# 2018학년도 11월 고1 전국연합학력평가
# 정답 및 해설

## • 2교시 수학 영역 •

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | ④ | **2** | ③ | **3** | ⑤ | **4** | ② | **5** | ① |
| **6** | ① | **7** | ③ | **8** | ② | **9** | ⑤ | **10** | ⑤ |
| **11** | ① | **12** | ② | **13** | ④ | **14** | ⑤ | **15** | ④ |
| **16** | ① | **17** | ② | **18** | ② | **19** | ④ | **20** | ③ |
| **21** | ③ | **22** | 6 | **23** | 10 | **24** | 14 | **25** | 9 |
| **26** | 256 | **27** | 5 | **28** | 7 | **29** | 231 | **30** | 50 |

1. [출제의도] 다항식 계산하기

$A+B=(x^2+xy)+(x^2+7xy)=2x^2+8xy$

2. [출제의도] 항등식 이해하기

등식 $x^2+x+a=x^2+bx+6$이 $x$에 대한
항등식이므로 $a=6,\ b=1$
따라서 $a+b=7$

3. [출제의도] 복소수의 성질 이해하기

복소수 $5-i$의 켤레복소수가 $5+i$이므로
$5+i=a+bi$
$a$와 $b$는 실수이므로 $a=5,\ b=1$
따라서 $a\times b=5$

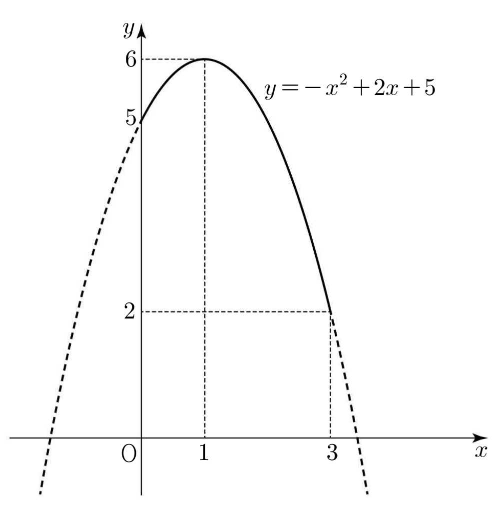
4. [출제의도] 합성함수의 값 계산하기

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2)=9$

5. [출제의도] 명제 추론하기

세 조건 $p,\ q,\ r$의 진리집합을 각각 $P,\ Q,\ R$라 하자.
명제 $q\to r$가 참이므로 대우 $\sim r\to\sim q$도 참이다.
그러므로 $R^C\subset Q^C$이고 명제 $p\to\sim r$가 참이므로
$P\subset R^C$
따라서 $P\subset R^C\subset Q^C$이 성립하므로 $P\subset Q^C$이다.
따라서 명제 $p\to\sim q$가 항상 참이다.

6. [출제의도] 이차함수 이해하기




$y=-x^2+2x+5=-(x-1)^2+6$의 그래프가
그림과 같으므로 $x=3$일 때 최솟값은 2

7. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기

$\begin{cases}2x-y=3 & \cdots ㉠\\ x^2-y=2 & \cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=2x-3$을 ㉡에 대입하면
$x^2-(2x-3)=2$
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
$\therefore\ x=1,\ y=-1$
따라서 $\alpha=1,\ \beta=-1$이므로 $\alpha+\beta=0$

8. [출제의도] 복소수 이해하기

$z=1+i$이므로 $z^2=(1+i)^2=2i$
$\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{1}{2i}=\dfrac{1\times i}{2i\times i}=-\dfrac{i}{2}$

9. [출제의도] 내분점을 활용하여 문제해결하기

변 BC의 중점을 M$(7,4)$라 하고, 삼각형 ABC의
무게중심을 G$(a,b)$라 하면 점 G는 선분 AM을
$2:1$로 내분하는 점이므로 점 G의 좌표는
$\left(\dfrac{2\times7+1\times1}{2+1},\ \dfrac{2\times4+1\times1}{2+1}\right)=(5,3)$
$\therefore\ a=5,\ b=3$
따라서 $a+b=8$

10. [출제의도] 다항식의 곱셈 이해하기

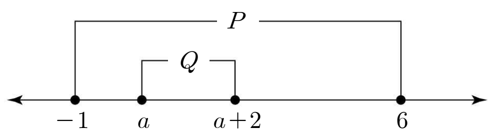
$a+b=X$라 하면
$(a+b-1)\{(a+b)^2+a+b+1\}$
$=(X-1)(X^2+X+1)$
$=X^3-1=8$
$\therefore\ X^3=9$
따라서 $(a+b)^3=9$

