2019학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 가형 정답 및 풀이

01. ⑤	02. ②	03. ②	04. ④	05. ④
06. ①	07. ④	08. ③	09. ②	10. ④
11. ⑤	12. ②	13. ④	14. ③	15. ①
16. ③	17. ②	18. ⑤	19. ①	20. ③
21. ⑤	22. 9	23. 1	24. 80	25. 3
26. 10	27. 14	28. 89	29. 12	
30. 30				

1. **출제의도** : 성분으로 나타내어진 벡터의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}2\vec{a}-\vec{b}&=2(4,1)-(3,-2)\\&=(8,2)-(3,-2)\\&=(5,4)\end{aligned}$$

그러므로 모든 성분의 합은 9이다.

정답 ⑤

2. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x(x^2+2)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\times\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2+2}$$

$$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

정답 ②

3. **출제의도** : 좌표공간에서 선분의 외분점을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 $\mathrm{A}(3,\ 5,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 3,\ -2)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$으로 외분하는 점의 좌표가 $(a,\ -1,\ -6)$이므로

$$\frac{3\times4-2\times3}{3-2}=a$$

따라서

$a=6$

정답 ②

4. **출제의도** : 확률의 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cup B^C)&=\mathrm{P}\left((A\cap B)^C\right)\\&=1-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=1-\{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B^C)\}\\&=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\\&=1-\frac{3}{10}\\&=\frac{7}{10}\end{aligned}$$

정답 ④

5. **출제의도** : 포물선의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y^2=4\times2\times x$에서

$\mathrm{F}(2,0)$이고, 준선은 직선 $x=-2$이다.

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}=4$이므로

점 P의 x좌표는 2이다.
즉 $a=2$
$b^2=8\times2=16$
$b>0$이므로 $b=4$
따라서
$a+b=2+4=6$

정답 ④

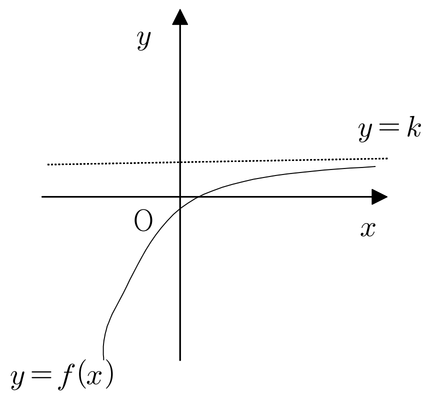
6. 출제의도 : 역함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$f(e)=3e$이므로 $g(3e)=e$
함수 $f(x)=3x\ln x$에서
$$f'(x)=3\ln x+3x\times\frac{1}{x}$$
$$=3\ln x+3$$
이므로
$f'(e)=3\ln e+3=6$
한편, $f(g(x))=x$에서
$f'(g(x))g'(x)=1$
$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$
이므로
$$g'(3e)=\frac{1}{f'(g(3e))}=\frac{1}{f'(e)}=\frac{1}{6}$$
따라서
$$\lim_{h\to0}\frac{g(3e+h)-g(3e-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{g(3e+h)-g(3e)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{g(3e-h)-g(3e)}{-h}$$
$$=g'(3e)+g'(3e)$$
$$=2g'(3e)$$
$$=2\times\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{3}$$

정답 ①

7. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 대칭이동과 평행이동을 이용하여 그릴 수 있는가?

정답풀이 :
$$f(x)=-2^{4-3x}+k$$
$$=-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-\frac{4}{3}}+k$$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시킨 후 x축의 방향으로 $\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동시킨 것이다.
한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않아야 하므로 그 개형은 다음과 같다.



이때, $f(0)\le0$이어야 하므로
$-2^4+k\le0$
$k\le16$
따라서, k의 최댓값은 16이다.

