

수학영역 나형 정답 및 풀이

01. ④ 02. ③ 03. ③ 04. ⑤ 05. ④
 06. ② 07. ④ 08. ② 09. ④ 10. ⑤
 11. ⑤ 12. ② 13. ① 14. ⑤ 15. ③
 16. ① 17. ① 18. ② 19. ④ 20. ③
 21. ③ 22. 56 23. 15 24. 35 25. 3
 26. 25 27. 13 28. 24 29. 20
 30. 65

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$2^2 \times 8^{\frac{1}{3}} = 2^2 \times (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^2 \times 2 = 8$$

정답 ④

2. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + 1}{2n^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{3 + 0 + 0}{2 + 0} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

정답 ③

3. 출제의도 : 교집합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$A = \{1, 7\}, B = \{1, 2, a\}$$

이때, $A \subset B$ 이고, $7 \in A$ 이므로

$$7 \in B$$

따라서

$$a = 7$$

정답 ③

4. 출제의도 : 합성함수의 정의를 이용하여 합성함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} (g \circ f)(3) &= g(f(3)) \\ &= g(4) \\ &= 5 \end{aligned}$$

정답 ⑤

5. 출제의도 : 명제가 참이 되도록 하는 실수 a 의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x \mid x = a\}$$

$$Q = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$$

이때, $P \subset Q$ 이어야 하므로

$$-1 \leq a \leq 4$$

따라서 구하는 실수 a 의 최댓값은 4이다.

정답 ④

6. 출제의도 : 다항함수의 극대, 극소의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x) = x^3 - ax + 6$ 에 대하여

$$f'(x) = 3x^2 - a$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극소이므로

$$f'(1) = 3 \times 1^2 - a = 0$$

따라서

$$a = 3$$

정답 ②

7. 출제의도 : \sum 의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 3, \quad \sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 7 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (2a_k^2 - a_k) &= 2 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - \sum_{k=1}^{10} a_k \\ &= 2 \times 7 - 3 \\ &= 11 \end{aligned}$$

정답 ④

8. 출제의도 : 그래프의 평행이동을 이용하여 상수 m 의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y = \sqrt{2(x+3)}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 그래프는

함수 $y = \sqrt{2(x-m+3)}$ 의 그래프이다.

따라서 이 그래프가 함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프이므로

$$-m + 3 = 0 \text{에서}$$

$$m = 3$$

정답 ②

9. 출제의도 : 분수함수의 점근선을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y = \frac{3x+1}{x-1} = \frac{3(x-1)+4}{x-1} = \frac{4}{x-1} + 3$$

이므로

함수 $y = \frac{3x+1}{x-1}$ 의 그래프의 점근선은

$$x = 1, \quad y = 3$$

이다.

따라서 $a = 1, b = 3$ 이므로

$$a + b = 1 + 3 = 4$$

정답 ④

10. 출제의도 : 함수의 극한의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x \rightarrow 1^-$ 일 때, $f(x) \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

$x \rightarrow 2^+$ 일 때, $f(x) \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

따라서,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 + 1 = 2$$

정답 ⑤

11. 출제의도 : 등비급수의 수렴조건을 이용하여 정수 x 의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n$ 은 첫째항이 $\frac{x}{5}$ 이고, 공비

가 $\frac{x}{5}$ 인 등비급수이다.

(i) $x = 0$ 인 경우

첫째항이 0이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.

(ii) $x \neq 0$ 인 경우

$$-1 < \frac{x}{5} < 1 \text{에서 } -5 < x < 5$$

정수 x 의 값은

$$-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$$

(i), (ii)에서 정수 x 의 개수는

$$1 + 8 = 9$$

정답 ⑤

12. 출제의도 : 확률의 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$P(A) = \frac{2}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

이므로

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

정답 ②

13. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 직선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 $(1, \log_2 5)$, $(2, \log_2 10)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\log_2 10 - \log_2 5}{2 - 1}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\log_2 \frac{10}{5}}{1} \\ &= \log_2 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

정답 ①

14. 출제의도 : 주어진 표를 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선택한 1장의 사진이 고양이 사진으로 인식된 사건인 사건을 E , 선택한 1장의 사진이 고양이 사진인 사건을 F 라 하면 구하는 확률은 $P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$ 이다.

