 값은
$x=4\pi,\ x=\dfrac{9}{2}\pi$

x	(12)	$\cdots$	4π	$\cdots$	$\frac{9}{2}\pi$	$\cdots$	(15)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$a_5=\dfrac{17}{2}\pi$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{l+2}a_k=\sum_{k=1}^{5}a_k=7+\frac{45}{2}\pi$

22. [출제의도] 중복순열 계산하기

${}_2\Pi_5=2^5=32$

23. [출제의도] 여러 가지 미분법 이해하기

$f'(x)=3x^2+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$f'(4)=49$

24. [출제의도] 같은 것이 있는 순열 이해하기

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a,
위쪽으로 한 칸 가는 것을 b라 하자.
A 지점에서 P 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

4개의 a와 2개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{6!}{4!\times 2!}=15$

P 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 1개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2!\times 1!}=3$

따라서 구하는 경우의 수는 $15\times 3=45$

25. [출제의도] 도함수의 활용 이해하기

$y'=x^2+\frac{2}{x}$, $y''=2x-\frac{2}{x^2}$

$y''=0$에서 $x=1$

$0<x<1$일 때 $y''<0$

$x>1$일 때 $y''>0$

따라서 변곡점 $\left(1,\ \frac{1}{3}\right)$에서의 접선의 기울기는 3

26. [출제의도] 포물선의 방정식 이해하기

점 P는 포물선 $y^2=8x$의 준선 $x=-2$ 위의 점이다.

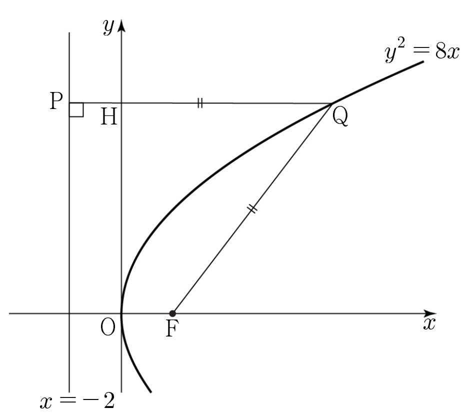
$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QF}}=10$이므로 포물선의 정의에 의하여 준선 $x=-2$와 선분 PQ는 수직이다.

선분 PQ와 y축이 만나는 점을 H라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=2$

$\therefore$ Q$(8,\ k)$

점 Q가 포물선 위의 점이므로 $k^2=8\times 8$

따라서 양수 k의 값은 8



27. [출제의도] 여러 가지 적분법 이해하기

$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$

$$\int_1^5 \frac{40}{g'(f(x))\{f(x)\}^2}dx=40\int_1^5 \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}dx$$

$f(x)=t$라 하면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$

$g(2)=1$, $g(5)=5$에서 $f(1)=2$, $f(5)=5$이므로

$x=1$일 때 $t=2$, $x=5$일 때 $t=5$이다.

따라서 $40\int_1^5 \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}dx=40\int_2^5 \frac{1}{t^2}dt$

$$=40\left[-\frac{1}{t}\right]_2^5=12$$

28. [출제의도] 순열을 활용하여 문제해결하기

A열과 B열의 각 열의 좌석을 왼쪽부터 순서대로 각각 1, 2, 3, 4, 5번이라고 하자.

A열	1번	2번	3번	4번	5번
B열	1번	2번	3번	4번	5번

(ⅰ) 아이가 B열 1번에 앉는 경우
아버지 또는 어머니가 아이와 이웃하여 앉는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2-{}_3\mathrm{P}_2$
할아버지와 할머니가 A열 2, 3, 4, 5번에 이웃하여 앉는 경우의 수는 3×2
따라서 구하는 경우의 수는 $6\times 6=36$

(ⅱ) 아이가 B열 2번에 앉는 경우
아버지 또는 어머니가 아이와 이웃하여 앉는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2-2!$
할아버지와 할머니가 A열 3, 4, 5번에 이웃하여 앉는 경우의 수는 2×2
따라서 구하는 경우의 수는 $10\times 4=40$

