2019학년도 3월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

나 형 정답

1	③	2	④	3	①	4	②	5	⑤
6	⑤	7	③	8	④	9	⑤	10	①
11	④	12	③	13	①	14	②	15	③
16	②	17	⑤	18	④	19	①	20	②
21	⑤	22	12	23	29	24	11	25	9
26	36	27	8	28	576	29	87	30	26

해 설

1. [출제의도] 다항식의 덧셈을 계산한다.

두 다항식 $A=2x^2+xy$, $B=x^2-2xy$에서

$A+B=(2x^2+xy)+(x^2-2xy)$

$=(2x^2+x^2)+(xy-2xy)$

$=3x^2-xy$

2. [출제의도] 합집합의 원소의 합을 구한다.

$A\cup B=\{1,\ 2\}\cup\{2,\ 3\}$

$=\{1,\ 2,\ 3\}$

이므로 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은

$1+2+3=6$

3. [출제의도] 직선의 방정식을 이해한다.

직선 $12x-2y+5=0$에서

$y=6x+\dfrac{5}{2}$

따라서 직선 $12x-2y+5=0$의 기울기는 6이다.

4. [출제의도] 복소수의 곱을 계산한다.

$i(1+i)=i+i^2$

$=i-1$

$=-1+i$

5. [출제의도] 항등식의 성질을 이해한다.

다항식 x^3-1을 인수분해하면

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

이므로

$a=1$, $b=1$

따라서 $a+b=2$

[다른 풀이 1]

$x^3-1=(x-1)(x^2+ax+b)$

$=x^3+(a-1)x^2+(b-a)x-b$

이므로 양변의 계수를 비교하면

$a-1=0$, $b-a=0$, $-b=-1$

$a=1$, $b=1$

따라서 $a+b=2$

[다른 풀이 2]

모든 실수 x에 대하여 등식

$x^3-1=(x-1)(x^2+ax+b)$ …… ㉠

이 성립하므로 ㉠의 양변에 적당한 x의 값을 대입하여도 등식이 성립한다.

등식 ㉠에 $x=0$을 대입하면

$-1=-b$에서 $b=1$

등식 ㉠에 $x=-1$을 대입하면

$-2=-2(2-a)$에서 $a=1$

따라서 $a+b=2$

6. [출제의도] 조합의 뜻을 이해한다.

서로 다른 6개의 과목 중에서 서로 다른 3개를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 6개 중에서 3개를 선택하는 조합의 수 ${}_6C_3$과 같으므로

${}_6C_3=\dfrac{{}_6P_3}{3!}=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

7. [출제의도] 역함수의 성질을 이해한다.

주어진 그림에서

$f(2)=1$, $f(4)=3$

함수 f는 일대일대응이므로 역함수의 성질에 의하여

$f^{-1}(3)=4$

따라서

$f(2)+f^{-1}(3)=1+4=5$

8. [출제의도] 합성함수의 뜻을 이해한다.

$f(x)=2x-1$에서

$f(5)=2\times5-1=9$

이므로

$(f\circ f)(5)=f(f(5))=f(9)$

$=2\times9-1=17$

[다른 풀이]

$(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=f(2x-1)$

$=2(2x-1)-1$

$=4x-3$

이므로

$(f\circ f)(5)=4\times5-3=17$

9. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다.

이차함수 $y=2x^2+ax-1$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 이차방정식 $2x^2+ax-1=0$의 두 실근과 같다.

이때 이차방정식 $2x^2+ax-1=0$의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-\dfrac{a}{2}$이다.

따라서 $-\dfrac{a}{2}=-1$에서

$a=2$

10. [출제의도] 원의 성질을 이용하여 선분의 길이의 최솟값을 추론한다.