$$P(E) = \frac{36}{80} = \frac{9}{20}$$

$$P(E \cap F) = \frac{32}{80} = \frac{2}{5}$$

따라서

$$\begin{aligned} P(F|E) &= \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \\ &= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{9}{20}} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

정답 ⑤

15. 출제의도 : 등비수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_3 = 4(a_2 - a_1) \text{에서}$$

$$a_1 r^2 = 4(a_1 r - a_1)$$

$$a_1 (r - 2)^2 = 0$$

$$a_1 = 0 \text{ 또는 } r = 2$$

$$a_1 = 0 \text{ 이면}$$

$$\sum_{k=1}^6 a_k = 0 \neq 15$$

이므로

$$a_1 \neq 0$$

따라서 $r = 2$ 이다.

이때,

$$\sum_{k=1}^6 a_k = \frac{a_1(2^6 - 1)}{2 - 1} = 15 \text{에서}$$

$$a_1 \times 63 = 15$$

$$a_1 = \frac{5}{21}$$

따라서

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 &= \frac{5}{21} \times (1 + 2^2 + 2^4) \\ &= \frac{5}{21} \times 21 \\ &= 5 \end{aligned}$$

정답 ③

16. 출제의도 : 수직선 위의 운동을 미분을 이용하여 이해할 수 있는가?

정답풀이 :

시각 $t=1$ 에서 운동방향을 바꾸므로 시각 t 에서의 속도를 $v(t)$ 라 하면

$$v(1) = 0$$

한편, $x = t^3 + at^2 + bt$ 에서

$$v(t) = 3t^2 + 2at + b$$

이므로

$$v(1) = 3 + 2a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

또, 시각 t 에서의 가속도를 $a(t)$ 라 하면

$$a(t) = 6t + 2a$$

이때, $a(2) = 0$ 이므로

$$a(2) = 12 + 2a = 0$$

$$a = -6 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

②을 ①에 대입하면

$$b = 9$$

따라서,

$$a + b = (-6) + 9 = 3$$

정답 ①

17. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 이차함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = ax^2 + b \text{에서}$$

$$f'(x) = 2ax$$

$$4(ax^2 + b) = (2ax)^2 + x^2 + 4$$

$$4ax^2 + 4b = 4a^2x^2 + x^2 + 4$$

$$4ax^2 + 4b = (4a^2 + 1)x^2 + 4$$

$$4a = 4a^2 + 1, 4b = 4$$

$$(2a - 1)^2 = 0, b = 1$$

$$\text{즉 } a = \frac{1}{2}, b = 1 \text{이므로}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

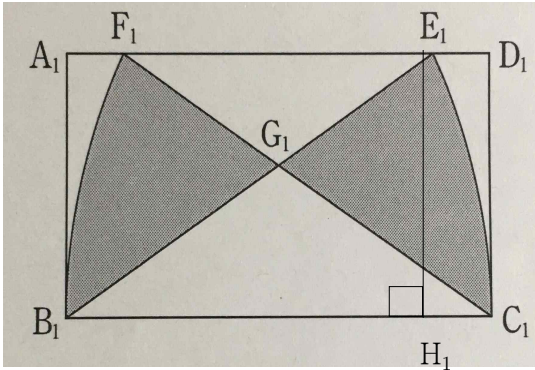
$$\text{따라서 } f(2) = \frac{1}{2} \times 4 + 1 = 2 + 1 = 3$$

정답 ①

18. 출제의도 : 급수를 이용하여 반복되는 도형의 넓이에 대한 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 E_1 에서 변 B_1C_1 에 내린 수선의 발을 H_1 이라 하자.



