# 2018학년도 11월 고2 전국연합학력평가
# 정답 및 해설

## • 2교시 수학 영역 •

### [가형]

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | ① | **2** | ② | **3** | ① | **4** | ③ | **5** | ⑤ |
| **6** | ⑤ | **7** | ② | **8** | ② | **9** | ④ | **10** | ④ |
| **11** | ③ | **12** | ③ | **13** | ③ | **14** | ⑤ | **15** | ① |
| **16** | ④ | **17** | ⑤ | **18** | ④ | **19** | ⑤ | **20** | ① |
| **21** | ② | **22** | 12 | **23** | 81 | **24** | 36 | **25** | 9 |
| **26** | 27 | **27** | 6 | **28** | 100 | **29** | 43 | **30** | 134 |

1. [출제의도] 삼각함수 계산하기

$\sin\frac{3}{2}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-1$

2. [출제의도] 지수함수의 미분법 계산하기

$f'(x)=e^x+1$이므로

$f'(0)=e^0+1=1+1=2$

3. [출제의도] 로그함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{4x}=\frac{1}{4}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{4}$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)+\lim\limits_{x\to1+}f(x)=-1+2=1$

5. [출제의도] 도함수의 활용 이해하기

$y'=-6x^2+5$이므로 점 $(1,3)$에서의 접선의 기울기는 $-6\times1^2+5=-1$

6. [출제의도] 등비수열의 극한 이해하기

$a_n=a_1\times3^{n-1}$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-2}{3^{n+1}+2a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1\times3^{n-1}-2}{3^{n+1}+2a_1\times3^{n-1}}$

분모, 분자를 $3^{n-1}$으로 나누면

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1-\frac{2}{3^{n-1}}}{9+2a_1}=\frac{2}{5}$에서 $\frac{a_1}{9+2a_1}=\frac{2}{5}$

따라서 $a_1=18$

7. [출제의도] 정적분 이해하기

$\int_{-1}^{1}\left(4x^3+x^2-\frac{1}{2}x+a\right)dx$

$=2\int_0^1(x^2+a)dx=2\left[\frac{1}{3}x^3+ax\right]_0^1=\frac{2}{3}+2a$

$\frac{2}{3}+2a=2$이므로 $a=\frac{2}{3}$

8. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

주어진 그래프를 $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동하면 함수 $y=a\cos\frac{\pi}{2b}x$의 그래프와 일치한다.

함수 $y=a\cos\frac{\pi}{2b}x$의 최댓값이 3, 최솟값이 $-3$이므로 $|a|=3$

$a>0$이므로 $a=3$

주기가 4이므로 $\frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{2b}\right|}=4$에서 $|b|=1$

$b>0$이므로 $b=1$

따라서 $a+b=4$

9. [출제의도] 로그부등식 이해하기

진수조건에 의하여

$x-2>0,\ 3x+4>0$이므로 $x>2$ ⋯ ㉠

$\log_2 4+\log_2(x-2)<\log_2(3x+4)$

$\log_2 4(x-2)<\log_2(3x+4)$

$4x-8<3x+4$

$x<12$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $2<x<12$

따라서 정수 $x$의 개수는 9

10. [출제의도] 부정적분 이해하기

$\frac{d}{dx}\int\{f(x)-x^2+4\}dx=f(x)-x^2+4$

$\int\frac{d}{dx}\{2f(x)-3x+1\}dx=2f(x)-3x+C$

(단, $C$는 적분상수)

$f(x)-x^2+4=2f(x)-3x+C$에서

$f(x)=-x^2+3x+4-C$

$f(1)=-1+3+4-C=3$에서 $C=3$이므로

$f(x)=-x^2+3x+1$

따라서 $f(0)=1$

11. [출제의도] 다항함수의 미분가능성 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=2$에서 미분가능하다.