점 A의 좌표가 $(4,\ 3)$이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

점 P는 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=4$

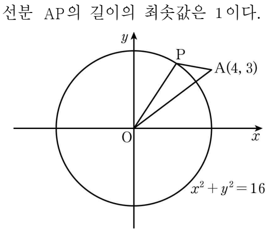
이때 그림과 같이 임의의 점 P에 대하여

$\overline{\mathrm{OA}}\le\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PA}}$

가 성립하므로

$\overline{\mathrm{AP}}\ge\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OP}}=5-4=1$

따라서 선분 AP의 길이의 최솟값은 1이다.



11. [출제의도] 연립방정식을 이해하여 해를 구한다.

$x-2y=1$에서

$x=2y+1$ …… ㉠

㉠을 $x^2-4y^2=5$에 대입하면

$(2y+1)^2-4y^2=5$

$(4y^2+4y+1)-4y^2=5$

$4y+1=5$

$y=1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x=2\times1+1=3$

따라서 $a=3$, $b=1$이므로

$a+b=4$

[다른 풀이]

$x-2y=1$ …… ㉢

$x^2-4y^2=5$ …… ㉣

㉣의 좌변을 인수분해하면

$(x-2y)(x+2y)=5$ …… ㉤

㉢을 ㉤에 대입하면

$x+2y=5$ …… ㉥

㉢, ㉥을 연립하면

$x=3$, $y=1$

따라서 $a=3$, $b=1$이므로

$a+b=4$

12. [출제의도] 절댓값을 포함하는 일차부등식의 해를 추론한다.

a는 자연수이므로 $|x-3|\le a$에서

$-a\le x-3\le a$

$3-a\le x\le 3+a$ …… ㉠

부등식 ㉠을 만족시키는 정수 x의 개수는

$(3+a)-(3-a)+1=2a+1$

$2a+1=15$에서

$a=7$

13. [출제의도] 나머지정리를 이해하여 미지수를 구한다.

다항식 $f(x)$를 $(x-3)(2x-a)$로 나눈 몫이 $x+1$이고 나머지가 6이므로

$f(x)=(x-3)(2x-a)(x+1)+6$ …… ㉠

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 6이므로 나머지정리에 의해 $f(1)=6$이다.

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=(1-3)(2-a)\times2+6$

$=-4(2-a)+6$

$=-8+4a+6$

$=4a-2$

따라서 $4a-2=6$, $a=2$

[다른 풀이]

다항식 $f(x)$를 $(x-3)(2x-a)$로 나눈 몫이 $x+1$이고 나머지가 6이므로

$f(x)=(x-3)(2x-a)(x+1)+6$ …… ㉡

한편, 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-1)Q(x)+6$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$(x-3)(2x-a)(x+1)=(x-1)Q(x)$

이때 $(x-3)(2x-a)(x+1)$은 $x-1$을 인수로 가져야 한다.

따라서 $2x-a=2(x-1)$에서

$a=2$

14. [출제의도] 삼차방정식의 허근과 관련된 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 다항식 $x^3-3x^2+9x+13$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	-3	9	13
		-1	4	-13
	1	-4	13	0

$x^3-3x^2+9x+13=(x+1)(x^2-4x+13)$

이차방정식 $x^2-4x+13=0$에서

$x=2+3i$ 또는 $x=2-3i$

따라서 방정식 $x^3-3x^2+9x+13=0$의 세 근은

$x=-1$ 또는 $x=2+3i$ 또는 $x=2-3i$

조건 (나)에서

$\dfrac{z-\bar{z}}{i}=\dfrac{(a+bi)-(a-bi)}{i}=\dfrac{2bi}{i}=2b$

$\dfrac{z-\bar{z}}{i}$가 음의 실수이므로 b는 음수이다.

따라서 $z=2-3i$

$a=2$, $b=-3$

$a+b=-1$

15. [출제의도] '모든'이 포함된 명제와 관련된 문제를 해결한다.

명제

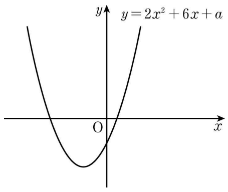
'모든 실수 x에 대하여 $2x^2+6x+a\geq 0$이다.'