11. [출제의도] 인수정리 이해하기

다항식 $x^4-4x^2+a$가 $x-1$로 나누어떨어지므로
다항식 $x^4-4x^2+a$에 $x=1$을 대입하면 인수정리에
의해 $1-4+a=0$에서 $a=3$
다항식 $x^4-4x^2+3$을 $x-1$로 나눈 몫이 $Q(x)$이므로
$x^4-4x^2+3=(x-1)Q(x)$
$x=3$을 대입하면 $2Q(3)=3^4-4\times3^2+3=48$
따라서 $Q(a)=Q(3)=24$

12. [출제의도] 명제의 조건 이해하기

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면
$x^2-5x-6=(x+1)(x-6)\le0$에서 $-1\le x\le6$,
$(x-a)(x-a-2)\le0$에서 $a\le x\le a+2$이므로
$P=\{x\mid-1\le x\le6\},\ Q=\{x\mid a\le x\le a+2\}$이다.
$p$가 $q$이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$




$a\ge-1$ 이고 $a+2\le6$이므로 $-1\le a\le4$
따라서 모든 정수 $a$의 개수는 6

13. [출제의도] 이차함수를 활용하여 문제해결하기

선회 속도 $V_1$, 선회각 $30^\circ$로 선회 비행할 때의
선회 반경이 $R_1$이고, $\dfrac{1}{\tan30^\circ}=\sqrt{3}$이므로
$R_1=\dfrac{V_1^2}{g\tan30^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{g}\times V_1^2$
$V_1:V_2=2:3$이므로 $V_2=\dfrac{3}{2}V_1$
$R_2=\dfrac{V_2^2}{g\tan30^\circ}$
$=\dfrac{\sqrt{3}}{g}\times\left(\dfrac{3}{2}V_1\right)^2$
$=\dfrac{9}{4}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{g}\times V_1^2\right)=\dfrac{9}{4}R_1$
따라서 $\dfrac{R_1}{R_2}=\dfrac{4}{9}$

14. [출제의도] 절댓값을 포함한 부등식 이해하기

부등식 $|3x-1|<x+a$의 해는
(i) $x\ge\dfrac{1}{3}$일 때
$3x-1<x+a$
$x<\dfrac{a+1}{2}$
$a$가 양수이므로 $\dfrac{1}{3}\le x<\dfrac{a+1}{2}$
(ii) $x<\dfrac{1}{3}$일 때
$-3x+1<x+a$
$\dfrac{1-a}{4}<x$
$a$가 양수이므로 $\dfrac{1-a}{4}<x<\dfrac{1}{3}$
(i), (ii)에 의해 $\dfrac{1-a}{4}<x<\dfrac{a+1}{2}$
부등식 $|3x-1|<x+a$의 해가 $-1<x<3$이므로
$a=5$

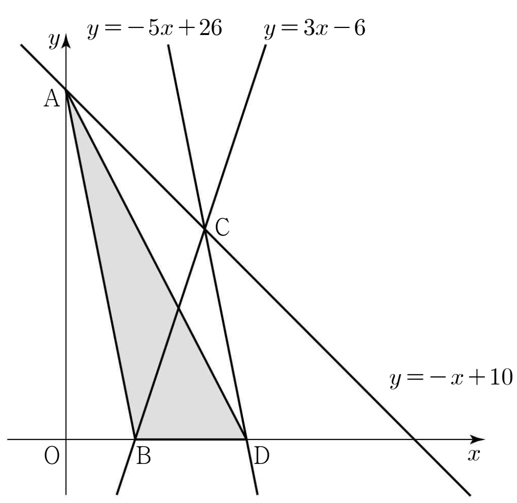
15. [출제의도] 도형의 평행이동 이해하기

직선 $3x+4y+17=0$을 $x$축의 방향으로 $n$만큼
평행이동한 직선의 방정식은
$3(x-n)+4y+17=0$
직선 $3x+4y-3n+17=0$이 원 $x^2+y^2=1$에
접하므로 원의 중심 $(0,0)$과
직선 $3x+4y-3n+17=0$ 사이의 거리가 1이다.
$\dfrac{|-3n+17|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$에서
$-3n+17=5$ 또는 $-3n+17=-5$
$\therefore\ n=4$ 또는 $n=\dfrac{22}{3}$
$n$은 자연수이므로 $n=4$