( i ) $x=2$에서 연속

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)=f(2)$에서 $4a+b=8$ ⋯ ㉠

( ii ) $x=2$에서 미분가능

$\lim\limits_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2-}\frac{x^3+ax^2+b-16}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2-}\frac{(x-2)\{x^2+(a+2)x+(2a+4)\}}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2-}\{x^2+(a+2)x+(2a+4)\}$

$=4a+12$

$\lim\limits_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2+}\frac{4x^2-16}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2+}\frac{4(x+2)(x-2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2+}4(x+2)$

$=16$

$\lim\limits_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$에서

$4a+12=16$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=1,\ b=4$

따라서 $f(1)=6$

12. [출제의도] 급수와 정적분의 관계 이해하기

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)=\frac{1}{2}\times\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$

$=\frac{1}{2}\int_1^3f(x)dx$

$=\frac{1}{2}\left[x^3-2x^2+6x\right]_1^3=11$

13. [출제의도] 등비급수 이해하기

수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r_1$, 수열 $\{b_n\}$의 공비를 $r_2$라 할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-r_1}=4$이므로 $r_1=\frac{3}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{1-r_2}=2$이므로 $r_2=\frac{1}{2}$

$a_nb_n=\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{1}{1-\frac{3}{8}}=\frac{8}{5}$

14. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$v(t)=t^2-2t-3=(t+1)(t-3)$

$t=0$부터 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^4|v(t)|dt$

$=\int_0^3(-t^2+2t+3)dt+\int_3^4(t^2-2t-3)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2+3t\right]_0^3+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2-3t\right]_3^4=\frac{34}{3}$

15. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

$\log_3a=1,\ \log_3 27=b$이므로 $a=3,\ b=3$

함수 $y=\log_3x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $m$만큼 평행이동한 함수 $y=\log_3(x-m)$의 그래프가 두 점 A, B의 중점의 좌표 $(15,2)$를 지나므로

$\log_3(15-m)=2$

따라서 $m=6$

16. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$\cos^2x=1-\sin^2x$이므로

$2(1-\sin^2x)+(2+\sqrt{3})\sin x-(2+\sqrt{3})=0$

$2\sin^2x-(2+\sqrt{3})\sin x+\sqrt{3}=0$

$(2\sin x-\sqrt{3})(\sin x-1)=0$

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\sin x=1$이므로

$0\le x\le\pi$에서

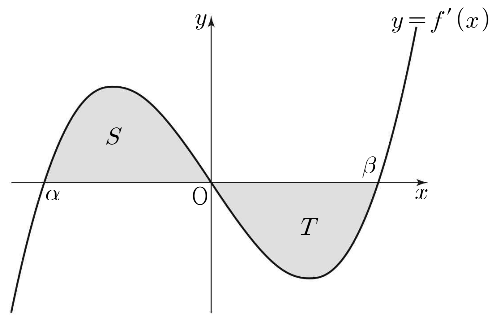
$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

따라서 모든 해의 합은 $\frac{3}{2}\pi$

17. [출제의도] 정적분을 활용하여 추론하기

ㄱ. $f'(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.

$f'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. (참)




ㄴ. $\alpha=-\beta$에 의하여

$f'(x)=k(x-\beta)x(x+\beta)=kx^3-k\beta^2x\ (k>0)$

$f(x)=\frac{k}{4}x^4-\frac{k\beta^2}{2}x^2+C$(단, $C$는 적분상수)

따라서 $f(x)$는 $y$축에 대하여 대칭인 함수이므로 $f(-\beta)=f(\beta)$

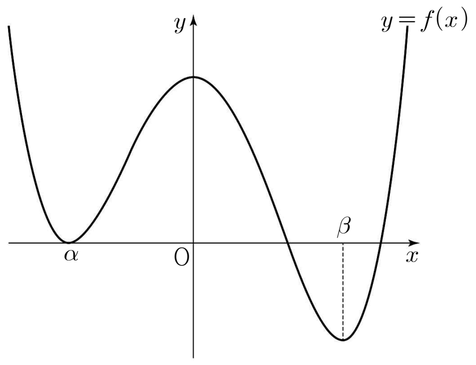
$S=\int_\alpha^0|f'(x)|dx=\int_{-\beta}^0f'(x)dx=f(0)-f(-\beta)$

$T=\int_0^\beta|f'(x)|dx=\int_0^\beta\{-f'(x)\}dx$

$=-f(\beta)+f(0)$

따라서 $S=T$ (참)

ㄷ. $S<T$, $f(\alpha)=0$이므로
$f(0)-f(\alpha)<-f(\beta)+f(0)$에서 $f(\beta)<0$
함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극솟값,
$x=0$에서 극댓값을 갖는다.
$y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.