정답 ④

8. **출제의도** : 이항정리를 이용하여 주어진 다항식의 전개식에서 조건을 만족시키는 k의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(x+2)^{19}$의 일반항은

${}_{19}\mathrm{C}_r 2^{19-r} x^r$ $(r=0, 1, 2, \cdots, 19)$

x^k의 계수는 ${}_{19}\mathrm{C}_k 2^{19-k}$

x^{k+1}의 계수는 ${}_{19}\mathrm{C}_{k+1} 2^{18-k}$

${}_{19}\mathrm{C}_k 2^{19-k} > {}_{19}\mathrm{C}_{k+1} 2^{18-k}$에서

${}_{19}\mathrm{C}_k \times 2 > {}_{19}\mathrm{C}_{k+1}$

$$\frac{19!}{k!(19-k)!}\times 2 > \frac{19!}{(k+1)!(18-k)!}$$

$$\frac{2}{19-k} > \frac{1}{k+1}$$

$3k > 17$에서 $k > \frac{17}{3}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다.

정답 ③

9. **출제의도** : 정적분을 활용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 함수 $y=2^x-1$, $y=\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$의 교점은 $(0, 0)$, $(1, 1)$이다.

이때, $0 \le x \le 1$에서 $\sin\frac{\pi}{2}x \ge 2^x-1$이므로 두 곡선 $y=2^x-1$, $y=\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^1 \left\{\sin\frac{\pi}{2}x-(2^x-1)\right\}dx$$

$$=\int_0^1 \left(\sin\frac{\pi}{2}x-2^x+1\right)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{2^x}{\ln 2}+x\right]_0^1$$

$$=\left(-\frac{2}{\ln 2}+1\right)-\left(-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\ln 2}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\ln 2}+1$$

정답 ②

10. **출제의도** : 좌표평면 위를 움직이는 점의 속력의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$x=3t-\sin t$, $y=4-\cos t$이므로

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

$$=(3-\cos t, \sin t)$$

그러므로 속력은

$$|\vec{v}|=\sqrt{(3-\cos t)^2+\sin^2 t}$$

$$=\sqrt{10-6\cos t}$$

이때, $-1 \le \cos t \le 1$이므로 속력의 최댓값 M은 $\cos t=-1$일 때

$M=4$

또, 속력의 최솟값 m은 $\cos t=1$일 때

$m=2$

따라서,

$M+m=4+2=6$

정답 ④

11. **출제의도** : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$e^y\ln x=2y+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$e^y\frac{dy}{dx}\times\ln x+e^y\times\frac{1}{x}=2\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{e^y}{x(e^y\ln x-2)} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $x=e, y=0$을 대입하면

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{e(1\times1-2)}=\frac{1}{e}$$

곡선 위의 점 $(e,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$$y-0=\frac{1}{e}(x-e),\ 즉\ y=\frac{1}{e}x-1$$

따라서 $a=\frac{1}{e}$, $b=-1$이므로

$$ab=\frac{1}{e}\times(-1)=-\frac{1}{e}$$

정답 ⑤

12. **출제의도** : 삼수선의 정리를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{\mathrm{PH}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{PQ}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$ 이므로

삼수선의 정리에 의해

$\overline{\mathrm{HQ}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

점 H가 삼각형 ABC의 무게중심이고, 삼각형 ABC의 넓이가 24이므로

삼각형 ABH의 넓이에서

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{HQ}}=\frac{1}{3}\times24$$

$$\frac{1}{2}\times8\times\overline{\mathrm{HQ}}=\frac{1}{3}\times24$$

$\overline{\mathrm{HQ}}=2$

따라서 직각삼각형 PHQ에서

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PH}}^2+\overline{\mathrm{HQ}}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$$

정답 ②

13. **출제의도** : 표본평균의 분포를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

확률의 총합이 1이므로

$$\frac{1}{6}+a+b=1$$

$$a+b=\frac{5}{6} \qquad \text{-----}㉠$$

또, $\mathrm{E}(X^2)=\frac{16}{3}$이므로

$$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+2^2\times a+4^2\times b=\frac{16}{3}$$

$$a+4b=\frac{4}{3} \qquad \text{------}㉡$$

㉠과 ㉡을 연립하면

$$a=\frac{2}{3},\quad b=\frac{1}{6}$$

그러므로 확률변수 X의 확률분포는 다음과 같다.