가 거짓이면 이 명제의 부정

'어떤 실수 x에 대하여 $2x^2+6x+a<0$이다.'

는 참이다.

따라서 이차함수 $y=2x^2+6x+a$의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



이차방정식 $2x^2+6x+a=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=3^2-2a>0$에서 $a<\frac{9}{2}$

따라서 정수 a의 최댓값은 4이다.

16. [출제의도] 점의 이동 및 두 직선의 위치 관계와 관련된 문제를 해결한다.

점 P는 점 A$(-3,\ 1)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점이므로 그 좌표는 $(3,\ 1)$이다.

또, 점 Q는 점 B$(1,\ k)$를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 점이므로 그 좌표는 $(1,\ k-5)$이다.

두 점 B$(1,\ k)$, P$(3,\ 1)$에 대하여 직선 BP의 기울기는

$\frac{1-k}{3-1}=-\frac{k-1}{2}$

두 점 P$(3,\ 1)$, Q$(1,\ k-5)$에 대하여 직선 PQ의 기울기는

$\frac{(k-5)-1}{1-3}=-\frac{k-6}{2}$

직선 BP와 직선 PQ가 서로 수직이므로

$\left(-\frac{k-1}{2}\right)\times\left(-\frac{k-6}{2}\right)=-1$

$(k-1)(k-6)=-4$

$k^2-7k+10=0$

$(k-2)(k-5)=0$

$k=2$ 또는 $k=5$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$2\times5=10$

17. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계와 관련된 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 원 $C: x^2+y^2-4x-2ay+a^2-9=0$이 원점을 지나므로 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$a^2-9=0$, $a^2=9$

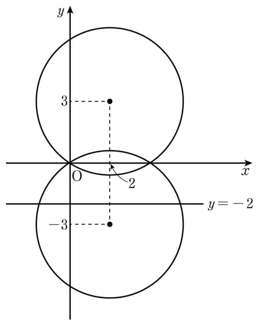
$a=-3$ 또는 $a=3$

$a=-3$일 때, 원 C의 방정식은

$x^2+y^2-4x+6y=0$, $(x-2)^2+(y+3)^2=13$

$a=3$일 때, 원 C의 방정식은

$x^2+y^2-4x-6y=0$, $(x-2)^2+(y-3)^2=13$



이때 $a=3$이면 원 C는 직선 $y=-2$와 만나지 않으므로 조건 (나)에 의하여 $a=-3$이다.

$(x-2)^2+(y+3)^2=13$, $y=-2$를 연립하면

$(x-2)^2+(-2+3)^2=13$

$(x-2)^2=12$

$x=2\pm2\sqrt{3}$

따라서 원 C와 직선 $y=-2$가 만나는 두 점의 좌표는 각각 $(2-2\sqrt{3},\ -2)$, $(2+2\sqrt{3},\ -2)$이므로 두 점 사이의 거리는

$(2+2\sqrt{3})-(2-2\sqrt{3})=4\sqrt{3}$

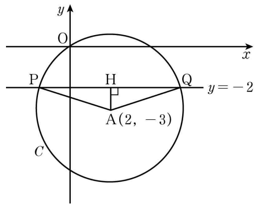
[다른 풀이]

$a=-3$일 때, 원 C의 방정식은

$x^2+y^2-4x+6y=0$

$(x-2)^2+(y+3)^2=13$

따라서 원 C의 중심은 A$(2,\ -3)$이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$이다.



원의 중심 A$(2,\ -3)$에서 직선 $y=-2$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원 C와 직선 $y=-2$가 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{13}$, $\overline{\mathrm{AH}}=1$

이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-1^2}=2\sqrt{3}$

따라서

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PH}}=4\sqrt{3}$

18. [출제의도] 삼각형의 무게중심과 관련된 문제를 해결한다.