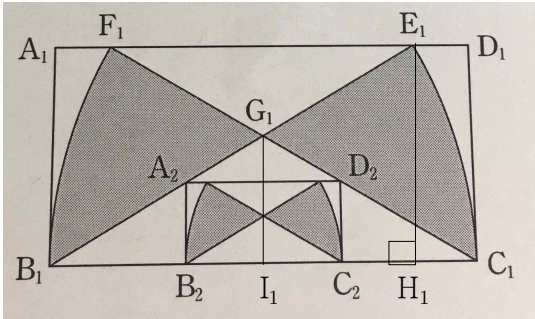
직각삼각형 $E_1B_1H_1$ 에서

$$\sin(\angle E_1B_1H_1) = \frac{\overline{E_1H_1}}{\overline{B_1E_1}} = \frac{1}{2}$$

이므로

$$\angle E_1B_1H_1 = 30^\circ$$

점 G_1 에서 변 B_1C_1 에 내린 수선의 발을 I_1 이라 하자.



$$\begin{aligned} \overline{G_1I_1} &= \tan 30^\circ \times \overline{B_1I_1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \left(\frac{30^\circ}{360^\circ} \times 4\pi - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= \frac{2(\pi - \sqrt{3})}{3} \end{aligned}$$

한편 $\overline{A_2B_2} = \overline{B_2I_2} = a (0 < a < 1)$ 이라 하면

직각삼각형 $A_2B_2I_2$ 에서

$$\tan 30^\circ = \frac{a}{1-a}$$

$$\text{즉, } \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{1-a} \text{에서}$$

$$a = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

따라서 두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$,

$A_2B_2C_2D_2$ 의 닮음비는 $1 : \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 이므로

두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ 의 넓

이의 비는 $1 : \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$, 즉 $1 : \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

이다.

따라서 구하는 극한값은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{2(\pi - \sqrt{3})}{3}}{1 - \frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}\pi - 12}{9}$$

정답 ②

19. 출제의도 : 확률의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a < b-2 \leq c$ 에서 $a \geq 1$ 이므로

$1 < b-2$

$3 < b \leq 6$

그러므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $b=4$ 일 때,

$a < 2 \leq c$

이므로 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$1 \times 5 = 5$

(ii) $b=5$ 일 때,

$a < 3 \leq c$ 이므로 순서쌍 (a, b, c) 의 개수

는

$$2 \times 4 = 8$$

(iii) $b=6$ 일 때,

$a < 4 \leq c$ 이므로 순서쌍 (a, b, c) 의 개수
는

$$3 \times 3 = 9$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{5+8+9}{6^3} = \frac{22}{6^3} = \frac{11}{108}$$

정답 ④

20. 출제의도 : 중복조합에 관련된 추론 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

음이 아닌 정수 a, b, c, d 가

$2a+2b+c+d=2n$ 을 만족시키려면 음이 아닌 정수 k 에 대하여 $c+d=2k$ 이어야 한다.

$c+d=2k$ 인 경우는 (1) 음이 아닌 정수 k_1, k_2 에 대하여 $c=2k_1, d=2k_2$ 인 경우 이거나 (2) 음이 아닌 정수 k_3, k_4 에 대하여 $c=2k_3+1, d=2k_4+1$ 인 경우이다.

(1) $c=2k_1, d=2k_2$ 인 경우 :

$$2a+2b+c+d=2n \text{에서}$$

$$2a+2b+2k_1+2k_2=2n$$

$$a+b+k_1+k_2=n$$

이므로 $2a+2b+c+d=2n$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$4H_n = {}_{4+n-1}C_n = {}_{n+3}C_n = \boxed{{}_{n+3}C_3}$$

이다.

(2) $c=2k_3+1, d=2k_4+1$ 인 경우 :

$$2a+2b+c+d=2n \text{에서}$$

$$2a+2b+(2k_3+1)+(2k_4+1)=2n$$

$$a+b+k_1+k_2=n-1$$

이므로 $2a+2b+c+d=2n$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$\begin{aligned} 4H_{n-1} &= {}_{4+(n-1)-1}C_{n-1} \\ &= {}_{n+2}C_{n-1} \\ &= \boxed{{}_{n+2}C_3} \end{aligned}$$

이다.