16. [출제의도] 인수분해를 활용하여 문제해결하기

$42=A$라 하면
$42\times(42-1)\times(42+6)+5\times42-5$
$=A(A-1)(A+6)+5A-5$
$=A(A-1)(A+6)+5(A-1)$
$=(A-1)\{A(A+6)+5\}$
$=(A-1)(A^2+6A+5)$
$=(A-1)(A+1)(A+5)$
$=41\times43\times47$
따라서 $p+q+r=41+43+47=131$

17. [출제의도] 직선의 방정식을 활용하여 문제해결하기




$x$축 위의 점 D$(a,0)(a>2)$에 대하여
삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ABD의 넓이가
같으려면 직선 AB와 점 C 사이의 거리와
직선 AB와 점 D 사이의 거리가 같아야 하므로
점 C를 지나고 직선 AB에 평행한 직선 위에
점 D가 있어야 한다.
직선 $y=-x+10$의 $y$절편이 10이므로

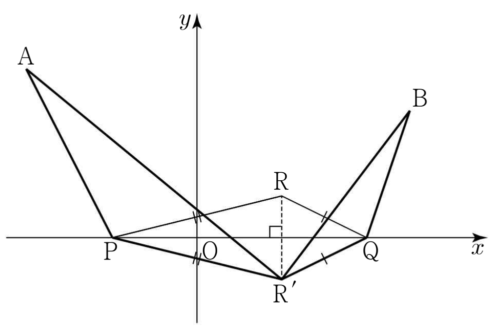
점 A의 좌표는 $(0,10)$이고
직선 $y=3x-6$의 $x$절편이 2이므로
점 B의 좌표는 $(2,0)$이다.
직선 AB의 기울기는 $\dfrac{0-10}{2-0}=-5$이고
두 직선 $y=-x+10$, $y=3x-6$의 교점 C의 좌표는 $(4,6)$이므로 점 C를 지나고 직선 AB에 평행한 직선의 방정식은
$y-6=-5(x-4)$, $y=-5x+26$
점 $\mathrm{D}(a,0)$이 직선 $y=-5x+26$ 위의 점이므로
$0=-5a+26$
따라서 $a=\dfrac{26}{5}$

**18. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 추론하기**

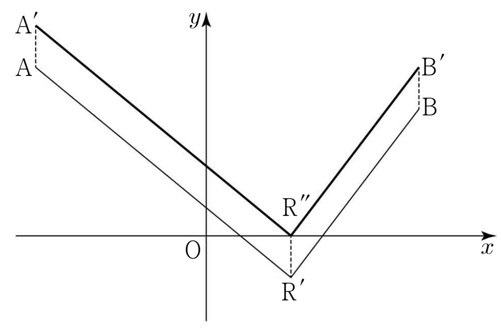
조건 (가)에 의해 $f(x)-g(x)$를 $x-2$로 나눈 몫과 나머지를 $a$라 하면
$f(x)-g(x)=(x-2)a+a=a(x-1)$
$x=1$을 대입하면 $f(1)-g(1)=0$ ⋯ ㉠
조건 (나)에 의해 $f(x)g(x)$를 $x^2-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $f(x)g(x)=(x^2-1)Q(x)$
$x=1$을 대입하면 $f(1)g(1)=0$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에 의해 $f(1)=g(1)=0$이다.
인수정리에 의하여 $f(x)$와 $g(x)$는 각각 $x-1$을 인수로 가지므로
$f(x)=(x-1)(x+p)$, $g(x)=(x-1)(x+q)$라 하자.
$g(4)=(4-1)(4+q)=3$이므로 $q=-3$
$g(x)=(x-1)(x-3)$
$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-3)(x+p)=(x^2-1)Q(x)$
$x=-1$을 대입하면
$(-2)^2\times(-4)\times(-1+p)=0$에서 $p=1$
$f(x)=(x-1)(x+1)$
따라서 $f(2)+g(2)=3+(-1)=2$

**19. [출제의도] 도형의 이동을 활용하여 문제해결하기**

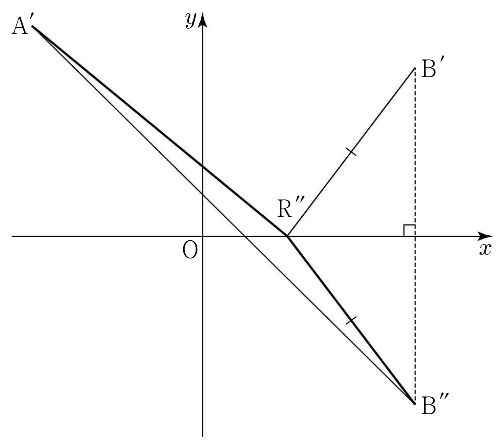
점 R는 직선 $y=1$ 위에 있으므로 점 R의 좌표를 $(a,1)$이라 하자. 점 R를 $x$축에 대하여 대칭이동한 점을 R$'$이라 하면 점 R$'$의 좌표는 $(a,-1)$이다.