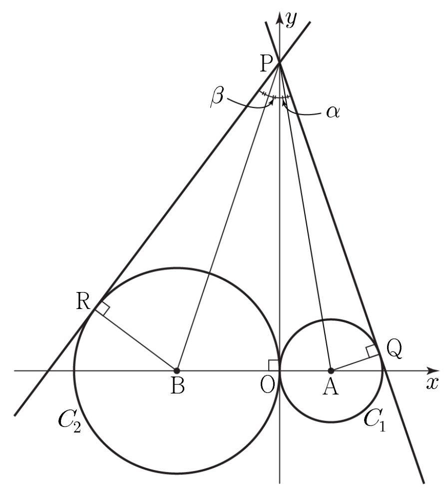
(ⅲ) 아이가 B열 3번에 앉는 경우
아버지 또는 어머니가 아이와 이웃하여 앉는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2-2!$
할아버지와 할머니가 A열 1, 2, 4, 5번에 이웃하여 앉는 경우의 수는 2×2
따라서 구하는 경우의 수는 $10\times 4=40$

(ⅳ) 아이가 B열 4번에 앉는 경우의 수는 B열 2번에 앉는 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는 40

(ⅴ) 아이가 B열 5번에 앉는 경우의 수는 B열 1번에 앉는 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는 36

따라서 (ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 구하는 경우의 수는 192

29. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 문제해결하기



원점을 O, $\angle\mathrm{OPA}=\alpha$, $\angle\mathrm{BPO}=\beta$라 하자.

삼각형 POA와 삼각형 PQA가 서로 합동이고

삼각형 PRB와 삼각형 POB가 서로 합동이므로

$\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{OPA}$, $\angle\mathrm{RPB}=\angle\mathrm{BPO}$

$\angle\mathrm{RPQ}=\theta=2(\alpha+\beta)$이므로

$\tan\theta=\tan 2(\alpha+\beta)$

$$=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha+\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\times\tan(\alpha+\beta)}=\frac{4}{3}$$

이때, $\tan(\alpha+\beta)=t$라 두면

$\frac{2t}{1-t^2}=\frac{4}{3}$, $2t^2+3t-2=0$

$a>\sqrt{2}$에서 $0<\theta<\pi$이므로 $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ t=\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$

$\tan\alpha=\frac{1}{a}$, $\tan\beta=\frac{2}{a}$

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3a}{a^2-2}=\frac{1}{2}$

$a^2-6a-2=0$, $a=3+\sqrt{11}$

따라서 $(a-3)^2=11$

30. [출제의도] 도함수를 활용하여 함수의 그래프 추론하기

$g'(x)=f'(x)\{e^{f(x)}-1\}$이므로 $g'(x)=0$이려면 $f'(x)=0$ 또는 $f(x)=0$이어야 한다.

(ⅰ) 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는 경우
방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근은 방정식 $f(x)=0$의 세 실근과 모두 다르므로 $g'(x)=0$을 만족시키는 서로 다른 실수 x의 값의 개수는 5이다.
$g'(x)=0$을 만족시키는 서로 다른 5개의 실수 x의 값의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $g(x)$는 서로 다른 5개의 극값을 갖는다.

(ⅱ) 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

(a) 방정식 $x^2+ax+b=0$의 실근 중 하나가 $x=0$인 경우
$b=0$이므로 방정식 $x^2+ax+b=0$의 0이 아닌 실근은 $x=-a$
$f(x)=x^3+ax^2$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=0$, $x=-\frac{2}{3}a$
$g'(x)=0$에서 $x=-a$, $x=-\frac{2}{3}a$, $x=0$
함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 극값을 가지므로 $a>0$
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

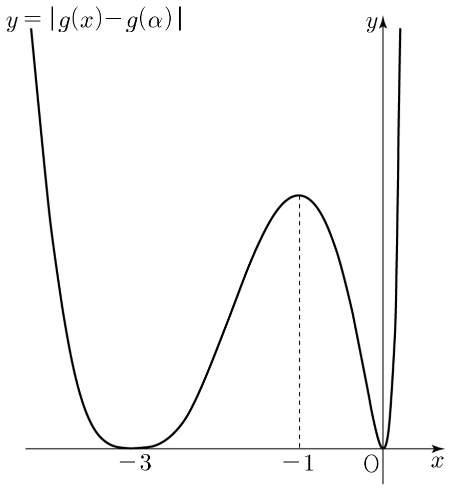
x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

$-\frac{2}{3}a=-1$이므로 $a=\frac{3}{2}$
a가 정수인 조건을 만족하지 않는다.