X	0	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

이때, X의 평균은

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+2\times\frac{2}{3}+4\times\frac{1}{6}$$
$$=2$$

그러므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{16}{3}-2^2=\frac{4}{3}$$

이때, 모집단에서 크기가 20인 표본의 표본평균이 $\overline{X}$이므로

$$\mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{1}{20} \times \mathrm{V}(X)$$
$$= \frac{1}{20} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{15}$$

정답 ④

14. 출제의도 : 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = \cos^2\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$
$$= \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$
$$= \cos^2\left\{\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right\} - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$
$$= \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$
$$= 1 - \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t$로 놓으면

$-1 \leq t \leq 1$

이때

$$y = -t^2 - t + k + 1$$
$$= -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + k + \frac{5}{4}$$

$t = -\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $k + \frac{5}{4}$,

$t = 1$일 때 최솟값 $k - 1$을 갖는다.

따라서 $k + \frac{5}{4} = 3$에서 $k = \frac{7}{4}$이고,

$m = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}$이므로

$$k + m = \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{2}$$

정답 ③

15. 출제의도 : 독립시행의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

동전 A를 세 번 던져 나온 3개의 수의 합은 3, 4, 5, 6 중 하나이고,
동전 B를 네 번 던져 나온 4개의 수의 합은 12, 13, 14, 15, 16 중 하나이다.

(ⅰ) 7개의 수의 합이 19인 경우

두 동전을 각각 던졌을 때 나온 눈의 수의 합을 각각 a, b라 하면 7개의 수의 합이 19인 경우를 순서쌍 (a, b)로 나타내면 다음과 같다.

(3, 16), (4, 15), (5, 14), (6, 13)

이때의 확률은

$$= {}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$+ {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^7 + 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 + 18 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7$$
$$= \frac{35}{128}$$

(ⅱ) 7개의 수의 합이 20인 경우

두 동전을 각각 던졌을 때 나온 눈의 수의 합을 각각 a, b라 하면 7개의 수의 합이 20인 경우를 순서쌍 (a, b)로 나타내면 다음과 같다.

(4, 16), (5, 15), (6, 14)

이때의 확률은

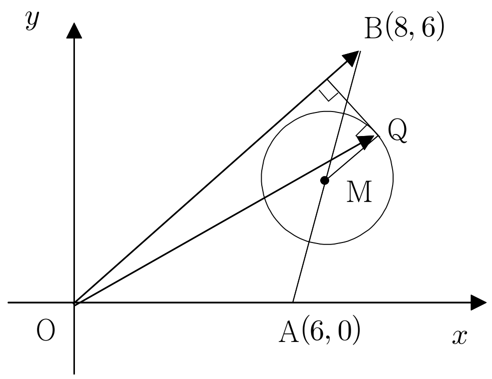
$$= {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$+ {}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$= 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 + 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 + 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7$$
$$= \frac{21}{128}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서
구하는 확률은
$\frac{35}{128}+\frac{21}{128}=\frac{7}{16}$

정답 ①

16. 출제의도 : 위치벡터의 연산을 이해하고 벡터의 내적을 활용할 수 있는가?

정답풀이 :
$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{10}$에서
$2|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{10}$
$|\overrightarrow{PM}|=\frac{\sqrt{10}}{2}$
그러므로 점 P는 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{10}}{2}$인 원 위의 점이다.
이 원을 C라 하자.
한편, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대이기 위해서는 그림과 같이 직선 OB에 수직인 직선이 원 C와 접하는 점 중 선분 OP의 길이가 가장 클 때의 점이다.
그러므로 점 Q는 그림과 같다.



한편, 직선 OB에 수직이고 점 Q를 지나는 직선과 직선 MQ는 수직이므로
$\overline{OB}/\!/\overline{MQ}$
그러므로 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MQ}$가 이루는 각의 크기는 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기와 같다.
두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MQ}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$
에서
$(6,0)\cdot(8,6)=\sqrt{6^2+0^2}\sqrt{8^2+6^2}\cos\theta$
$48=6\times10\times\cos\theta$
$\cos\theta=\frac{4}{5}$
따라서, $|\overrightarrow{OA}|=6$, $|\overrightarrow{MQ}|=\frac{\sqrt{10}}{2}$이므로
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{MQ}|\cos\theta$
$=6\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times\frac{4}{5}$
$=\frac{12\sqrt{10}}{5}$

