2018학년도 9월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

수학 영역

가형 정답

1	②	2	③	3	⑤	4	②	5	③
6	③	7	⑤	8	①	9	②	10	③
11	④	12	③	13	①	14	②	15	②
16	④	17	④	18	①	19	⑤	20	④
21	⑤	22	2	23	7	24	13	25	3
26	72	27	512	28	71	29	18	30	11

해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기
$2^5\times 2^{-3}=2^{5-3}=2^2=4$

2. [출제의도] 집합의 원소의 개수 구하기
$A\cap B=\{2,\ 4,\ 6\}$ 이므로 $n(A\cap B)=3$

3. [출제의도] 등비수열의 항 구하기
첫째항을 a라 하면
$a_2=2a=6$이므로 $a=3$
따라서 $a_4=3\times 2^3=24$

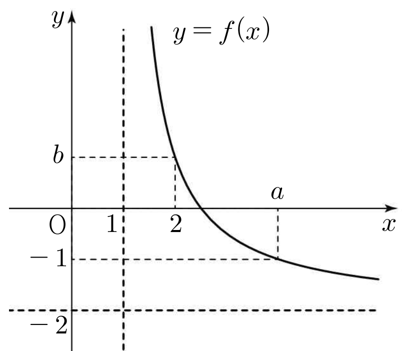
4. [출제의도] 합성함수 이해하기
$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(5)=2$

5. [출제의도] 함수의 극한 이해하기
$\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=-1$ 이므로
$\lim\limits_{x\to -1-}f(x)+\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=2-1=1$

6. [출제의도] 수열의 합 이해하기
$\sum\limits_{k=1}^{6}a_k=66$, $\sum\limits_{k=1}^{5}a_k=50$ 이므로
$a_6=66-50=16$

7. [출제의도] 함수의 미분가능성 이해하기
함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로
$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=f(2)$
$8+2a=8+b$, $b=2a$
함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로
i) $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$
$=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{2x^2+ax-(8+b)}{x-2}$
$=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{2x^2+ax-(8+2a)}{x-2}=8+a$
ii) $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$
$=\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{4x+b-(8+b)}{x-2}=4$
i), ii)에 의하여 $8+a=4$, $a=-4$
따라서 $b=-8$, $ab=32$

8. [출제의도] 유리함수의 성질 이해하기
$f(x)=\dfrac{3}{x-1}-2$이라 하면



$f(2)=b=1$, $f(a)=\dfrac{3}{a-1}-2=-1$
$a=4$, $b=1$ 따라서 $a+b=5$

9. [출제의도] 함수의 극한 이해하기
$\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)=0$ 이므로 $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2+ax+b)=0$
$18+3a+b=0$
$b=-3(a+6)$
$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+ax-3(a+6)}{(x+3)(x-3)}$
$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(2x+a+6)}{(x+3)(x-3)}$
$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+a+6}{x+3}$
$=\dfrac{12+a}{6}=3$
$a=6$, $b=-36$
따라서 $a+b=-30$

10. [출제의도] 평균변화율 이해하기
$\dfrac{0-(-8)}{0-(-2)}=\dfrac{a(a+1)(a-2)-0}{a-0}$
$a>0$ 이므로
$(a+1)(a-2)=4$
$(a+2)(a-3)=0$
따라서 $a=3$

11. [출제의도] 급수의 성질 이해하기
급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{n}+1\right)$이 수렴하므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=-1$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{na_n+3n^2}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{a_n}{n}+3}{1+\dfrac{1}{n^2}}=2$

12. [출제의도] 역함수 이해하기
$g^{-1}(k)=a$라 하면
$(f\circ g^{-1})(k)=f(a)=4a-5=7$, $a=3$
$g^{-1}(k)=3$이므로 $k=g(3)=10$

13. [출제의도] 미분계수의 정의를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기
$f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^3+13h^2+26h}{h}$
$=\lim\limits_{h\to 0}(h^2+13h+26)=26$