그림과 같이
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PR'}}\geq\overline{\mathrm{AR'}}$,
$\overline{\mathrm{RQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{R'Q}}+\overline{\mathrm{QB}}\geq\overline{\mathrm{R'B}}$이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{RQ}}+\overline{\mathrm{QB}}\geq\overline{\mathrm{AR'}}+\overline{\mathrm{R'B}}$
$\overline{\mathrm{AR'}}+\overline{\mathrm{R'B}}$의 값은 점 $\mathrm{R'}(a,-1)$의 위치에 따라 변하므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{RQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AR'}}+\overline{\mathrm{R'B}}$의 최솟값과 같다.
세 점 $\mathrm{A}(-4,4)$, $\mathrm{B}(5,3)$, $\mathrm{R'}(a,-1)$을 $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점을 각각 A$'$, B$'$, R$''$이라 하면 $\mathrm{A'}(-4,5)$, $\mathrm{B'}(5,4)$, $\mathrm{R''}(a,0)$이고
$\overline{\mathrm{AR'}}+\overline{\mathrm{R'B}}=\overline{\mathrm{A'R''}}+\overline{\mathrm{R''B'}}$이다.




점 B$'$을 $x$축에 대하여 대칭이동한 점을 B$''$이라 하면 점 B$''$의 좌표는 $(5,-4)$이다.
$\overline{\mathrm{A'R''}}+\overline{\mathrm{R''B'}}=\overline{\mathrm{A'R''}}+\overline{\mathrm{R''B''}}\geq\overline{\mathrm{A'B''}}$
이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{RQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A'B''}}$과 같다.




점 $\mathrm{A'}(-4,5)$이고 점 $\mathrm{B''}(5,-4)$에 대하여
$\overline{\mathrm{A'B''}}=\sqrt{\{5-(-4)\}^2+(-4-5)^2}=9\sqrt{2}$
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{RQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값은 $9\sqrt{2}$

**20. [출제의도] 집합의 원소 추론하기**

ㄱ. $A\cap B=\{2,5\}$에서 $2\in A$, $5\in A$
2와 5가 $k$의 약수이므로 $k$는 10의 배수이다.
$k$는 18 이하의 자연수이므로 $k=10$ (참)

ㄴ. $A\cap B=\{5,6\}$에서 $5\in A$, $6\in A$
5와 6이 $k$의 약수이므로 $k$는 30의 배수이다.
$k$는 18 이하의 자연수이므로 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. (i) $A\cap B=\{2,5\}$일 때,
$k=10$이고 $A=\{1,2,5,10\}$이므로
집합 $A-B=\{1,10\}$의 모든 원소의 합은 11
(ii) $A\cap B=\{2,6\}$일 때, $2\in A$, $6\in A$
2와 6이 $k$의 약수이므로 $k$는 6의 배수이다.
$k$는 18 이하의 자연수이므로
가능한 $k$는 6, 12, 18이다.

$k=6$인 경우,
$A=\{1,2,3,6\}$이므로
집합 $A-B=\{1,3\}$의 모든 원소의 합은 4

$k=12$인 경우,
$A=\{1,2,3,4,6,12\}$이므로 집합
$A-B=\{1,3,4,12\}$의 모든 원소의 합은 20

$k=18$인 경우,
$A=\{1,2,3,6,9,18\}$이므로 집합
$A-B=\{1,3,9,18\}$의 모든 원소의 합은 31

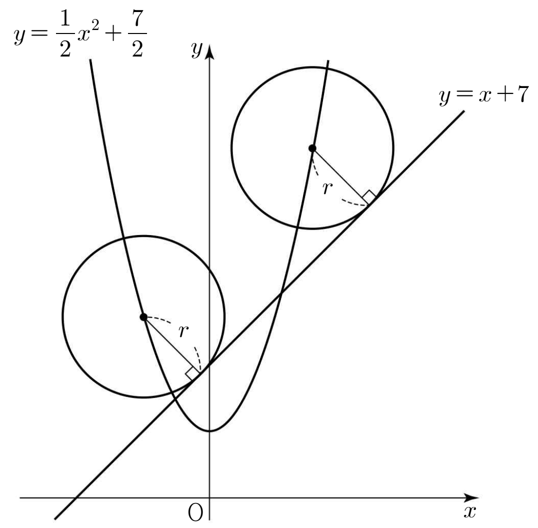
∴ 집합 $A-B$의 모든 원소의 합이 홀수가 되는 모든 $k$의 값의 합은 $10+18=28$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