정답 ③

17. 출제의도 : 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
25명을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{x_1}$이므로
모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은
$\overline{x_1}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{25}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{25}}$
$\overline{x_1}-1.96\le m\le\overline{x_1}+1.96$
즉 $\overline{x_1}=80$, $a=1.96$
또, n명을 임의 추출하여 구한 표본평균이 $\overline{x_2}$이므로
모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}$

따라서 $\overline{x_2}=\frac{15}{16}\overline{x_1}=\frac{15}{16}\times80=75$이고,

$1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=\frac{5}{7}a=\frac{5}{7}\times1.96$에서 $n=49$

즉 $n+\overline{x_2}=49+75=124$

정답 ②

18. 출제의도 : 집합의 분할의 수를 이용하여 함수의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) 공역 X의 원소 중 짝수인 원소가 2개이므로 집합 A의 네 원소 중 세 원소는 홀수이고 한 원소는 짝수이다.
따라서 집합 X의 원소 중에서 집합 A의 네 원소를 택하는 경우의 수는 2이다.

(ⅱ) 정의역 X를 4개의 부분집합으로 분할할 때, 4개의 부분집합의 원소의 개수는 각각 2, 1, 1, 1이 되어야 한다.
따라서 집합 X를 4개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수는

${}_5C_2\times{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{3!}=\boxed{10}$이다.

(ⅲ) (ⅰ)과 (ⅱ)의 각 경우에 대하여 집합 X를 분할한 4개의 부분집합을 집합 A의 네 원소에 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $4!=\boxed{24}$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $2\times10\times24=\boxed{480}$이다.

이상에서 (가), (나), (다) 이므로
$a=10,\ b=24,\ c=480$
따라서
$a+b+c=10+24+480=514$

정답 ⑤

19. 출제의도 : 지수함수와 삼각함수의 극한에 관련된 내적문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

호 PQ의 길이가 π이므로 $\angle POQ=\theta$라 하면

$2^n\times\theta=\pi$

$\theta=\frac{\pi}{2^n}$

한편,
$\overline{OQ}=\overline{OP}=2^n$
또, 직각삼각형
$\overline{HP}=\overline{OP}-\overline{OH}$
$=2^n-2^n\cos\frac{\pi}{2^n}$
$=2^n\left(1-\cos\frac{\pi}{2^n}\right)$

그러므로
$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{OQ}\times\overline{HP}\right)$
$=\lim_{n\to\infty}\left\{2^n\times2^n\left(1-\cos\frac{\pi}{2^n}\right)\right\}$ ---㉠

이때, $\frac{\pi}{2^n}=t$로 놓으면 $n\to\infty$일 때, $t\to0+$이므로 ㉠은

$\lim_{t\to0+}\frac{\pi^2(1-\cos t)}{t^2}$

$=\pi^2\lim_{t\to0+}\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{t^2(1+\cos t)}$

$=\pi^2\lim_{t\to0+}\frac{\sin^2 t}{t^2(1+\cos t)}$

$=\pi^2\times\lim_{t\to0+}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\times\lim_{t\to0+}\frac{1}{1+\cos t}$

$=\pi^2\times1^2\times\frac{1}{2}=\frac{\pi^2}{2}$

정답 ①

20. **출제의도** : 미분을 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ.

함수 $f(x)=\cos x+2x\sin x$에서

$$f'(x)=-\sin x+2\sin x+2x\cos x$$
$$=\sin x+2x\cos x$$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가지므로

$f'(\alpha)=0$에서

$\sin\alpha+2\alpha\cos\alpha=0$

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2\alpha$

$\tan\alpha=-2\alpha$

따라서

$\tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha=-2\alpha$ (참)

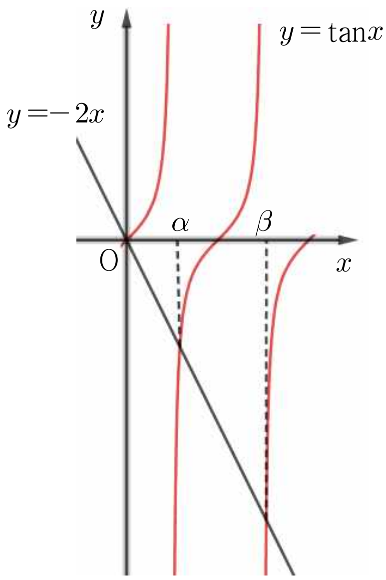
ㄴ.