두 점 A, B의 좌표를 각각

$(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$

라 하면 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표가 $(5,\ 4)$이므로

$\frac{0+a_1+a_2}{3}=5$, $\frac{0+b_1+b_2}{3}=4$

$a_1+a_2=15$, $b_1+b_2=12$ …… ㉠

선분 OA를 $2:1$로 외분하는 점 C의 좌표는

$\left(\frac{2a_1-0}{2-1},\ \frac{2b_1-0}{2-1}\right)$, 즉 $(2a_1,\ 2b_1)$

마찬가지로 선분 OB를 $2:1$로 외분하는 점 D의 좌표는

$(2a_2,\ 2b_2)$

이때 두 선분 AD, BC는 모두 삼각형 OCD의 중선이므로 교점 E는 삼각형 OCD의 무게중심이다.

따라서 점 E의 좌표는

$\left(\frac{0+2a_1+2a_2}{3},\ \frac{0+2b_1+2b_2}{3}\right)$

㉠에 의하여

$\frac{2a_1+2a_2}{3}=\frac{2(a_1+a_2)}{3}=\frac{2\times15}{3}=10$,

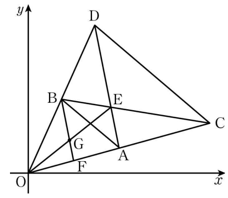
$\frac{2b_1+2b_2}{3}=\frac{2(b_1+b_2)}{3}=\frac{2\times12}{3}=8$

이므로 점 E의 좌표는 $(10,\ 8)$이다.

따라서 $p=10$, $q=8$이므로

$p+q=18$

[다른 풀이]



점 E는 삼각형 OCD의 무게중심이므로 점 E는 선분 DA를 $2:1$로 내분하는 점이다.

선분 OA의 중점을 F라 하고, 삼각형 OAB의 무게중심을 G라 하면 점 G는 선분 BF를 $2:1$로 내분하는 점이므로 세 점 O, G, E는 한 직선 위에 있다.

이때 $\overline{\mathrm{OF}}:\overline{\mathrm{OA}}=1:2$이므로 두 삼각형 OFG, OAE는 닮음비가 $1:2$인 닮은 도형이다.

즉 $\overline{\mathrm{OG}}:\overline{\mathrm{OE}}=1:2$이고 점 G의 좌표가 $(5,\ 4)$이므로

$p=2\times5=10$, $q=2\times4=8$

따라서 $p+q=18$

19. [출제의도] 조합의 수를 이해하여 집합의 개수를 구하는 과정을 추론한다.

$A=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$

$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

$B=\{x\,|\,x$는 6 이상 15 이하의 자연수$\}$

$=\{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$

에서

$A-B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $A\cap B=\{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

이므로

$n(A-B)=5$, $n(A\cap B)=5$

$X_1=X\cap(A-B)$, $X_2=X\cap(A\cap B)$라 하면

$X=X_1\cup X_2$이고 $X_1\cap X_2=\varnothing$이다.

(i) $n(X\cup B)=12$이고 $n(B)=10$이므로

$n(X_1)=\boxed{2}$

집합 X_1은 집합 $A-B$의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합이므로 가능한 집합 X_1의 개수는 ${}_5\mathrm{C}_2=\boxed{10}$이다.

(ii) 집합 X_2는 집합 $A\cap B$의 부분집합이므로 가능한 집합 X_2의 개수는 $2^5=\boxed{32}$이다.

(i), (ii)에 의하여 집합 X의 개수는 집합 X_1을 정하는 경우의 수와 집합 X_2를 정하는 경우의 수의 곱과 같으므로

${}_5\mathrm{C}_2\times2^5=\boxed{10}\times\boxed{32}=320$

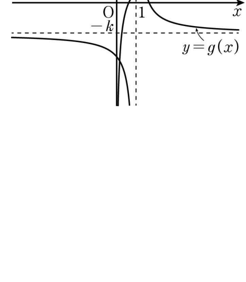
따라서 $p=2$, $q=10$, $r=32$이므로

$p+q+r=44$

20. [출제의도] 유리함수의 그래프와 관련된 문제를 해결한다.