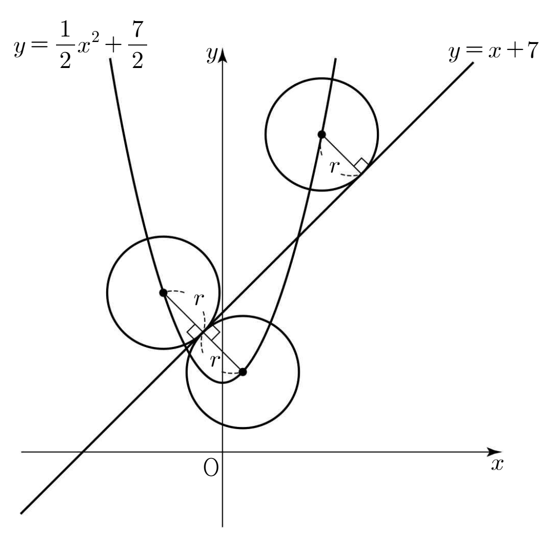
**21. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제해결하기**

반지름의 길이가 $r$이고 중심이 이차함수 $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{7}{2}$의 그래프 위에 있는 원 중에서 직선 $y=x+7$에 접하는 원의 개수 $m$은 반지름 $r$의 길이에 따라 다음과 같은 세 가지 경우가 있다.

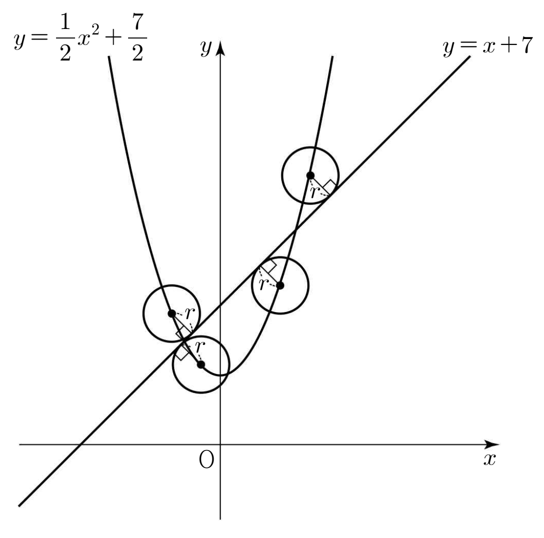
(i) $m=2$일 때,



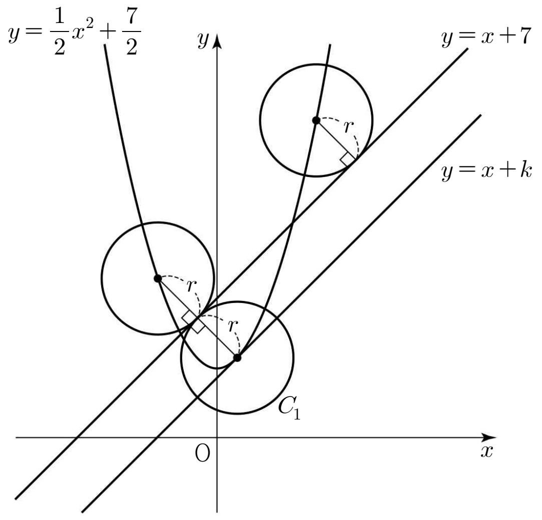

(ii) $m=3$일 때,




(iii) $m=4$일 때,




이 중 $m$이 홀수인 경우는 $m=3$일 때이므로 직선 $y=x+7$에 접하는 원 중 직선 $y=x+7$의 아래쪽에 위치한 원이 한 개일 때이다.




이 원을 $C_1$이라 하면 원 $C_1$의 반지름의 길이 $r$는

이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선과 직선 $y=x+7$ 사이의 거리와 같다.