$f'(x)=0$에서

$\tan x=-2x$

이때, $f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$이므로

열린 구간 $(0, 2\pi)$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-2x$가 만나는 점의 x좌표가 $x=\alpha$, $x=\beta$이다.



이때, $\tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha$이므로

$\tan'(\alpha+\pi)=\tan'\alpha$

한편, $\alpha<\beta$이고, 함수 $y=\tan x$는 열린 구간 $\left(\dfrac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$에서 증가하므로

$\tan'(\alpha+\pi)<\tan'\beta$

따라서 $g'(\alpha+\pi)<g'(\beta)$ (참)

ㄷ.

함수 $f(x)$가 $x=\beta$에서 극값을 가지므로

$f'(\beta)=0$에서

$\sin\beta+2\beta\cos\beta=0$

$\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=-2\beta$

$\tan\beta=-2\beta$

이때, $\tan(\beta-\pi)=-2\beta$이므로

$\dfrac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}=\dfrac{-2\alpha-(-2\beta)}{\alpha-(\beta-\pi)}>\sec^2\alpha$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답 ③

21. **출제의도** : 연속함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 정수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$에서 $f(0)=0$이므로

$f(x)=l\sin x$

$\pi\le x\le\dfrac{3}{2}\pi$에서 $f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=1$이므로

$f(x)=n\sin x+n+1$

$\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi$에서 $f(x)=m\sin x+C$ (C는 적분상수)

함수 $f(x)$가 $x=\pi$에서 연속이므로

$C=n+1$

또, 함수 $f(x)$가 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 연속이므로

$l=m+n+1$ ⋯⋯ ㉠

이때,

$$f(x)=\begin{cases} l\sin x & \left(0\le x\le \frac{\pi}{2}\right) \\ m\sin x+n+1 & \left(\frac{\pi}{2}<x\le \pi\right) \\ n\sin x+n+1 & \left(\pi<x\le \frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

이므로

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\,dx$$

$$=\left[-l\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-m\cos x+(n+1)x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$+\left[-n\cos x+(n+1)x\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$=l+m+(\pi-1)n+\pi$

㉠에서 $l=m+n+1$이므로

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\,dx=2m+(n+1)\pi+1$$

$$=2m+n\pi+\pi+1$$

이 값이 최대이어야 하므로 $m>0,\ n>0$ 이어야 한다.

한편, $|l|+|m|+|n|\le 10$에서

$l=m+n+1$이므로

$|m+n+1|+|m|+|n|\le 10$

$(m+n+1)+m+n\le 10$

$2m+2n+1\le 10$에서 $m+n\le \frac{9}{2}$

(ⅰ) $m=1,\ n=3$일 때,

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\,dx=4\pi+3$$

(ⅱ) $m=2,\ n=2$일 때,

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\,dx=3\pi+5$$

(ⅲ) $m=3,\ n=1$일 때,

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\,dx=2\pi+7$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\,dx$의 값이 최대인 경우는

$m=1,\ n=3$일 때이고,

㉠에서 $l=1+3+1=5$이다.

따라서

$l+2m+3n=5+2+9=16$

정답 ⑤

22. **출제의도** : 순열의 수와 조합의 수를 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

${}_3\mathrm{P}_2+{}_3\mathrm{C}_2$

$={}_3\mathrm{P}_2+\frac{{}_3\mathrm{P}_2}{2!}$

$=3\times 2+\frac{3\times 2}{2\times 1}$

$=6+3$

$=9$

정답 9

23. **출제의도** : 로그방정식의 근을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수조건에서 $x>-\frac{1}{5}$

$2\log_4(5x+1)=1,\ \log_2(5x+1)=1$

$5x+1=2$에서 $x=\frac{1}{5}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{5}$이므로

$\log_5 \frac{1}{\alpha} = \log_5 5 = 1$

정답 1

24. **출제의도** : 이항분포의 성질과 확률변수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$ …… ㉠

한편

$\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X+1\right) = 5$에서

$\frac{1}{4}\mathrm{V}(X) = 5,\ \mathrm{V}(X) = 20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{n}{4} = 20$