14. [출제의도] 정적분을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기
$v(t)=-3(t+2)(t-2)$이고 $v(2)=0$ 이므로
$\int_0^4\left|12-3t^2\right|dt$
$=\int_0^2(12-3t^2)\,dt+\int_2^4(-12+3t^2)\,dt$
$=\Big[12t-t^3\Big]_0^2+\Big[-12t+t^3\Big]_2^4$
$=16+32=48$

15. [출제의도] 수열의 합 이해하기
공차를 d라 하면
$\sum\limits_{k=1}^{15}a_k=\dfrac{15(2a_1+14d)}{2}=165$
이므로 $a_1+7d=11$ $\cdots$ ㉠
$\sum\limits_{k=1}^{21}(-1)^k a_k=d+d+d+\cdots+d-a_{21}=10d-a_{21}$
$=-a_1-10d=-20$
이므로 $a_1+10d=20$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $a_1=-10$, $d=3$
따라서 $a_{21}=-10+60=50$

16. [출제의도] 함수의 극한 이해하기
$\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\sqrt{f(-x)}-\sqrt{f(x)}\right\}$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\sqrt{a(-x-1)^2+1}-\sqrt{a(x-1)^2+1}\right\}$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4ax}{\sqrt{a(x+1)^2+1}+\sqrt{a(x-1)^2+1}}$
$=\dfrac{4a}{2\sqrt{a}}=6$
따라서 $a=9$

17. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기
수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n=3r^{n-1}\ (r>1)$
$b_n=\left(\log_{a_1}a_2\right)\times\left(\log_{a_2}a_3\right)\times\left(\log_{a_3}a_4\right)\times\cdots\times\left(\log_{a_n}a_{n+1}\right)$
$=\dfrac{\log a_2}{\log a_1}\times\dfrac{\log a_3}{\log a_2}\times\dfrac{\log a_4}{\log a_3}\times\cdots\times\dfrac{\log a_{n+1}}{\log a_n}$
$=\log_{a_1}a_{n+1}=\log_3\left(3r^n\right)=1+n\log_3 r$
$\sum\limits_{k=1}^{10}b_k=10+\left(\log_3 r\right)\times\sum\limits_{k=1}^{10}k$
$=10+55\log_3 r=120$
따라서 $\log_3 r=2$

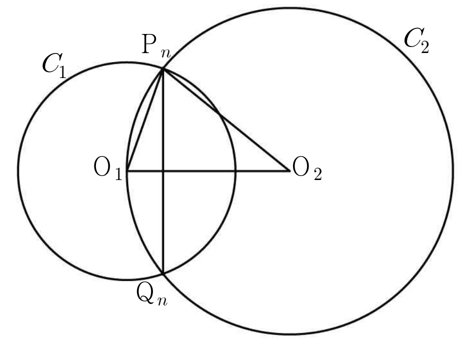
18. [출제의도] 정적분의 정의를 활용하여 추론하기

$S_n=\dfrac{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4}{(1+2+3+\cdots+n)(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)}$
이라 하면
$S_n=\dfrac{\boxed{12}\times\sum\limits_{k=1}^{n}k^4}{n^2(n+1)^2(2n+1)}$
$=\boxed{12}\times\dfrac{\boxed{n^3}}{(n+1)^2(2n+1)}\times\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^4}{n^5}$
이다. 따라서
$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=6\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\left(\dfrac{k}{n}\right)^4\dfrac{1}{n}\right\}$
이므로 정적분의 정의에 의하여
$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=6\int_0^1 f(x)\,dx=\boxed{\dfrac{6}{5}}$
이다.

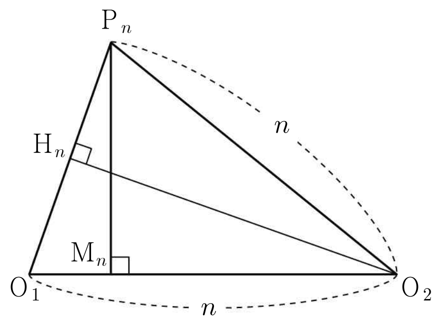
$p=12$, $g(n)=n^3$, $q=\dfrac{6}{5}$

따라서 $g(2)+\frac{p}{q}=18$

19. [출제의도] 수열의 극한을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기



원 C_1, C_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하자.
점 O_2에서 선분 O_1P_n에 내린 수선의 발을 H_n, 점 P_n에서 선분 O_1O_2에 내린 수선의 발을 M_n이라 하자.