(1), (2)에 의하여 $2a+2b+c+d=2n$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수 a_n 은

$$a_n = \boxed{{}_{n+3}C_3} + \boxed{{}_{n+2}C_3}$$

이다. 자연수 m 에 대하여

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \boxed{{}_{n+2}C_3} \\ = {}_{m+3}C_4 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^8 a_n \\ &= \sum_{n=1}^8 {}_{n+3}C_3 + \sum_{n=1}^8 {}_{n+2}C_3 \\ &= \sum_{n=1}^8 {}_{n+3}C_3 + {}_{11}C_4 \\ &= \left(\sum_{n=1}^9 {}_{n+2}C_3 - {}_3C_3 \right) - {}_{11}C_4 \\ &= {}_{12}C_4 + {}_{11}C_4 - 1 \\ &= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1} - 1 \\ &= 495 + 330 - 1 \\ &= \boxed{824} \end{aligned}$$

이다 .

이상에서

$$f(n) = {}_{n+3}C_3, \quad g(n) = {}_{n+2}C_3$$

$$r = 824$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}
 f(6)+g(5)+r &= {}_9C_3+{}_7C_3+824 \\
 &= \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} + \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} + 824 \\
 &= 84+35+824 \\
 &= 943
 \end{aligned}$$

정답 ③

21. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 삼차함수에 대하여 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$-1+a-b > -1 \text{ 이므로 } a > b$$

조건 (나)에서

$$(1+a+b) - (-1+a-b) > 8$$

$$2+2b > 8 \text{ 이므로 } b > 3$$

조건 (가), (나)에서 $a > b > 3$

$$\neg. f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \text{ 이므로}$$

이차방정식 $3x^2 + 2ax + b = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - 3b$$

$$\text{이때, } a^2 - 3b > b^2 - 3b = b(b-3) > 0$$

이므로 방정식 $f'(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

$$\begin{aligned}
 \text{L. } f'(-1) &= 3 - 2a + b \\
 &= 3 - (2a - b) \\
 &= 3 - \{(a-b) + a\}
 \end{aligned}$$

$a - b > 0$ 이고, $a > 3$ 이므로

$$f'(-1) < 0 \text{ 이다.}$$

즉 $-1 < x < 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이 성립하지 않는다. (거짓)

$$\text{D. } x^3 + ax^2 + bx - (3k^2 + 2ak + b)x = 0$$

$$x(x^2 + ax - 3k^2 - 2ak) = 0$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x^2 + ax - 3k^2 - 2ak = 0$$

(i) 이차방정식

$x^2 + ax - 3k^2 - 2ak = 0$ 이 $x = 0$ 을 근으로 갖는 경우

$$-3k^2 - 2ak = 0 \text{ 에서}$$

$$k = 0 \text{ 또는 } k = -\frac{2a}{3}$$

이때, 방정식 $f(x) - f'(k)x = 0$ 은 두 실근 $x = 0, x = -a$ 를 갖는다.

(ii) 이차방정식

$x^2 + ax - 3k^2 - 2ak = 0$ 이 0이 아닌 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2 + ax - 3k^2 - 2ak = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = a^2 + 12k^2 + 8ak = 0 \text{ 에서}$$

k 에 대한 이차방정식

$$12k^2 + 8ak + a^2 = 0$$

을 풀면

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{-4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{12} \\
 &= \frac{-4a \pm 2|a|}{12}
 \end{aligned}$$

이때 $a > 3$ 이므로

$$k = -\frac{a}{2} \text{ 또는 } k = -\frac{a}{6}$$

(i), (ii)에서 실수 k 의 개수는 4이다.

(참)

이상에서 옳은 것은 \neg, D 이다.

정답 ③

22. 출제의도 : 순열의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$${}_8P_2 = 8 \times 7 = 56$$

정답 56

23. 출제의도 : 미분법을 이용하여 미분

계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = 3x^2 - 4x \text{ 이므로}$$

$$f'(3) = 3 \times 9 - 4 \times 3$$

$$= 27 - 12 = 15$$

정답 15

24. 출제의도 : 등차수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_5 = a_1 + 4d = 5 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$a_{15} = a_1 + 14d = 25 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{B} - \textcircled{A}$ 을 하면

$$10d = 20, \quad d = 2$$

$d = 2$ 를 \textcircled{A} 에 대입하면

$$a_1 + 4 \times 2 = 5$$

$$a_1 = -3$$

따라서

$$a_{20} = a_1 + 19d = -3 + 19 \times 2 = 35$$

정답 35

25. 출제의도 : 분할의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

3이 두 개 이상 포함되어야 하므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) 3이 2개만 포함된 경우

나머지 수는 홀수이어야 하므로

$$11 = 5 + 3 + 3$$

$$= 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

(ii) 3이 3개 포함된 경우

나머지 수는 홀수이어야 하므로

$$11 = 3 + 3 + 3 + 1 + 1$$

따라서 구하는 경우의 수는 3이다.