따라서 $n = 80$

정답 80

25. **출제의도** : 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 3\cos^3 x)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(1 + 3\cos^2 x)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\{1+3(1-\sin^2 x)\}dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(4-3\sin^2 x)dx$ ---㉠

여기서 $\sin x = t$로 놓으면 $\cos x = \frac{dt}{dx}$이고 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로 ㉠은

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(4-3\sin^2 x)dx$

$= \int_0^1 (4-3t^2)dt$

$= \left[\ 4t - t^3\right]_0^1$

$= 3$

정답 3

26. **출제의도** : 합성함수의 미분법을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - \frac{\pi}{6}}{x-1}$에서 $x \to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to 1}\left\{f(x) - \frac{\pi}{6}\right\} = 0$에서 $f(x)$가 미분가능한 함수이므로 $f(1) = \frac{\pi}{6}$

$h(x) = (g \circ f)(x)$라 하면

$h(1) = g(f(1))$

$= g\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

한편, $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$이므로

$h'(1) = g'(f(1))f'(1)$

$=g'\left(\frac{\pi}{6}\right)f'(1)$

$=\cos\frac{\pi}{6}\times f'(1)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}f'(1)$

이때, 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}f'(1)(x-1)$

이 직선이 원점을 지나므로

$0-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}f'(1)(0-1)$에서

$f'(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서

$k=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로

$30k^2=30\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=10$

정답 10

27. **출제의도** : 타원의 성질을 이용하여 사각형의 둘레의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 초점의 좌표를

$\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)(c>0)$

라 하면

$c^2=16-7=9$, $c=3$

이므로

$\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$

한편 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}}$, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OF}}$, $\overline{\mathrm{PO}}$는 공통이므로

$\triangle\mathrm{AOP} \backsim \triangle\mathrm{FOP}$

이때, 점 P는 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{BP}}$

타원의 성질에 의해

$\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=8$

한편, $\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{BF'}}=3\sqrt{2}$이므로

사각형 $\mathrm{AF'BP}$의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{BF'}}=8+3\sqrt{2}+3\sqrt{2}$

$=8+6\sqrt{2}$

따라서 $a=8$, $b=6$이므로

$a+b=8+6=14$

정답 14

28. **출제의도** : 중복조합의 수를 이용하여 여사건의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_9={}_{11}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_2=55$

이때, $a<2$ 또는 $b<2$인 사건을 A라 하면 A^C는 $a\geq2$이고 $b\geq2$인 사건이다.

$a=a'+2, b=b'+2$로 놓으면

$(a'+2)+(b'+2)+c=9$에서

$a'+b'+c=5$

방정식 $a'+b'+c=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c의 모든 순서쌍 (a', b', c)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$

이때, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{21}{55}$이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{21}{55}=\frac{34}{55}$

따라서 $p=55,\ q=34$이므로

$p+q=55+34=89$

정답 89

29. **출제의도** : 공간벡터의 내적과 직선의 방향벡터를 활용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

세 점 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3$의 좌표를

$\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1,\ 1),\ \mathrm{P}_2(x_2,\ y_2,\ 1),\ \mathrm{P}_3(x_3,\ y_3,\ 1)$

이라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=3x_1+\frac{1}{2}y_1+2=\frac{11}{3}$에서

$3x_1+\frac{1}{2}y_1=\frac{5}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}=3x_2+\frac{1}{2}y_2+2=1$에서

$3x_2+\frac{1}{2}y_2=-1$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_3}=3x_3+\frac{1}{2}y_3+2=-\frac{7}{4}$에서

$3x_3+\frac{1}{2}y_3=-\frac{15}{4}$

세 점 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2,\ \mathrm{Q}_3$이라 하면

세 점 $\mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2,\ \mathrm{Q}_3$은 각각 xy평면 위의

세 직선 $3x+\frac{1}{2}y=\frac{5}{3},\ 3x+\frac{1}{2}y=-1,$

$3x+\frac{1}{2}y=-\frac{15}{4}$

즉, $y=-6x+\frac{10}{3},\ y=-6x-2,$

$y=-6x-\frac{30}{4}$ 위에 있다.