방정식 $f(x)=0$의 양의 실근의 개수는 2 (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

**18. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기**

$\mathrm{R}(t,0)$이고, 점 $\mathrm{P}(t,t^2)$에서의 접선 $l$의 방정식은
$y=2t(x-t)+t^2=2tx-t^2$

$x$절편은 $\dfrac{t}{2}$이므로 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{t}{2},0\right)$

$\overline{\mathrm{QR}}=\dfrac{t}{2}$, $\overline{\mathrm{PR}}=t^2$

따라서 삼각형 PQR의 넓이

$f(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QR}}\times\overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{t}{2}\times t^2=\dfrac{1}{4}t^3$

$x>0$일 때, 두 곡선 $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$는
직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
두 점 P와 A는 각각 두 곡선 위의 점이고,
기울기가 $-1$인 직선 위에 있으므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
따라서 $\mathrm{A}(t^2,t)$
한 변의 길이가 $t-t^2$인 정사각형 PCAB의 넓이
$g(t)=(t-t^2)^2=t^4-2t^3+t^2$

따라서 $\displaystyle\lim_{t\to0+}\frac{t\times g(t)}{f(t)}=\lim_{t\to0+}\frac{t(t^4-2t^3+t^2)}{\frac{1}{4}t^3}=4$

**19. [출제의도] 도함수의 성질을 활용하여 추론하기**

함수 $f(x)$에서
$$\begin{aligned}f'(x)&=6kx^2-6(3k+1)x+18\\&=6(kx-1)(x-3)\\&=6k\left(x-\frac{1}{k}\right)(x-3)\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{k}=3$인 경우 $f'(x)=2(x-3)^2\geq0$이므로
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다. 따라서
$k=\boxed{\dfrac{1}{3}}$인 경우를 제외하고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지므로

(i) $0<k\leq\boxed{\dfrac{1}{3}}$일 때,
$0<x<3$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.
따라서 닫힌 구간 $[0,3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(3)=\boxed{-27k+25}$이다. 그러나
$\boxed{-27k+25}=12$를 만족하는 $k=\dfrac{13}{27}$이므로
$0<k\leq\boxed{\dfrac{1}{3}}$에 존재하지 않는다.

(ii) $k>\boxed{\dfrac{1}{3}}$일 때,
닫힌 구간 $[0,3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{1}{k}$ | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | + | 0 | − | 0 |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{k}$에서 극대이면서
최대이다. $f\left(\dfrac{1}{k}\right)=\dfrac{2}{k^2}-\dfrac{3(3k+1)}{k^2}+\dfrac{18}{k}-2=12$

$(7k-1)(2k-1)=0$에서 $k>\dfrac{1}{3}$이므로 $k=\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,3]$에서 최댓값 12를 가질 때, $k=\boxed{\dfrac{1}{2}}$이다.

(가), (다)에 알맞은 수는 각각 $a=\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{1}{2}$

(나)에 알맞은 식은 $g(k)=-27k+25$

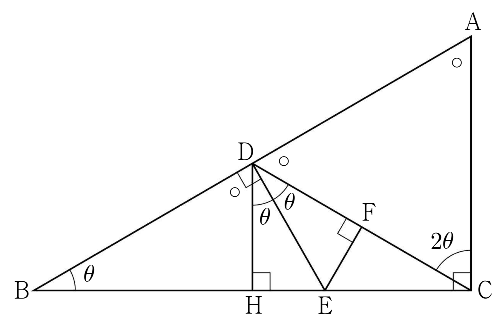
따라서 $\dfrac{g(a)}{b}=32$

**20. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기**

점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면
삼각형 BED와 삼각형 DEH는 닮음이므로
$\angle\mathrm{EBD}=\angle\mathrm{EDH}=\theta$
선분 AC와 선분 DH는 서로 평행하므로
$\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{CDH}=2\theta$

$\angle\mathrm{DAC}=\angle\mathrm{CDA}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로