삼각형 $O_2P_nO_1$이 이등변삼각형이므로

$\overline{P_nH_n}=\frac{n-1}{2}$

직각삼각형 $P_nH_nO_2$에서

$\overline{O_2H_n}=\sqrt{n^2-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3n^2+2n-1}}{2}$

삼각형 $O_2P_nO_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{P_nO_1}\times\overline{O_2H_n}=\frac{1}{2}\times\overline{O_1O_2}\times\overline{P_nM_n}$이므로

$\frac{1}{2}\times(n-1)\times\frac{\sqrt{3n^2+2n-1}}{2}=\frac{1}{2}\times n\times\overline{P_nM_n}$

$\overline{P_nM_n}=\frac{(n-1)\sqrt{3n^2+2n-1}}{2n}$

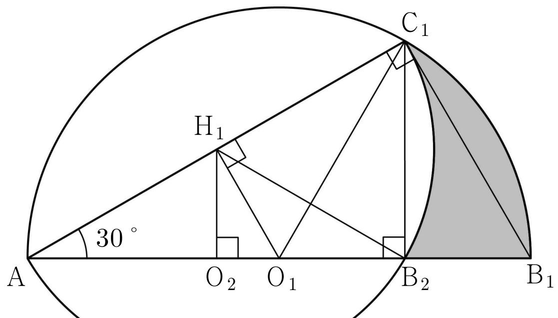
$\overline{P_nQ_n}=2\overline{P_nM_n}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{P_nQ_n}}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\sqrt{3n^2+2n-1}}{n^2}=\sqrt{3}$

20. [출제의도] 등비급수를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

그림 R_1에서



$\angle B_1AC_1=30^\circ$이므로

직각삼각형 C_1AB_1에서 $\overline{AC_1}=4\sqrt{3}$

직각삼각형 C_1AB_2에서 $\overline{AB_2}=6$

선분 AB_1의 중점을 O_1, 선분 AB_2의 중점을 O_2, 선분 AC_1의 중점을 H_1이라 하면

$\overline{O_1H_1}=2$, $\overline{H_1O_2}=\sqrt{3}$

$S_1=$(부채꼴 $O_1B_1C_1$ + 삼각형 O_1C_1A)

  −(부채꼴 $H_1B_2C_1$ + 삼각형 H_1AB_2)

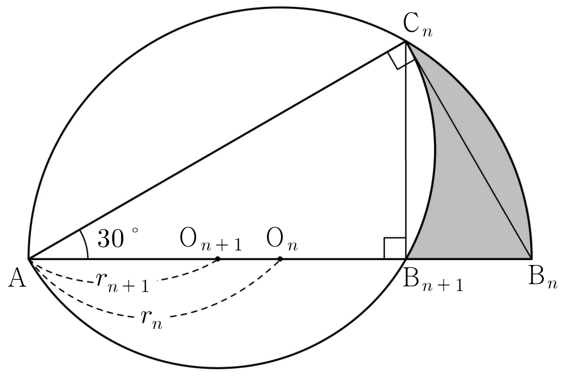
$=\left(16\pi\times\frac{60^\circ}{360^\circ}+\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2\right)$

$-\left(12\pi\times\frac{60^\circ}{360^\circ}+\frac{1}{2}\times6\times\sqrt{3}\right)$

$=16\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-12\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$=\frac{1}{3}(2\pi+3\sqrt{3})$

다음은 그림 R_n의 일부이다.



$\overline{AB_n}$을 지름으로 하는 반원의 반지름의 길이를 r_n, $\overline{AB_{n+1}}$을 지름으로 하는 반원의 반지름의 길이를 r_{n+1}이라 하자.