정답 3

26. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 주어진 전개식에서 x^4 의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(1+x)^5$ 의 전개식에서

x^4 의 계수는 ${}_5C_4 = 5$

x^3 의 계수는 ${}_5C_3 = 10$

이므로 $(1+2x)(1+x)^5$ 의 전개식에서

x^4 의 계수는

$$5 + 2 \times 10 = 25$$

정답 25

27. 출제의도 : 집합의 성질을 이용하여 집합의 원소의 개수의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서

$$A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B)$$

$$= \emptyset \cup (A \cap B)$$

$$= A \cap B$$

이므로

$$A \cap B \neq \emptyset$$

$$\text{즉, } n(A \cap B) \geq 1$$

조건 (다)에서

$$n(A - B) = 11$$

이므로

$$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) \geq 12$$

조건 (가)에서
 $n(U) = 25$ 이므로
 $n(A) + n(B-A) \leq n(U)$ 에서
 $n(B-A) \leq n(U) - n(A) \leq 13$
 따라서 $n(B-A)$ 의 최댓값은 13이다.

정답 13

28. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(4)$ 의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서
 $f(x) = a(x-1)(x-2)$ ($a \neq 0$)
 으로 놓을 수 있다.
 조건 (나)에서
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \{a(x-1)\} = a$
 이므로 $a = 4$
 따라서 $f(x) = 4(x-1)(x-2)$ 이므로
 $f(4) = 4 \times 3 \times 2 = 24$

정답 24

29. 출제의도 : 함수의 연속과 역함수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & (x < 1) \\ cx^2 + \frac{5}{2}x & (x \geq 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

이어야 한다.

이때,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax+b) = a+b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(cx^2 + \frac{5}{2}x \right) = c + \frac{5}{2}$$

$$f(1) = c + \frac{5}{2}$$

이므로

$$a+b = c + \frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하므로

$a > 0, c > 0$ 또는 $a < 0, c < 0$

이어야 한다.

(i) $a > 0, c > 0$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 증가하므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 일치한다. 이때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점 중 하나의 x 좌표가 1이므로

$$f(1) = f^{-1}(1) = 1$$

이어야 한다.

즉, $f(1) = c + \frac{5}{2} = 1$ 에서

$$c = -\frac{3}{2}$$

이것은 조건에 만족하지 않는다.

즉, $a > 0, c > 0$ 이 아니다.

(ii) $a < 0, c < 0$ 일 때,

함수

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & (x < 1) \\ cx^2 + \frac{5}{2}x & (x \geq 1) \end{cases}$$

에서

$$g(x) = ax+b(x < 1)$$

$$h(x) = cx^2 + \frac{5}{2}x(x \geq 1)$$

라 하자.

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하므로
두 함수 $g(x), h(x)$ 도 역함수가 존재한다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점 중 하나의 x 좌표가 -1 이므로

$$g(-1) = h^{-1}(-1)$$

이다.

즉, $h^{-1}(-1) = -a+b$ 이므로

$$h(-a+b) = -1 \text{에서}$$

$$c(-a+b)^2 + \frac{5}{2}(-a+b) = -1 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점 중 하나의 x 좌표가 2 이므로

$$h(2) = g^{-1}(2)$$

이다.