(i) $k>0$일 때,

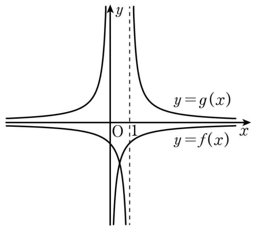
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 중 x좌표가 양수인 점의 개수는 2이다.

(ii) $k=0$일 때,

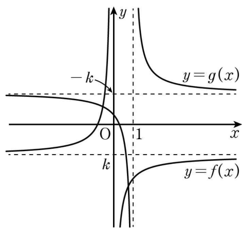
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 중 x좌표가 양수인 점의 개수는 1이다.

(iii) $k<0$일 때,

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 중 x좌표가 양수인 점의 개수는 1이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

$h(k)=\begin{cases} 1 & (k\le 0) \\ 2 & (k>0) \end{cases}$

연속하는 세 정수 k, $k+1$, $k+2$에 대하여 등식

$h(k)+h(k+1)+h(k+2)=4$ ······ ㉠

가 성립하려면

$h(k)=1$, $h(k+1)=1$, $h(k+2)=2$

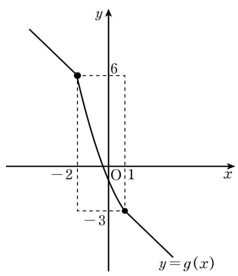
이어야 한다.

이때 $h(-1)=1$, $h(0)=1$, $h(1)=2$이므로 등식 ㉠을 만족시키는 정수 k의 값은 -1이다.

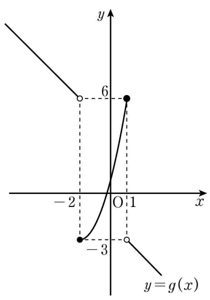
21. [출제의도] 일대일대응을 이해하여 명제의 참, 거짓을 추론한다.

ㄱ. 함수 $g(x)$의 정의역과 치역이 모두 실수 전체의 집합이고 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $g(x)$는 일대일대응이다. 따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같이 두 가지이다.

(i) $g(-2)=f(-2)=6$, $g(1)=f(1)=-3$일 때,



(ii) $g(-2)=f(-2)=-3$, $g(1)=f(1)=6$일 때,



(i), (ii)에서

$f(-2)+f(1)=3$ (참)

ㄴ. $g(0)=f(0)=-1$에서

$f(x)=ax^2+bx-1$ (a는 양의 상수, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$g(1)=f(1)=-3$이면 $f(-2)=6$이어야 하므로

$a+b-1=-3$, $4a-2b-1=6$

연립방정식 $\begin{cases} a+b=-2 \\ 4a-2b=7 \end{cases}$ 을 풀면

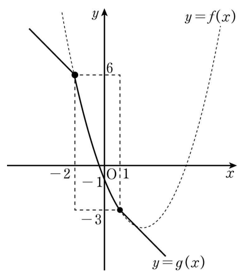
$a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{5}{2}$

따라서

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-1$

$\quad=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{33}{8}$

이므로 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표는 $\frac{5}{2}$이다. (참)



ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 -2이므로

$f(x)=a(x+2)^2+p$ (a는 양의 상수, p는 상수)라 할 수 있다.

이때 함수 $g(x)$가 일대일대응이므로

$f(-2)=-3$, $f(1)=6$

이다.

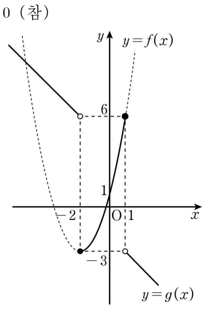
$p=-3$, $9a+p=6$

에서 $a=1$이므로

$f(x)=(x+2)^2-3$

따라서 $g(0)=f(0)=1$이므로

$g^{-1}(1)=0$ (참)



그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22. [출제의도] 순열의 수를 계산한다.