$\overline{AB_n}=2r_n$, $\angle B_nAC_n=30^\circ$이므로

직각삼각형 C_nAB_n에서 $\overline{AC_n}=\sqrt{3}r_n$

$\angle B_{n+1}AC_n=30^\circ$이므로

직각삼각형 C_nAB_{n+1}에서 $\overline{AB_{n+1}}=\frac{3}{2}r_n$

따라서 $r_{n+1}=\frac{3}{4}r_n$

그림 R_n에서 새롭게 색칠되는 도형의 넓이를 T_n이라 하면 $T_{n+1}=\frac{9}{16}T_n$이고 $S_n=\sum_{k=1}^{n}T_n$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}T_k=\frac{\frac{1}{3}(2\pi+3\sqrt{3})}{1-\frac{9}{16}}$

$=\frac{16}{21}(2\pi+3\sqrt{3})$

따라서 $p+q=21+16=37$

21. [출제의도] 정적분을 활용하여 추론하기

ㄱ. $f'(x)=x^2-4tx+3t^2=(x-t)(x-3t)$ (참)

ㄴ. $f(x)=\int_{3t}^{x}(s^2-4ts+3t^2)ds$

$=\left[\frac{1}{3}s^3-2ts^2+3t^2s\right]_{3t}^{x}=\frac{1}{3}x^3-2tx^2+3t^2x$

$=\frac{1}{3}x(x-3t)^2$

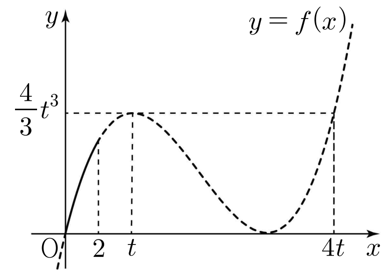
$f'(t)=0$, $f(t)=\frac{4}{3}t^3$이므로

$f(x)-\frac{4}{3}t^3=\frac{1}{3}x(x^2-6tx+9t^2)-\frac{4}{3}t^3$

$=\frac{1}{3}(x-t)^2(x-4t)$

$f(t)=f(4t)=\frac{4}{3}t^3$

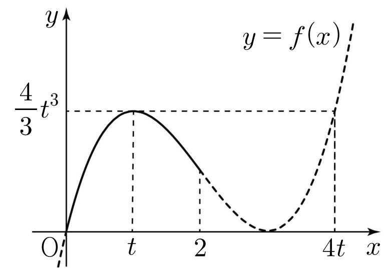
ⅰ) $t>2$일 때



함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 가지므로

$g(t)=f(2)=\frac{2}{3}(3t-2)^2$

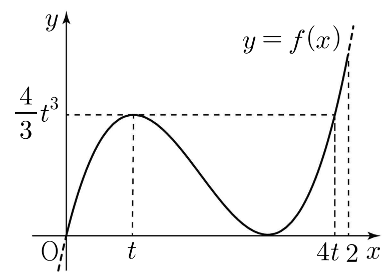
ⅱ) $t\le 2<4t$ 즉, $\frac{1}{2}<t\le 2$일 때



함수 $f(x)$는 $x=t$에서 최댓값을 가지므로

$g(t)=f(t)=\frac{4}{3}t^3$

ⅲ) $4t\le 2$ 즉, $0<t\le\frac{1}{2}$일 때



함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 가지므로

$g(t)=f(2)=\frac{2}{3}(3t-2)^2$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여

$t>2$일 때, $g(t)=\frac{2}{3}(3t-2)^2$ (참)

ㄷ. 함수

$$g(t)=\begin{cases}\frac{2}{3}(3t-2)^2 & \left(0<t\le\frac{1}{2}\right)\\ \frac{4}{3}t^3 & \left(\frac{1}{2}<t\le 2\right)\\ \frac{2}{3}(3t-2)^2 & (t>2)\end{cases}$$

의 미분가능성을 조사하면

ⅰ) $t=\frac{1}{2}$일 때,

$\lim_{t\to\frac{1}{2}-}\frac{g(t)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{t-\frac{1}{2}}=\lim_{t\to\frac{1}{2}-}\frac{\frac{2}{3}(3t-2)^2-\frac{1}{6}}{t-\frac{1}{2}}$

$=\lim_{t\to\frac{1}{2}-}\frac{(2t-1)(6t-5)}{2t-1}=-2$

$\lim_{t\to\frac{1}{2}+}\frac{g(t)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{t-\frac{1}{2}}=\lim_{t\to\frac{1}{2}+}\frac{\frac{4}{3}t^3-\frac{1}{6}}{t-\frac{1}{2}}$

$=\lim_{t\to\frac{1}{2}+}\frac{(2t-1)(4t^2+2t+1)}{3(2t-1)}=1$

따라서 $t=\frac{1}{2}$에서 미분가능하지 않다.