즉, $g^{-1}(2) = 4c+5$ 이므로

$$g(4c+5) = 2 \text{에서}$$

$$a(4c+5) + b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{M}$$

한편, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점 중 하나의 x 좌표가 1 이므로

$$h(1) = 1 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{즉, } h(1) = c + \frac{5}{2} = 1 \text{에서}$$

$$c = -\frac{3}{2}$$

$$c = -\frac{3}{2} \text{을 } \textcircled{L}, \textcircled{M}, \textcircled{N} \text{에 대입한 후 연립}$$

하면

$$a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서

$$a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}, c = -\frac{3}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned} & 2a+4b-10c \\ &= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \times \frac{3}{2} - 10 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= 20 \end{aligned}$$

정답 20

30. 출제의도 : 조건을 만족시키는 사차 함수를 사잇값의 정리 등을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$f(1) = f(1)f(2)$$

$$f(1) + f(2) = f(2)f(3)$$

$$f(1) + f(2) + f(3) = f(3)f(4)$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = f(4)f(5)$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = f(5)f(6)$$

이므로

$$f(1) = f(1)f(2) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$f(2) = f(2)\{f(3) - f(1)\} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$f(3) = f(3)\{f(4) - f(2)\} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$f(4) = f(4)\{f(5) - f(3)\} \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$$f(5) = f(5)\{f(6) - f(4)\} \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

조건 (나)에서

$$\frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} \leq 0, \quad \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} \leq 0$$

이므로

$$f(5) - f(3) \leq 0, \quad f(6) - f(4) \leq 0$$

그러므로 \textcircled{E} 에서

$$f(4) = 0 \text{ 또는 } f(3) = f(5)$$

또, \textcircled{D} 에서

$$f(5) = 0 \text{ 또는 } f(4) = f(6)$$

그러므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $f(4) = 0$ 이고 $f(5) = 0$ 인 경우

\textcircled{C} 에서

$$f(3) = -f(3)f(2)$$

이므로

$$f(3)=0 \text{ 또는 } f(2)=-1 \dots\dots \textcircled{B}$$

ⓐ에서 $f(3)=0$ 이면 ㉠과 ㉡은

$$f(1)=f(1)f(2)$$

$$f(2)=-f(1)f(2)$$

만약 $f(1)=0$ 이면 $f(2)=0$ 이고 $f(2)=0$

이면 $f(1)=0$ 이므로 사차방정식

$f(x)=0$ 은 서로 다른 5개의 근을 갖게 되어 모순이다.

그러므로

$$f(1) \neq 0, f(2) \neq 0$$

이때, $f(1)=-1, f(2)=1$

사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$ 은 1과 2 사이에 한 실근 k 를 갖는다.

이때,

$$f(x) = a(x-k)(x-3)(x-4)(x-5)$$

$$(a \neq 0, 1 < k < 2)$$

라 하면 $f(1)=-1, f(2)=1$ 에서

$$a(1-k) \times (-24) = -1$$

$$a(2-k) \times (-6) = 1$$

$$\text{즉, } a(1-k) = \frac{1}{24}, a(2-k) = -\frac{1}{6}$$

두 식을 변변 빼면

$$a = -\frac{5}{24}$$

이 값을 대입하면

$$-\frac{5}{24}(1-k) = \frac{1}{24}$$

$$k = \frac{6}{5}$$

그러므로

$$f(x) = -\frac{5}{24} \left(x - \frac{6}{5}\right)(x-3)(x-4)(x-5)$$

이다.

ⓐ에서 $f(2)=-1$ 인 경우 ㉠에서

$$f(1)=0$$

또, ㉡에서

$$-1 = -f(3)$$

$$f(3)=1$$

이때, $f(2)=-1, f(3)=1$ 이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$ 은 2와 3 사이에 적어도 한 실근을 갖는다.

이때, $f(x) = a(x-k)(x-1)(x-4)(x-5)$ ($a \neq 0, 2 < k < 3$)라 하면

$$f(2)=-1, f(3)=1 \text{에서 } a = \frac{5}{12}, k = \frac{12}{5}$$

그러나 $f(6)-f(4) \leq 0$ 을 만족하지 않으므로 모순이다.