삼각형 CAD는 $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CD}}$인 이등변삼각형이다.
$\overline{\mathrm{AB}}=4$이므로 $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CD}}=4\sin\theta$




삼각형 DHC에서
$\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{CD}}\cos2\theta=4\sin\theta\cos2\theta$
삼각형 DHE에서
$\overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{\overline{\mathrm{DH}}}{\cos\theta}=4\tan\theta\cos2\theta$
점 E에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 F라 할 때,
$\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{DE}}\sin\theta$
삼각형 CDE의 넓이
$$\begin{aligned}S(\theta)&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{EF}}\\&=8\sin^2\theta\tan\theta\cos2\theta\end{aligned}$$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\sin^2\theta\tan\theta\cos2\theta}{\theta^3}$

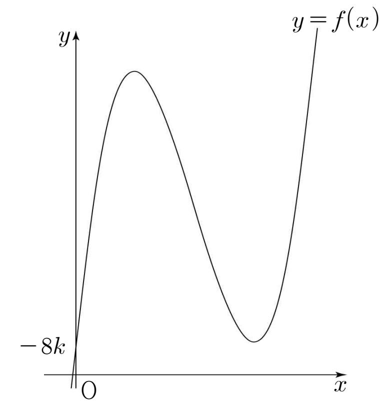
$\displaystyle=8\times\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\left(\frac{\tan\theta}{\theta}\right)\times\cos2\theta\right\}$

$=8$

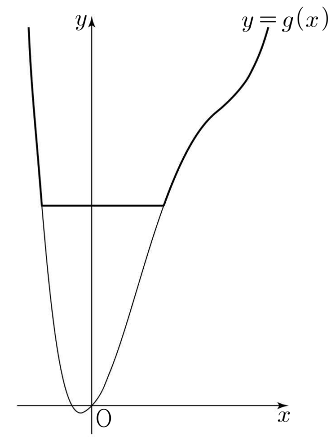
**21. [출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기**

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 갖고, $k$의 값에 따른 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.

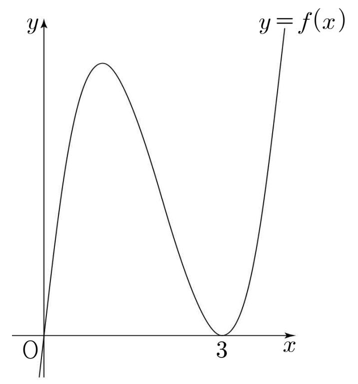
(i) $k<0$일 때



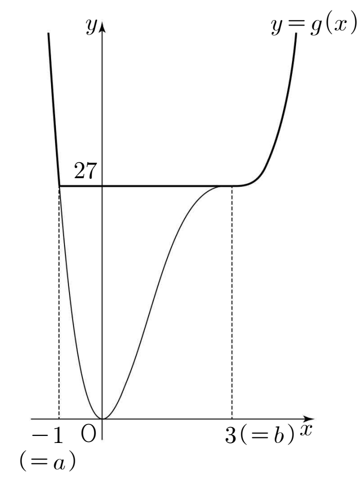

그림과 같이 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 $a$, $b$가 존재하지 않는다.



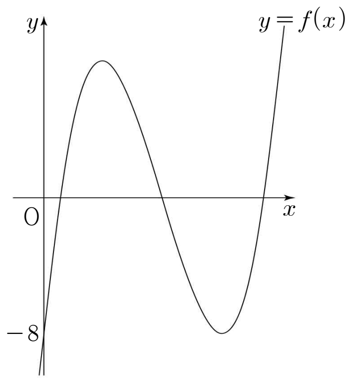

(ii) $k=0$일 때




그림과 같이 $b=3$일 때 $g'(3)=0$이므로
$g(3)=\displaystyle\int_0^3 f(x)dx=\left[x^4-8x^3+18x^2\right]_0^3=27=c$
$g(a)=27$에서
$a^4-8a^3+18a^2=27$, $(a+1)(a-3)^3=0$
$a=-1$
따라서 $a=-1$, $b=3$, $c=27$



(iii) $k=1$일 때




함수 $f(x)=4x^3-24x^2+36x-8$에서

$f(2-\sqrt{3})=f(2)=f(2+\sqrt{3})=0$이므로

그림과 같이 함수 $g(x)$는

$x=2-\sqrt{3}$, $x=2+\sqrt{3}$에서 극솟값 $-1$,

$x=2$에서 극댓값을 갖는다.