ⅱ) $t=2$일 때,

$$\lim_{t\to 2-}\frac{g(t)-g(2)}{t-2}=\lim_{t\to 2-}\frac{\frac{4}{3}t^3-\frac{32}{3}}{t-2}$$

$$=\lim_{t\to 2-}\frac{\frac{4}{3}(t^3-8)}{t-2}=\lim_{t\to 2-}\frac{4(t^2+2t+4)}{3}=16$$

$$\lim_{t\to 2+}\frac{g(t)-g(2)}{t-2}=\lim_{t\to 2+}\frac{\frac{2}{3}(3t-2)^2-\frac{32}{3}}{t-2}$$

$$=\lim_{t\to 2+}\frac{2(t-2)(3t+2)}{t-2}=16$$

따라서 $t=2$에서 미분가능하다.

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $t>0$에서 함수 $g(t)$는 $t=\frac{1}{2}$에서만 미분가능하지 않다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_5 50+\log_5\frac{1}{2}=\log_5 25=2$

23. [출제의도] 집합의 포함관계 이해하기

$B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$

$a=1$일 때, $A=\{1,\ 2\}$

$a=2$일 때, $A=\{1,\ 4\}$

$a=4$일 때, $A=\{1,\ 8\}$

$A\subset B$를 만족시키는 a는 1, 2, 4

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은 7

24. [출제의도] 부정적분을 활용하여 함숫값 구하기

$f(x)=x^3+2x+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=C=1$이므로 $f(x)=x^3+2x+1$

따라서 $f(2)=13$

25. [출제의도] 충분조건 이해하기

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|1\le x\le 3\}$, $Q=\{x|x\le a\}$

$P\subset Q$이므로 $a\ge 3$

따라서 실수 a의 최솟값은 3

26. [출제의도] 등비수열의 성질을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

x에 대한 다항식 x^3-ax+b를 $x-1$로 나눈 나머지가 57이므로

나머지 정리에 의하여

$1-a+b=57$

$b=a+56$ $\cdots$ ㉠

1, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=b$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$a^2=a+56$

$a^2-a-56=(a+7)(a-8)=0$

$a=-7,\ 8$

공비 a가 양수이므로 $a=8$, $b=64$

따라서 $a+b=72$

27. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

점 C는 선분 AB의 중점이므로 $\mathrm{C}\left(\frac{3}{2}t,\ \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$

직선 AB의 기울기가 $-\sqrt{2}$ 이므로 점 C를 지나고 직선 AB에 수직인 직선을 l이라 하면 직선 l의 방정식은

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{3}{2}t\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}t$$

점 D는 직선 l과 직선 $x=2t$의 교점이므로

점 D의 좌표는 $\mathrm{D}\left(2t,\ \frac{3\sqrt{2}}{4}t\right)$

$$f(t)=\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{\left(2t-\frac{3}{2}t\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}t-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{4}t$$

$$\lim_{t\to 4}\frac{t^2-16}{f(t)-\sqrt{6}}=\lim_{t\to 4}\frac{t^2-4^2}{\frac{\sqrt{6}}{4}t-\sqrt{6}}$$

$$=\lim_{t\to 4}\frac{4(t-4)(t+4)}{\sqrt{6}(t-4)}=\lim_{t\to 4}\frac{4(t+4)}{\sqrt{6}}=\frac{16\sqrt{6}}{3}$$

따라서 $3a^2=512$

28. [출제의도] 정적분의 성질을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

$$\int_1^{10}f(x)\,dx=\int_0^{10}f(x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^4 f(x)\,dx+\int_4^6 f(x)\,dx$$

$$+\int_6^8 f(x)\,dx+\int_8^{10}f(x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx$$