(b) 방정식 $x^2+ax+b=0$이 0이 아닌 중근을 갖는 경우
방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면
$D=a^2-4b=0$에서 $b=\frac{a^2}{4}$
$f(x)=x^3+ax^2+\frac{a^2}{4}x=x\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{a}{2}$, $x=-\frac{a}{6}$
$g'(x)=0$에서 $x=-\frac{a}{2}$, $x=-\frac{a}{6}$, $x=0$
함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 극값을 가지므로 $a>0$
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$	$-\frac{a}{6}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

$-\frac{a}{6}=-1$이므로 $a=6$, $b=9$
$\alpha=-\frac{a}{2}=-3$, $\beta=0$
이때, $g(\alpha)=g(0)=1$이므로
그림과 같이 함수 $y=|g(x)-g(\alpha)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



(iii) 방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 갖는 경우

(a) 방정식 $x^2+ax+b=0$이 $x=0$을 중근으로 갖는 경우

$a=b=0$

$f(x)=x^3$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$, $g'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖지 않는다.

(b) 방정식 $x^2+ax+b=0$이 두 허근을 갖는 경우

방정식 $f'(x)=0$의 실근 중 하나가

$x=-1$이므로 $3-2a+b=0$, $b=2a-3$

방정식 $x^2+ax+2a-3=0$의 판별식을 D라

하면 $D=a^2-8a+12<0$에서 $2<a<6$

$f(x)=x^3+ax^2+(2a-3)x=x(x^2+ax+2a-3)$

이므로

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{3-2a}{3}$, $x=-1$

$g'(x)=0$에서 $x=\dfrac{3-2a}{3}$, $x=-1$, $x=0$

함수 $g(x)$가 $x=\alpha$, $x=-1$, $x=\beta$에서만

극값을 가지므로 $\dfrac{3-2a}{3}<-1$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\frac{3-2a}{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$2<a<6$, $\dfrac{3-2a}{3}<-1$을 만족하는 정수 a는

4, 5이다.

$a=4$이면 $b=5$

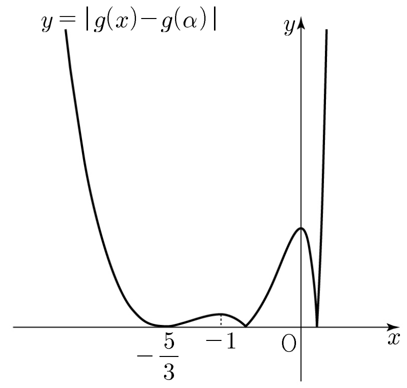
함수 $g(x)$는 $x=-\dfrac{5}{3}$, $x=-1$, $x=0$에서

극값을 갖고

$g(\alpha)=g\left(-\dfrac{5}{3}\right)=e^{-\frac{50}{27}}+\dfrac{50}{27}>1$, $g(0)=1$이므로

함수 $y=|g(x)-g(\alpha)|$의 미분가능하지 않은

점의 개수는 2이다.



$\therefore$ $\{f(-1)\}^2=(-2)^2=4$

$a=5$이면 $b=7$

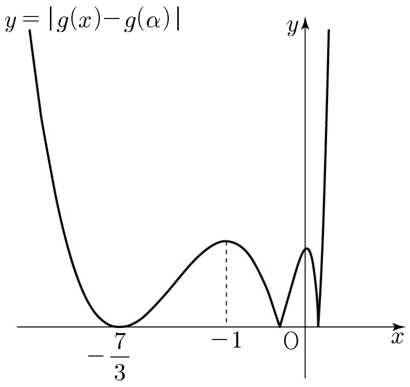
함수 $g(x)$는 $x=-\dfrac{7}{3}$, $x=-1$, $x=0$에서

극값을 갖고

$g(\alpha)=g\left(-\dfrac{7}{3}\right)=e^{-\frac{49}{27}}+\dfrac{49}{27}>1$, $g(0)=1$이므로

함수 $y=|g(x)-g(\alpha)|$의 미분가능하지 않은

점의 개수는 2이다.



$\therefore$ $\{f(-1)\}^2=(-3)^2=9$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여

$\{f(-1)\}^2$의 최댓값은 9이다.