이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}$의 그래프에 접하고

기울기가 1인 직선을 $y=x+k$라 하면

이차방정식 $\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}=x+k$가 중근을 가져야하므로

$x^2-2x+7-2k=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=2^2-4\times1\times(7-2k)=0$에서 $k=3$

두 직선 $y=x+7$과 $y=x+3$ 사이의 거리는

직선 $y=x+3$ 위의 점 $(0, 3)$과 직선 $y=x+7$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-3+7|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

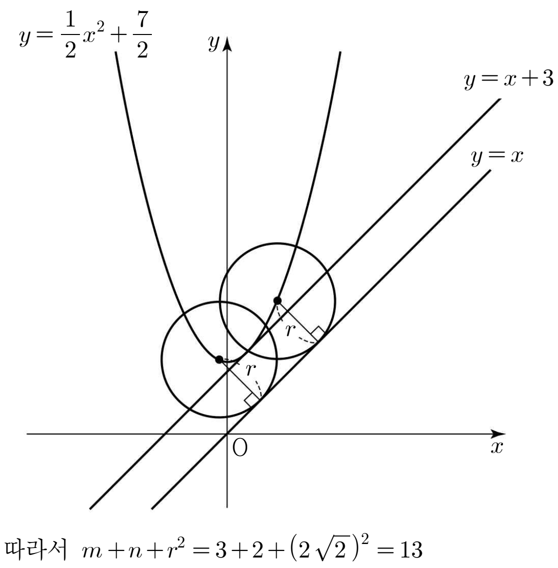
$\therefore\ r=2\sqrt{2}$

직선 $y=x$와 직선 $y=x+3$ 사이의 거리는

직선 $y=x$ 위의 점 $(0, 0)$과 직선 $y=x+3$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$r=2\sqrt{2}>\frac{3\sqrt{2}}{2}$이므로 $n=2$




따라서 $m+n+r^2=3+2+(2\sqrt{2})^2=13$

**22. [출제의도] 집합 이해하기**

$A^C=\{1, 2, 3\}$이므로

집합 $A^C$의 모든 원소의 합은

$1+2+3=6$

**23. [출제의도] 함수 이해하기**

함수 $f$의 치역은 $\{4, 6\}$

따라서 치역의 모든 원소의 합은 $4+6=10$

**24. [출제의도] 선분의 외분점 이해하기**

$\mathrm{A}(-2, 0)$, $\mathrm{B}(0, 7)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표는 $(2, a)$이므로

$a=\frac{2\times7-1\times0}{2-1}=14$

**25. [출제의도] 명제 이해하기**

$f(x)=x^2+6x+k$라 하자.

함수 $y=f(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같으면

모든 실수 $x$에 대하여 $x^2+6x+k\ge0$이다.

$f(x)=(x+3)^2+k-9$는

$x=-3$일 때 최솟값 $k-9$를 갖는다.

$k-9\ge0$

$\therefore\ k\ge9$

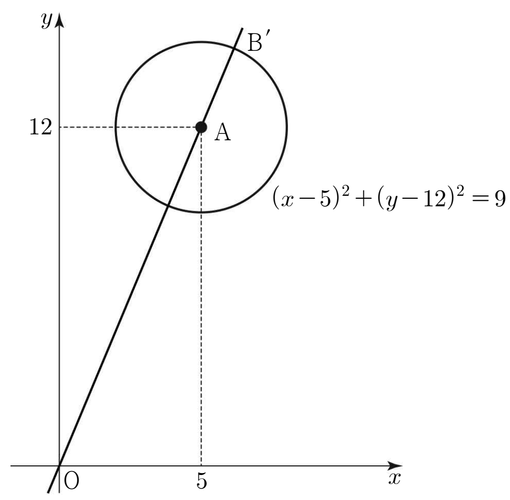
따라서 $k$의 최솟값은 9

**26. [출제의도] 원의 성질을 활용하여 문제해결하기**

두 점 $\mathrm{A}(5, 12)$, $\mathrm{B}(a, b)$에 대하여 선분 AB의 길이가 3이므로

$\sqrt{(a-5)^2+(b-12)^2}=3$

$(a-5)^2+(b-12)^2=9$




점 B는 원 $(x-5)^2+(y-12)^2=9$ 위의 점이다.

원점 O에 대하여 $a^2+b^2=\overline{\mathrm{OB}}^2$이므로

$\overline{\mathrm{OB}}$의 길이가 최대일 때 $a^2+b^2$이 최댓값을 갖는다.

직선 OA가 원과 만나는 두 점 중 원점에서 더 멀리 있는 점을 B′라 하면 선분 OB의 길이의 최댓값은 선분 OB′의 길이와 같다.