$g(2)=\int_0^2 f(x)dx=\left[x^4-8x^3+18x^2-8x\right]_0^2=8=c$

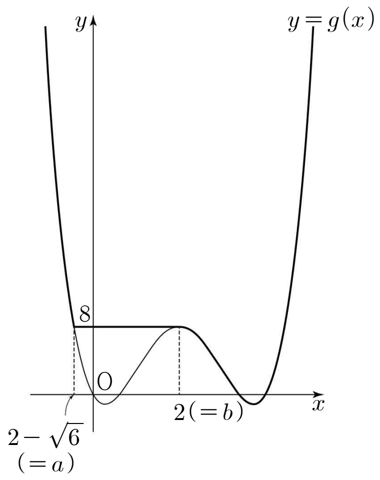
$g(x)=8$에서

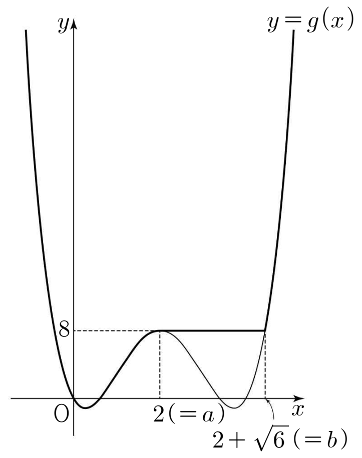
$x^4-8x^3+18x^2-8x=8$

$(x-2)^2(x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6})=0$

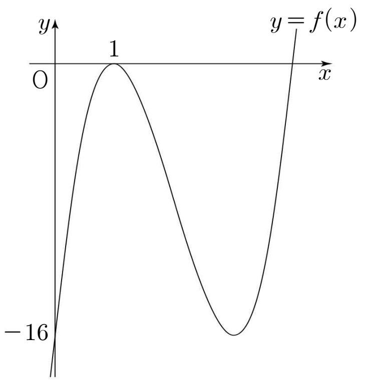
따라서 $a=2-\sqrt{6}$, $b=2$, $c=8$

또는 $a=2$, $b=2+\sqrt{6}$, $c=8$




(iv) $k=2$일 때




그림과 같이 $a=1$일 때, $g'(1)=0$이므로

$g(1)=\int_0^1 f(x)dx$

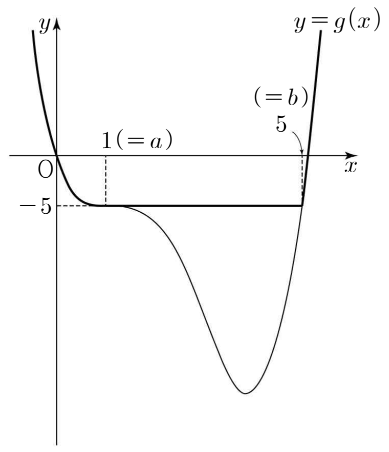
$=\left[x^4-8x^3+18x^2-16x\right]_0^1=-5=c$

$g(b)=-5$에서

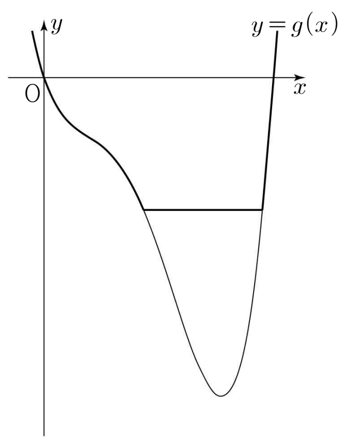
$b^4-8b^3+18b^2-16b=-5$, $(b-1)^3(b-5)=0$

$b=5$

따라서 $a=1$, $b=5$, $c=-5$




(v) $k\geq 3$일 때




(i)의 경우와 마찬가지로 조건을 만족하는 $a$, $b$, $c$는 존재하지 않는다.