한편 점 $(0,\ k,\ 0)$을 지나고 방향벡터가 $(1,\ -6,\ 0)$인 직선의 방정식은

$\frac{x}{1}=\frac{y-k}{-6},\ z=0$

이다. 즉,

xy평면 위의 직선 $y=-6x+k$이므로

주어진 조건을 만족하려면

$k<-\frac{30}{4}$ 또는 $k>\frac{10}{3}$

이어야 한다.

따라서 $m=4,\ M=-8$이므로

$m-M=4-(-8)=12$

정답 12

30. **출제의도** : 합성함수 미분법을 이용하여 내적문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

사차함수 $f(x)$의 최솟값이 0이므로 사차함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접한다.

한편, $g(x)=2x^4e^{-x}$에서

$g'(x)=8x^3e^{-x}-2x^4e^{-x}$

$=-2x^3e^{-x}(x-4)$

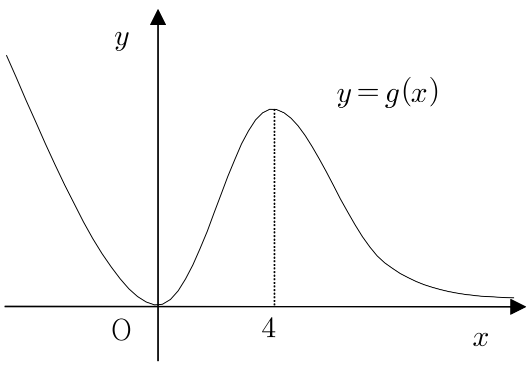
이때, $g'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=4$

그러므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2^9e^{-4}	$\searrow$

이때, $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



한편, 조건 (가)에서 함수 $h(x)=0$은 서로 다른 4개의 실근을 가진다.
이때, $f(g(x))=0$에서 $g(x)=t$로 놓으면 주어진 방정식은 $f(t)=0$이다.
이때, 방정식 $f(t)=0$의 한 근을 $t=\alpha$라 하면

$$g(x)=\alpha$$

이때, $g(x)\geq 0$이므로 $\alpha\geq 0$이어야 한다.
또, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\alpha$는 많아야 세 점에서 만나므로 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서는 방정식 $f(t)=0$은 적어도 2개의 0이상의 실근을 가져야 한다.
한편, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이고 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로

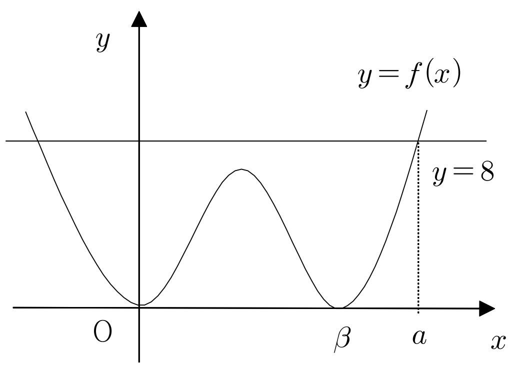
$$f(x)=\frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 \ (0\leq\alpha<\beta) \quad \cdots\cdots \ ㉠$$

또, 조건 (나)에서 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 $h'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 $-$에서 $+$로 바뀌어야 한다.
한편, $h'(x)=f'(g(x))\times g'(x)$이고 $g'(x)$의 부호가 $x=0$의 좌우에서 $-$에서 $+$로 바뀌므로 $f'(g(x))$의 부호는 $x=0$의 좌우에서 $+$에서 $+$로 나타나야 한다.

한편, x의 값이 0에 아주 가까이 있을 때, $x<0$이면 $g(x)>0$이고 $x>0$이면 $g(x)>0$이다. 또, $g(0)=0$이므로 위의 조건을 만족시키기 위해서는 함수 $f(x)$에서 x의 값이 0의 근처이고 양수일 때, $f'(x)>0$이어야 한다.
이때, $\alpha\geq 0$이므로 $\alpha=0$이어야 한다.
그러므로 ㉠에서