${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$

23. [출제의도] 두 점 사이의 거리를 계산한다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4+1)^2+(1-3)^2}$

$\quad=\sqrt{29}$

선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

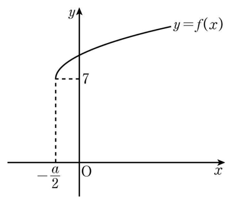
$\overline{\mathrm{AB}}^2=29$

24. [출제의도] 무리함수의 그래프를 이해한다.

$f(x)=\sqrt{2x+a}+7$

$\quad=\sqrt{2\left(x+\frac{a}{2}\right)}+7$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=-\frac{a}{2}$일 때 최솟값 7을 가진다.

$-\frac{a}{2}=-2$에서 $a=4$이고 $m=7$이므로

$a+m=11$

25. [출제의도] 다항식의 나눗셈을 이해한다.

다항식 $2x^3-x^2+x+3$을 $x+1$로 나눈 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

-1	2	-1	1	3
		-2	3	-4
	2	-3	4	-1

따라서 $Q(x)=2x^2-3x+4$이므로

$Q(-1)=2+3+4=9$

26. [출제의도] 집합의 연산 법칙을 이해한다.

$A=\{x\mid x$는 4의 배수$\}$

$\quad=\{4, 8, 12, 16, 20\}$

$B=\{x\mid x$는 20의 약수$\}$

$\quad=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

드모르간의 법칙에 의하여

$(A^C\cup B)^C=(A^C)^C\cap B^C$

$\quad=A\cap B^C$

$\quad=A-B$

$A-B=\{8, 12, 16\}$이므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 $8+12+16=36$이다.

27. [출제의도] 필요조건과 충분조건을 이해한다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$2x-a\le0$에서 $x\le\frac{a}{2}$이므로

$P=\left\{x \,\middle|\, x\le\frac{a}{2}\right\}$

조건 $q: x^2-5x+4>0$에 대하여

$\sim q: x^2-5x+4\le0$

$x^2-5x+4\le0$에서

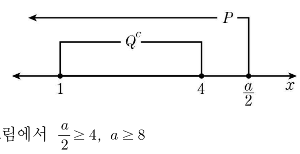
$(x-1)(x-4)\le0$

$1\le x\le4$

이므로

$Q^C=\{x\mid 1\le x\le4\}$

p가 $\sim q$이기 위한 필요조건이면 명제 $\sim q\to p$가 참이므로 $Q^C\subset P$가 성립해야 한다.



위 그림에서 $\frac{a}{2}\ge4$, $a\ge8$

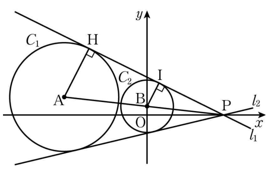
따라서 실수 a의 최솟값은 8이다.

28. [출제의도] 경우의 수를 구하는 실생활과 관련된 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 A와 B가 같이 앉을 수 있는 2인용 의자는 마부가 앉아 있는 의자를 제외한 3개이고, 두 사람은 자리를 서로 바꿔 앉을 수 있으므로 A와 B가 앉는 경우의 수는
$3\times 2!=6$
남은 5개의 좌석에 C와 D가 앉는 전체 경우의 수는
${}_5\mathrm{P}_2=20$
이때 C와 D가 같은 2인용 의자에 이웃하여 앉는 경우의 수를 구해 보자.
두 사람이 이웃하여 앉을 수 있는 의자는 A와 B가 앉아 있는 의자와 마부가 앉아 있는 의자를 제외한 나머지 2개이고, 두 사람은 서로 자리를 바꿔 앉을 수 있으므로 C와 D가 앉는 경우의 수는
$2\times 2!=4$
따라서 조건 (나)에서 C와 D가 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는
$20-4=16$
남은 3개의 좌석에 E, F, G가 앉는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 모든 경우의 수는
$6\times 16\times 6=576$

29. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계와 관련된 문제를 해결한다.

두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 A, B라 하면 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(-7,\ 2)$, $(0,\ b)$이다.