(i) ~ (v)에 의하여 조건을 만족하는 $k$, $a$, $b$, $c$의 합 $k+a+b+c$의 값은

각각 29, $13-\sqrt{6}$, $13+\sqrt{6}$, 3

따라서 $k+a+b+c$의 최솟값은 3

**22. [출제의도] 부정적분 계산하기**

$f(x)=\int(2x+1)dx=x^2+x+C$

(단, $C$는 적분상수)

이고 $f(0)=0$이므로 $C=0$

$f(x)=x^2+x$이므로 $f(3)=3^2+3=12$

**23. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기**

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}$은 닫힌 구간 $[1,5]$에서

감소하므로 최댓값은 $f(1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-5}=81$

**24. [출제의도] 급수의 성질 이해하기**

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{4}-9\right)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{4}-9\right)=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=36$

**25. [출제의도] 삼각함수의 미분법 이해하기**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+3h)-f(\pi)}{h}=3\times\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+3h)-f(\pi)}{3h}$$
$$=3f'(\pi)$$

$f'(x)=-\sin x-3\cos x$이므로 $f'(\pi)=3$

따라서 $3f'(\pi)=9$

**26. [출제의도] 미분계수 이해하기**

$\frac{1}{n}=h$라 하면, $n\to\infty$일 때, $h\to 0+$이다.

$$(\text{준식})=\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)g(1+3h)-f(1)g(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)g(1+3h)-f(1+h)g(1)}{h}$$
$$+\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)g(1)-f(1)g(1)}{h}$$
$$=3\times\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)\{g(1+3h)-g(1)\}}{3h}$$
$$+\lim_{h\to 0+}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}g(1)}{h}$$
$$=3f(1)g'(1)+f'(1)g(1)=27$$

**27. [출제의도] 수열의 극한을 활용하여 문제해결하기**

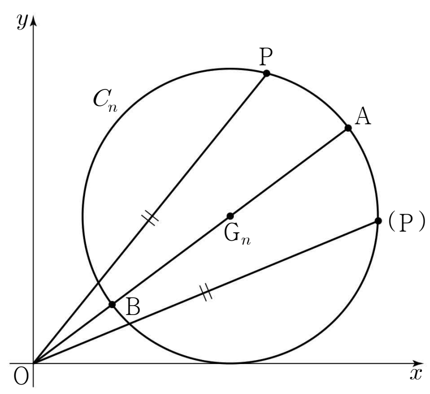
원 $C_n$은 $x$축에 접하는 원이므로 반지름의 길이는 $3n$이다. 원 $C_n$의 중심을 $\mathrm{G}_n(4n, 3n)$이라 하면

$\overline{\mathrm{OG}_n}=\sqrt{(4n)^2+(3n)^2}=5n$

그림과 같이 직선 $\mathrm{OG}_n$과 원 $C_n$이 만나는 점을 각각 A, B라 하면 선분 OP의 길이는

$\overline{\mathrm{OB}}\leq\overline{\mathrm{OP}}\leq\overline{\mathrm{OA}}$

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OG}_n}+3n=8n$, $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OG}_n}-3n=2n$




$\overline{\mathrm{OP}}=2n$ 또는 $\overline{\mathrm{OP}}=8n$일 때 점 P의 개수는 각각 1개이고, $2n+1\leq\overline{\mathrm{OP}}\leq 8n-1$일 때

선분 OP의 길이가 자연수인 점 P의 개수는 각각 2개이다.

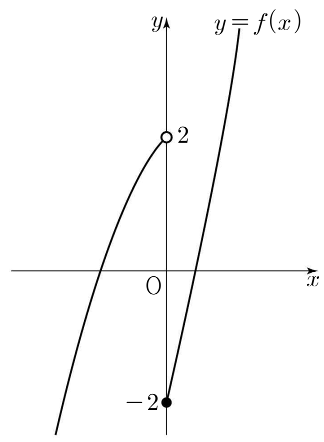
그러므로 구하는 점 P의 개수는

$2+2\times(6n-1)=12n$이므로 $a_n=12n$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^2}\times\frac{12n(n+1)}{2}\right\}=6$

**28. [출제의도] 함수의 극한 추론하기**

함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=0$에서 불연속이고 그 개형은 그림과 같다.