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2 \quad \cdots\cdots \ ㉡$$

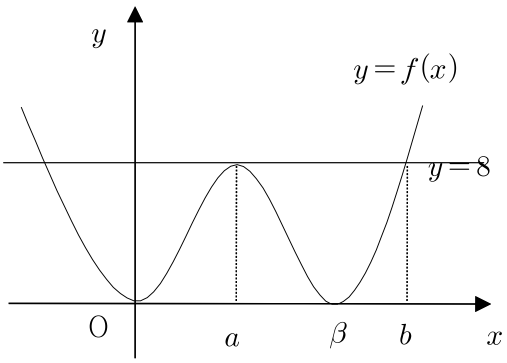
또, 조건 (다)에서 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수가 6이어야 한다.
이때, $f(g(x))=8$에서 $g(x)=t$로 놓으면 $f(t)=8$이고 $g(x)\geq 0$이므로 $t\geq 0$이어야 한다.
이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=8$의 그래프를 각 경우로 나누고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=8$의 교점 중 x좌표가 0보다 큰 점만 나타내면 다음과 같다.
(i) 함수 $f(x)$의 극댓값이 8보다 작은 경우



두 함수 $y=f(x)$, $y=8$의 그래프의 교점의 x좌표 중 0보다 큰 값을 a라 하면 방정식 $g(x)=a$의 서로 다른 실근의 개수는 6이어야 한다.
그런데 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=a(a>0)$인 직선은 많아야 세 점에서

만나므로 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅱ) 함수 $f(x)$의 극댓값이 8인 경우



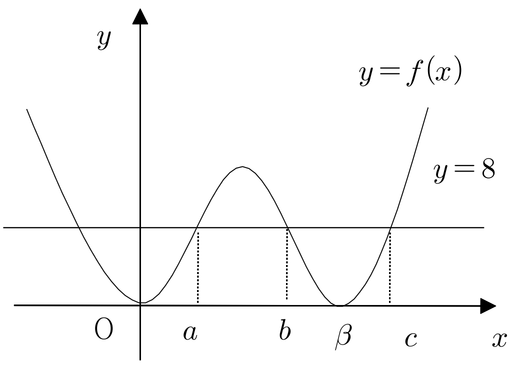
두 함수 $y=f(x)$, $y=8$의 그래프의 교점의 x좌표 중 0보다 큰 값을 a, $b(a<b)$라 하면 방정식 $g(x)=a$ 또는 $g(x)=b$의 서로 다른 실근의 개수는 6이어야 한다.

그런데 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=a(a>0)$인 직선의 교점의 개수는 2 또는 3이다.

마찬가지로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=b(b>0)$인 직선의 교점의 개수는 2 또는 3이다.

그러므로 조건을 만족시킬 수 있다.

(ⅲ) 함수 $f(x)$의 극댓값이 8보다 큰 경우



두 함수 $y=f(x)$, $y=8$의 그래프의 교점의 x좌표 중 0보다 큰 값을 a, b, c $(a<b<c)$라 하면 방정식 $g(x)=a$ 또는 $g(x)=b$ 또는 $g(x)=c$의 서로 다른 실근의 개수는 6이여야 한다.

그런데 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=a(a>0)$인 직선의 교점의 개수는 2 또는 3이다.

마찬가지로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=b(b>0)$, 함수 $y=g(x)$와 직선 $y=c(c>0)$의 교점의 개수도 모두 2 또는 3이다.

그러므로 방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 실근의 개수가 6이기 위해서는 모두 교점의 개수가 2가 되어야 한다.

그런데 $0<a<b<c$이고 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=2^9e^{-4}$만 서로 다른 두 점에서 만나므로 조건을 만족시키지 못한다.

그러므로 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $f(x)$의 극댓값은 8이다.

한편, ㉡에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= x(x-\beta)^2+x^2(x-\beta) \\ &= x(x-\beta)(2x-\beta) \\ &= 2x(x-\beta)\left(x-\frac{\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

이때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\beta}{2}$	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

그러므로 $f\left(\frac{\beta}{2}\right)=8$에서

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{\beta}{2}\right)^2\times\left(\frac{\beta}{2}-\beta\right)^2=8$$

$\beta^4=2^8$

이때, $\beta>0$이므로

$\beta=4$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-4)^2$에서

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= x(x-4)^2+x^2(x-4) \\
&= 2x(x-2)(x-4)
\end{aligned}
$$

이므로

$$
\begin{aligned}
f'(5) &= 2\times5\times3\times1 \\
&= 30
\end{aligned}
$$

정답 30