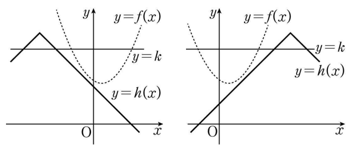


그림과 같이 두 점 A, B에서 직선 l_1에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면
$\overline{\mathrm{AH}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{BI}}=\sqrt{5}$
이므로 두 삼각형 PAH, PBI는 닮음비가
$\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{BI}}=2:1$
인 닮은 도형이다.
이때 점 B는 선분 AP의 중점이므로
$\dfrac{(-7)+a}{2}=0$, $\dfrac{2+0}{2}=b$
$a=7$, $b=1$ …… ㉠
점 $\mathrm{P}(7,\ 0)$을 지나고 점 $\mathrm{B}(0,\ 1)$에서의 거리가 $\sqrt{5}$인 직선을
$y=m(x-7)$, 즉 $mx-y-7m=0$ (m은 상수)
로 놓으면
$\dfrac{|m\times 0-1-7m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$
$|-7m-1|=\sqrt{5(m^2+1)}$ …… ㉡
㉡의 양변을 제곱하면
$49m^2+14m+1=5m^2+5$
$44m^2+14m-4=0$, $22m^2+7m-2=0$
$(2m+1)(11m-2)=0$
$m=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $m=\dfrac{2}{11}$
따라서 두 직선 l_1, l_2의 기울기의 곱은
$\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{2}{11}=-\dfrac{1}{11}$
이므로 $c=-\dfrac{1}{11}$ …… ㉢
㉠, ㉢에서
$11(a+b+c)=11\left(7+1-\dfrac{1}{11}\right)$
$=87$

30. [출제의도] 이차함수의 그래프 및 '어떤'이 포함된 명제와 관련된 문제를 해결한다.

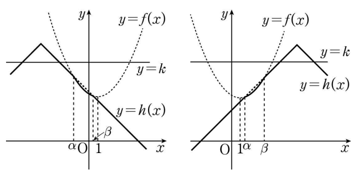
$f(x)=x^2-2x+6$
$=(x-1)^2+5$
이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.
한편,
$-|x-t|+11=\begin{cases} x-t+11 & (x<t) \\ -x+t+11 & (x\ge t)\end{cases}$
이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=t$에 대하여 대칭이다.
따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같이 세 가지로 나타난다.

(i) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나지 않거나 한 점에서만 만날 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

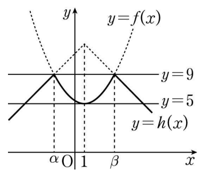
(ii) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 α, $\beta(\alpha<\beta\le 1$ 또는 $1\le\alpha<\beta)$일 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

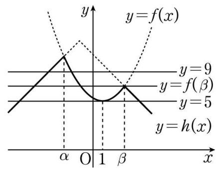
(iii) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 α, $\beta(\alpha<1<\beta)$일 때,

① $f(\alpha)=f(\beta)$, 즉 $t=1$일 때,



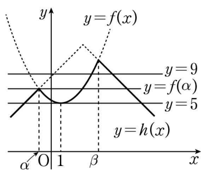
두 교점은 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.
이때 β의 값을 구하면
$x^2-2x+6=-x+12$
$x^2-x-6=0$
$(x+2)(x-3)=0$
$x=-2$ 또는 $x=3$
$\beta>1$이므로 $\beta=3$
$g(3)=-|3-1|+11=9$
따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 5뿐이다.

② $f(\alpha)>f(\beta)$일 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 5와 $f(\beta)\,(5<f(\beta)<9)$이다.

③ $f(\alpha)<f(\beta)$일 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 5와 $f(\alpha)\,(5<f(\alpha)<9)$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 명제
'어떤 실수 t에 대하여 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$는 서로 다른 세 점에서 만난다.'
가 참이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는
$5\le k<9$
따라서 자연수 k의 값은 5, 6, 7, 8이므로 그 합은
$5+6+7+8=26$