함수 $h(t)$에 대하여

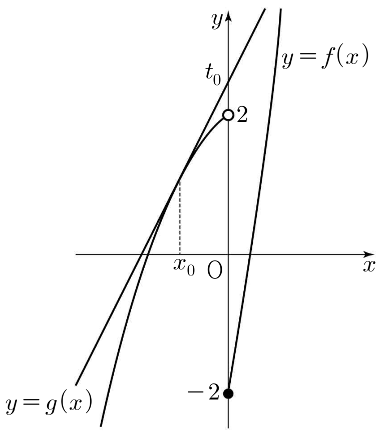
(i) $-2<t<2$일 때

$k$값에 관계없이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 2이므로 $h(t)=2$

(ii) $t \geq 2$일 때

$\lim\limits_{x \to 0-} f'(x)=3k$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 기울기가 2이므로

(a) $3k<2$이면 $f'(x_0)=2$인 $x=x_0(x_0<0)$가 존재한다.




즉, $x=x_0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 접할 때 $t=t_0$이라 하면,

$t=2$에서 $h(t)=2$

$2<t<t_0$에서 $h(t)=3$

$t=t_0$에서 $h(t)=2$

$t>t_0$에서 $h(t)=1$

(b) $3k \geq 2$이면 $t \geq 2$에서 $h(t)=1$

(iii) $t \leq -2$일 때

$\lim\limits_{x \to 0+} f'(x)=\dfrac{4}{3k}$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 기울기가 2이므로

(a) $\dfrac{4}{3k}<2$이면 $f'(x_1)=2$인 $x=x_1(x_1>0)$가 존재한다.

즉, $x=x_1$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 접할 때 $t=t_1$이라 하면,

$t_1<t \leq -2$ 에서 $h(t)=3$

$t=t_1$에서 $h(t)=2$

$t<t_1$에서 $h(t)=1$

(b) $\dfrac{4}{3k} \geq 2$이면

$t=-2$에서 $h(t)=2$

$t<-2$에서 $h(t)=1$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$k<\dfrac{2}{3}$일 때

$$h(t)=\begin{cases} 1 & (t<-2) \\ 2 & (-2 \leq t \leq 2) \\ 3 & (2<t<t_0) \\ 2 & (t=t_0) \\ 1 & (t>t_0) \end{cases}$$

$k>\dfrac{2}{3}$일 때

$$h(t)=\begin{cases} 1 & (t<t_1) \\ 2 & (t=t_1) \\ 3 & (t_1<t \leq -2) \\ 2 & (-2<t<2) \\ 1 & (t \geq 2) \end{cases}$$

$k=\dfrac{2}{3}$일 때

$$h(t)=\begin{cases} 1 & (t<-2) \\ 2 & (-2 \leq t<2) \\ 1 & (t \geq 2) \end{cases}$$

그러므로 함수 $h(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속이 되는 실수 $\alpha$의 개수가 2가 되도록 하는 $k=\dfrac{2}{3}$

따라서 $150k=100$

**29. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기**

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$이므로 $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$

$\tan 2\theta=\tan(\theta+\theta)=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{3}{4}$

$\angle\mathrm{CBA}=\alpha$라 하면 이등변삼각형 ABC에 의하여

$\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$이고, $\angle\mathrm{CBE}=\beta$라 하면

$\beta=\alpha-2\theta$이므로 $\tan\beta=\dfrac{\tan\alpha-\tan 2\theta}{1+\tan\alpha\tan 2\theta}=\dfrac{7}{24}$

$\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{\overline{\mathrm{FH}}}{\tan\beta}$, $\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{\overline{\mathrm{FH}}}{\tan\theta}$, $\overline{\mathrm{BH}}+\overline{\mathrm{CH}}=12$

$\overline{\mathrm{FH}}\left(\dfrac{1}{\tan\beta}+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)=12$에서 $\overline{\mathrm{FH}}=\dfrac{28}{15}$

따라서 $p=15$, $q=28$이므로 $p+q=43$

**30. [출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기**

$f'(x)=k(x+1)(x-1)=k(x^2-1)\ (k>0)$라 하면

$f(x)=\dfrac{k}{3}x^3-kx+C_0$(단, $C_0$은 적분상수)

함수 $f(x)$의 극대인 점 $(-1, f(-1))$과
극소인 점 $(1, f(1))$이 원 $C$ 위에 있으므로
두 점은 원점에 대하여 대칭이다.