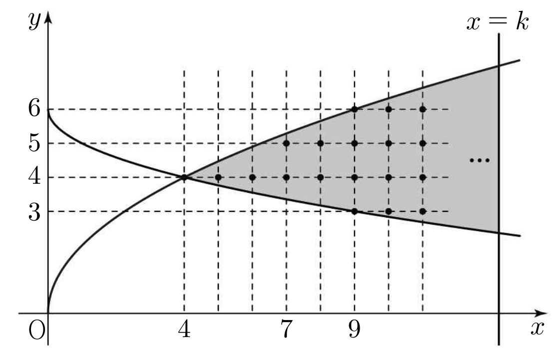
$$=5\times 4-\int_0^1(x^3-6x^2+8x)\,dx$$

$$=20-\frac{9}{4}=\frac{71}{4}$$

따라서 $4\int_1^{10}f(x)\,dx=71$

29. [출제의도] 무리함수의 그래프를 활용하여 추론하기

두 곡선 $y=2\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}+6$과 직선 $x=k$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되는 점 중 x, y좌표가 모두 정수인 점의 개수는



ⅰ) $4\le x<\frac{25}{4}$일 때, $y=4$이므로

$3\times 1=3$

ⅱ) $\frac{25}{4}\le x<9$일 때, $y=4,\ 5$이므로

$2\times 2=4$

ⅲ) $9\le x<\frac{49}{4}$일 때, $y=3,\ 4,\ 5,\ 6$이므로

$4\times 4=16$

ⅳ) $\frac{49}{4}\le x<16$일 때, $y=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$이므로

$3\times 5=15$

ⅴ) $16\le x<\frac{81}{4}$일 때,

$y=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$이므로

$5\times 7=35$

ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)에 의하여

$4\le x<16$일 때, 점의 개수의 합이 38이고,

ⅴ)에 의하여

$x=16,\ 17,\ 18$일 때, 점의 개수의 합이 21이다.

따라서 조건을 만족시키는 점의 개수가 59가 되도록 하는 자연수 k의 값은 18

30. [출제의도] 미분의 성질을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

두 다항식 $P_1(x)$, $P_2(x)$를

$P_1(x)=g(x)-4x-26$,

$P_2(x)=g(x)+2x^3-14x^2+12x+6$이라 하면

$P_1(x)=-P_2(x)$ 즉, $P_1(x)+P_2(x)=0$

따라서 $g(x)=-x^3+7x^2-4x+10$,

$$|f(x)|=\begin{cases}-(x^3-7x^2+8x+16) & (x\le a)\\ x^3-7x^2+8x+16 & (x>a)\end{cases}$$

$g(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로

$f(x)=x^3-7x^2+8x+16=(x+1)(x-4)^2$이고

$a=-1$이다.

함수 $h(x)=f(x)-(x-k)^2$라 하면

함수 $h(x)$의 극값이 존재해야 하므로

방정식 $h'(x)=3x^2-16x+(8+2k)=0$에서

판별식을 D라 하면 $D/4=64-3(8+2k)>0$

$k<\frac{20}{3}$ 이므로 k는 6이하의 자연수이다.

ⅰ) $k=1,\ 2,\ 3,\ 5$일 때

$h(-1)=-(k+1)^2<0$

$h(1)=18-(1-k)^2>0$

$h(4)=-(4-k)^2<0$

$h(6)=28-(6-k)^2>0$

사이값 정리에 의하여 삼차방정식 $h(x)=0$의 실근이 열린 구간 $(-1,\ 1)$, $(1,\ 4)$, $(4,\ 6)$에 각각 하나씩 존재한다.

ⅱ) $k=4$일 때,

$h(x)=(x+1)(x-4)^2-(x-4)^2=x(x-4)^2$

이므로 함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

ⅲ) $k=6$일 때,

극댓값 $h(2)=-4<0$이므로 함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 만난다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여 함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 자연수 k의 값은 1, 2, 3, 5이다.

따라서 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은 11