$\overline{\mathrm{OB'}}=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB'}}$

$=\sqrt{5^2+12^2}+3$

$=\sqrt{169}+3$

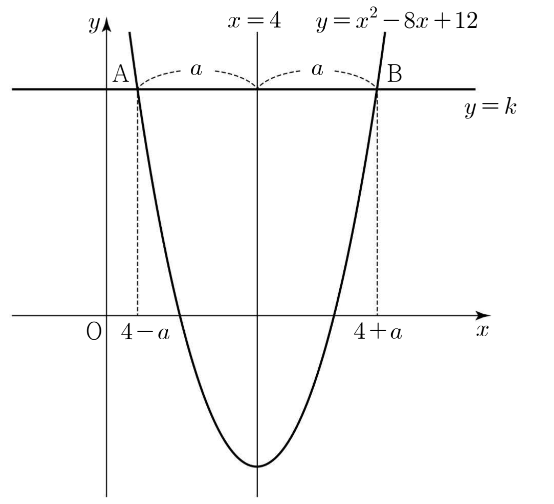
$=13+3$

$=16$

선분 OB의 길이의 최댓값은 16

따라서 $a^2+b^2$의 최댓값은 $16^2=256$

**27. [출제의도] 이차함수를 활용하여 문제해결하기**




$y=x^2-8x+12=(x-4)^2-4$이므로

이차함수 $y=x^2-8x+12$의 그래프는

직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

두 점 A, B의 좌표를 $(4-a, k)$, $(4+a, k)$라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=2a$

점 $\mathrm{A}(4-a, k)$가 이차함수 $y=(x-4)^2-4$ 위의 점이므로 $k=a^2-4$ ⋯ ㉠

삼각형 AOB의 넓이가 15이므로

$\frac{1}{2}\times2a\times k=ak=15$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a(a^2-4)=15$, $a^3-4a-15=0$

조립제법을 이용하여 $a^3-4a-15$를 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 0 | $-4$ | $-15$ |
| | | 3 | 9 | 15 |
| | 1 | 3 | 5 | 0 |

$(a-3)(a^2+3a+5)=0$

$a^2+3a+5>0$이므로 $a=3$

따라서 $k=5$

**28. [출제의도] 함수의 성질을 이용하여 추론하기**

조건 (가)에서 함수 $f$의 치역의 원소의 개수가 7이므로 집합 $X$의 서로 다른 두 원소 $a$, $b$에 대하여 $f(a)=f(b)=n$을 만족하는 집합 $X$의 원소 $n$은 한 개 있다. 이때 집합 $X$의 원소 중 함숫값으로 사용되지 않은 원소를 $m$이라 하자.

$1+2+3+4+5+6+7+8=36$이므로

조건 (나)에서

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)$

$=36+n-m=42$

$\therefore\ n-m=6$

집합 $X$의 원소 $n$, $m$에 대하여 $n-m=6$인 경우는 다음 두 가지이다.

(ⅰ) $n=8$, $m=2$일 때

함수 $f$의 치역은 $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로

조건 (다)를 만족시키지 않는다.

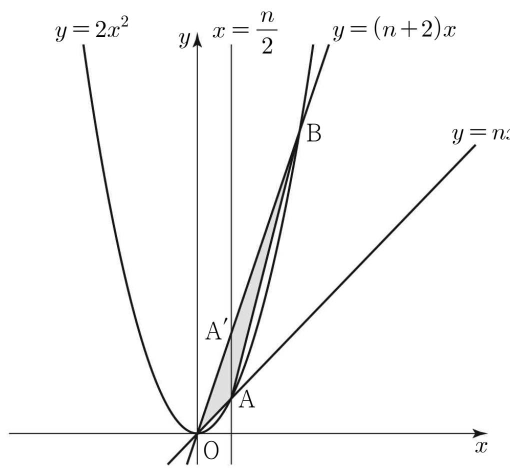
(ⅱ) $n=7$, $m=1$일 때

함수 $f$의 치역은 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로

조건 (다)를 만족시킨다.

따라서 $n=7$

29. [출제의도] 이차함수와 이차방정식의 관계를 이용하여 추론하기




점 A는 이차함수 $y=2x^2$의 그래프와 직선 $y=nx$의 교점이다.

$2x^2=nx$에서 $x\neq 0$이므로 $x=\frac{n}{2}$

$\therefore$ 점 A의 좌표는 $\left(\frac{n}{2}, \frac{n^2}{2}\right)$

점 B는 이차함수 $y=2x^2$의 그래프와 직선 $y=(n+2)x$의 교점이다.