$f(-1)=-f(1)$, $C_0=0$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

점 $(-1, f(-1))$이 원 $C$ 위에 있으므로

$(-1)^2+y^2=n$, $y=\sqrt{n-1}$

$f(-1)=\dfrac{k}{3}(-1)^3-k\times(-1)=\dfrac{2}{3}k=\sqrt{n-1}$

이므로 $k=\dfrac{3}{2}\sqrt{n-1}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{n-1}(x^3-3x)$

원 $C$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 영역 $S_2$와 영역 $S_3$ 내부에 있는 $x$좌표와 $y$좌표가 모두 정수인 점의 개수는 같다.

따라서 $g_2(n)=g_3(n)$

3보다 큰 자연수 $n$에 대하여 $x=-2$에서
원 $C$는 점 $(-2, \sqrt{n-4})$와
점 $(-2, -\sqrt{n-4})$를 지나고

$f(-2)=\dfrac{1}{2}\sqrt{n-1}(-8+6)=-\sqrt{n-1}$이므로

$-\sqrt{n-4}>-\sqrt{n-1}$

그러므로 점 $(-2, f(-2))$는 원 $C$ 외부의 점이다.

(i) $n=4$일 때

영역 $S_1$에는 $x$좌표와 $y$좌표가 모두 정수인 점은 존재하지 않고, 영역 $S_2$에는 $x$좌표와 $y$좌표가 모두 정수인 점은 $x=-1$과 $x=0$ 위에 존재한다.

$g_1(4)=0$, $g_2(4)=3+1=4$

(ii) $5 \leq n \leq 9$일 때

영역 $S_1$에는 $x$좌표와 $y$좌표가 모두 정수인 점은 $x=-2$ 위에 존재하고, 영역 $S_2$에는 $x$좌표와 $y$좌표가 모두 정수인 점은 $x=-1$과 $x=0$ 위에 존재한다.

$g_1(5)=1$, $g_2(5)=3+2=5$

$n=6$, 7, 8에서 $g_1(n)=3$, $g_2(n)=5+2=7$

$g_1(9)=5$, $g_2(9)=5+2=7$

(iii) $10 \leq n \leq 16$일 때

영역 $S_1$에는 $x$좌표와 $y$좌표가 모두 정수인 점은 $x=-3$과 $x=-2$ 위에 존재하고, 영역 $S_2$에는 $x$좌표와 $y$좌표가 모두 정수인 점은 $x=-1$과 $x=0$ 위에 존재한다.

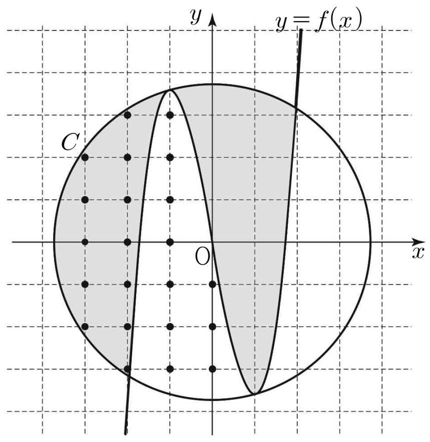
$g_1(10)=1+5=6$, $g_2(10)=5+3=8$

$n=11$, 12, 13에서

$g_1(n)=3+5=8$, $g_2(n)=7+3=10$

$n=14$, 15, 16에서

$g_1(n)=5+7=12$, $g_2(n)=7+3=10$




(i), (ii), (iii)에 의하여 $g_1(n)>g_3(n)$을 만족하는 자연수 $n$의 최솟값은 14

따라서

$a+\{g_1(a)\times g_3(a)\}=14+\{g_1(14)\times g_3(14)\}=134$