(ii) $f(4)=0$ 이고 $f(4)=f(6)$ 인 경우

이때, $f(6)=0$

ⓐ에서

$$f(3) = -f(3)f(2)$$

이므로

$$f(3)=0 \text{ 또는 } f(2)=-1 \dots\dots \textcircled{B}$$

$f(3)=0$ 이면 ㉠, ㉡에서

$$f(1)=f(1)f(2)$$

$$f(2)=-f(2)f(1)$$

이때, $f(1)=0$ 이면 $f(2)=0$ 이고

$f(2)=0$ 이면 $f(1)=0$ 이므로

사차방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 5개의 근을 갖게 되어 모순이다.

그러므로

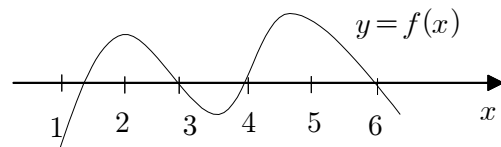
$$f(1) \neq 0, f(2) \neq 0$$

이때,

$$f(1)=-1, f(2)=1$$

사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$ 은 1과 2 사이에 적어도 한 실근을 갖는다.

이때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때, 조건 (나)의 $\frac{f(5)-f(3)}{5-3} \leq 0$ 을 만족시키지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 없다.

㉔에서 $f(2) = -1$ 인 경우 ㉑에서

$$f(1) = 0$$

또, ㉒에서

$$-1 = -f(3)$$

$$f(3) = 1$$

이때, $f(2) = -1$, $f(3) = 1$ 이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x) = 0$ 은 2와 3 사이에 적어도 한 실근을 갖는다.

$$f(4) = 0, f(6) = 0, f(1) = 0$$
이고

㉓에서 $f(5) = 0$ 이므로 사차방정식은 서로 다른 5개의 근을 갖게 되어 모순이다.

(iii) $f(3) = f(5)$ 이고 $f(5) = 0$ 인 경우

$$\text{이때, } f(3) = 0$$

㉒에서

$$f(4) = 0$$

한편, ㉑과 ㉒에서

$$f(1) = f(1)f(2)$$

$$f(2) = -f(2)f(1)$$

만약 $f(1) = 0$ 이면 $f(2) = 0$ 이고

$f(2) = 0$ 이면 $f(1) = 0$ 이므로

사차방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 5개의 근을 갖게 되어 모순이다.

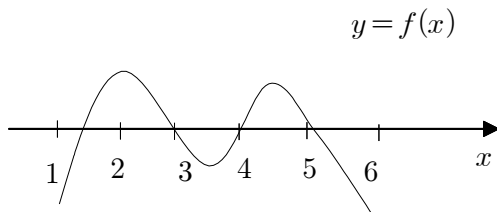
그러므로

$$f(1) \neq 0, f(2) \neq 0$$

$$\text{이때, } f(1) = -1, f(2) = 1$$

사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x) = 0$ 은 1과 2 사이에 적어도 한 실근을 갖는다.

이때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때, (i)에서

$$f(x) = -\frac{5}{24}\left(x - \frac{6}{5}\right)(x-3)(x-4)(x-5)$$

(iv) $f(3) = f(5)$ 이고 $f(4) = f(6)$ 인 경우

㉒과 ㉓에서

$$f(4) = 0, f(5) = 0$$

그러므로

$$f(3) = 0, f(6) = 0$$

한편, 한편, ㉑과 ㉒에서

$$f(1) = f(1)f(2)$$

$$f(2) = -f(2)f(1)$$

만약 $f(1) = 0$ 이면 $f(2) = 0$ 이고

$f(2) = 0$ 이면 $f(1) = 0$ 이므로

사차방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 6개의 근을 갖게 되어 모순이다.

그러므로

$$f(1) \neq 0, f(2) \neq 0$$

$$\text{이때, } f(1) = -1, f(2) = 1$$

사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x) = 0$ 은 1과 2 사이에 적어도 한 실근을 갖는다.

이는 사차방정식 $f(x) = 0$ 이 5개 이상의 근을 갖게 되어 모순이다.

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)로부터

$$\begin{aligned} & 128 \times f\left(\frac{5}{2}\right) \\ &= 2^7 \times \left(-\frac{5}{24}\right) \times \frac{13}{10} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) \\ &= 2^7 \times \frac{13 \times 5}{2^7} \\ &= 65 \end{aligned}$$

정답 65