$2x^2=(n+2)x$에서 $x\neq 0$이므로 $x=\frac{n+2}{2}$

$\therefore$ 점 B의 좌표는 $\left(\frac{n+2}{2}, \frac{(n+2)^2}{2}\right)$

점 A를 지나고 $x$축에 수직인 직선이 직선 $y=(n+2)x$와 만나는 점을 A′이라 하자.

점 A′의 좌표는 $\left(\frac{n}{2}, \frac{n^2+2n}{2}\right)$

선분 AA′의 길이는

$\overline{\mathrm{AA'}}=\boxed{\frac{n^2+2n}{2}}-\frac{n^2}{2}=n$

삼각형 OAB의 넓이 $S(n)$은 삼각형 OAA′의 넓이와 삼각형 ABA′의 넓이의 합이므로

$$S(n)=\frac{1}{2}\times n\times\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\times n\times\left(\frac{n+2}{2}-\frac{n}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times n\times\left(\boxed{\frac{n}{2}+1}\right)$$
$$=\frac{n(n+2)}{4}>100$$

부등식 $n(n+2)>400$의 양변에 1을 더하면

$(n+1)^2>401$

$n+1>\sqrt{401}$

$20<\sqrt{401}<21$이므로 $\sqrt{401}=20+\alpha\,(0<\alpha<1)$

$\therefore\ n>\sqrt{401}-1=(20+\alpha)-1=19+\alpha$

따라서 $S(n)>100$을 만족시키는 자연수 $n$의 최솟값은 $\boxed{20}$이다.

$f(n)=\frac{n^2+2n}{2}$, $g(n)=\frac{n}{2}+1$, $k=20$이므로

$f(k)+g(k)=f(20)+g(20)=220+11=231$

30. [출제의도] 합성함수와 역함수를 이용하여 추론하기

함수 $f$는 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.

조건 (가)에서 $x=1$, 2, 6일 때

$f(f(x))+f^{-1}(x)=2x$이므로

(ⅰ) $x=1$일 때,

$f(f(1))+f^{-1}(1)=2$이고

$f(f(1))\in X$, $f^{-1}(1)\in X$이므로

$f(f(1))=f^{-1}(1)=1$

$\therefore\ f(1)=1$

(ⅱ) $x=2$일 때,

$f(f(2))+f^{-1}(2)=4$이고

$f(f(2))\in X$, $f^{-1}(2)\in X$이므로

$f(f(2))=1$이면 $f(2)=1$이므로 함수 $f$가 일대일대응인 것에 모순이다.

$f^{-1}(2)=1$이면 $f(1)=2$이므로 $f(1)=1$에 모순이다.

따라서 $f(f(2))=f^{-1}(2)=2$

$\therefore\ f(2)=2$

(ⅲ) $x=6$일 때,

$f(6)\neq 6$, $f(f(6))+f^{-1}(6)=12$이고

$f(f(6))\in X$, $f^{-1}(6)\in X$이므로

$f(f(6))=7$, $f^{-1}(6)=5$ 또는 $f(f(6))=5$, $f^{-1}(6)=7$

$f(f(6))=7$, $f^{-1}(6)=5$인 경우

$f(5)=6$이고 $f(3)+f(5)=10$이므로 $f(3)=4$

$f(6)=a$라 하면 $f(a)=7$이므로 $a=6$ 또는 $a=7$

$f(6)\neq 6$이므로 $a\neq 6$

$a=7$이면 $f(6)=7$이고 $f(f(6))=7$에서 $f(7)=7$이므로 함수 $f$가 일대일대응인 것에 모순이다.

$f(f(6))=5$, $f^{-1}(6)=7$인 경우

$f(7)=6$이고 $f(3)+f(5)=10$이므로

$f(3)=3$, $f(5)=7$ 또는 $f(3)=7$, $f(5)=3$

따라서 $f(6)=4$ 또는 $f(6)=5$

$f(6)=5$이면 $f(f(6))=5$에서 $f(f(6))=f(5)=5$이므로 함수 $f$가 일대일대응인 것에 모순이다.

$f(6)=4$이면 $f(4)=5$이고 $f(f(6))=f(4)=5$이다.
이때 함수 $f$는 주어진 조건을 모두 만족한다.

따라서 $f(4)=5$, $f(6)=4$, $f(7)=6$이므로

$f(4)\times\{f(6)+f(7)\}=5\times(4+6)=50$