2019학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

수학영역 가형 정답 및 풀이

01. ④	02. ④	03. ③	04. ②	05. ③
06. ①	07. ④	08. ③	09. ①	10. ⑤
11. ②	12. ⑤	13. ②	14. ②	15. ⑤
16. ①	17. ①	18. ④	19. ③	20. ③
21. ④	22. 14	23. 49	24. 3	
25. 17	26. 96	27. 33	28. 48	
29. 31	30. 16			

1. **출제의도** : 순열의 수를 계산할 수 있는가?

정답 풀이 :

${}_8\mathrm{P}_2=8\times7=56$

정답 ④

2. **출제의도** : 로그함수의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+12x)}{3x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+12x)}{12x}\times\frac{12x}{3x}\right\}$$

$$=1\times4=4$$

정답 ④

3. **출제의도** : 미분계수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=e^{3x-2}$에서

$f'(x)=e^{3x-2}\times(3x-2)'$

$\quad=3e^{3x-2}$

이므로

$f'(1)=3e^{3-2}=3e$

정답 ③

4. **출제의도** : 확률의 기본계산을 할 수 있는가?

정답 풀이 :

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

이때 $A^C\cup B=(A\cap B)^C$이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cup B)=1-\mathrm{P}(A\cap B^C)$$

$$=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$$

정답 ②

5. **출제의도** : 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{36}=1$의 두 초점의 좌표는

$(\sqrt{a^2+36},0)$, $(-\sqrt{a^2+36},0)$

이고 두 초점 사이의 거리가 $6\sqrt{6}$이므로

$2\sqrt{a^2+36}=6\sqrt{6}$, $a^2+36=54$

따라서 $a^2=18$

정답 ③

6. **출제의도** : 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(\pi+h)-f(\pi)\}-\{f(\pi-h)-f(\pi)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}+\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}\right\}$$

$$=f'(\pi)+f'(\pi)$$

$=2f'(\pi)$

$f(x)=\tan 2x+3\sin x$에서

$f'(x)=2\sec^2 2x+3\cos x$이므로

$2f'(\pi)=2(2\sec^2 2\pi+3\cos\pi)$

$=2\{2\times 1^2+3\times(-1)\}$

$=-2$

정답 ①

7. 출제의도 : 지수부등식을 풀 수 있는가?

정답 풀이 :

$\frac{27}{9^x}=\frac{3^3}{3^{2x}}=3^{3-2x}$이므로 주어진 부등식은

$3^{3-2x}\geq 3^{x-9}$

이때 밑 3이 1보다 크므로

$3-2x\geq x-9$

$12\geq 3x$

$x\leq 4$

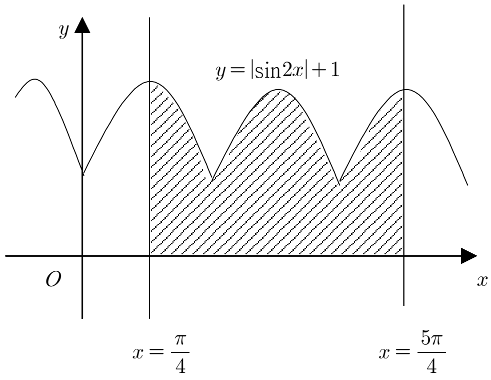
따라서 구하는 모든 자연수 x의 개수는 4이다.

정답 ④

8. 출제의도 : 곡선과 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=|\sin 2x|+1$과 x축 및 두 직선 $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{5\pi}{4}$로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.



따라서 구하고자 하는 넓이는

$$4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x+1)dx$$

$$=4\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=4\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=\pi+2$$

정답 ③

9. 출제의도 : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 (a,b)가 곡선 $e^x-e^y=y$ 위의 점이므로

$e^a-e^b=b$ ⋯ ㉠

$e^x-e^y=y$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$e^x-e^y\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{e^y+1}$$

점 (a,b)에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$\frac{e^a}{e^b+1}=1$$

$e^a=e^b+1$

$e^a-e^b=1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $b=1$이고

$e^a=e+1$에서 $a=\ln(e+1)$

따라서

$a+b=1+\ln(e+1)$

정답 ①

10. 출제의도 : 수학적 확률을 구할 수 있는가?

정답 풀이 :

전체 9명 중에서 3명을 선택하는 모든 경우의 수는

$${}_9\mathrm{C}_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

선택된 3명 모두 근무조 A에 속하는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$$

선택된 3명 모두 근무조 B에 속하는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$$

따라서 선택된 3명 중 근무조 A와 근무조 B에서 적어도 한 명씩 선택되는 경우의 수는

$$84-(10+4)=70$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{70}{84}=\frac{5}{6}$$

정답 ⑤

11. 출제의도 : 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x^2-1=t$라 하면 $2x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{2}(t+1)\sqrt{t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}})dt$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2}{5}+\frac{2}{3})$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{16}{15}=\frac{8}{15}$$

정답 ②

12. 출제의도 : 곡선의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=\dfrac{1}{8}e^{2x}+\dfrac{1}{2}e^{-2x}$에서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{8}e^{2x}\times2+\frac{1}{2}e^{-2x}\times(-2)$$

$$=\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}$$

이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\ln2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\ln2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\ln2}\sqrt{\frac{1}{16}e^{4x}+\frac{1}{2}+e^{-4x}}\,dx$$

$$=\int_0^{\ln2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\ln2}\left(\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\ln2}$$

$$=\left(\frac{1}{8}e^{2\ln 2}-\frac{1}{2}e^{-2\ln 2}\right)-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{8}e^{\ln 4}-\frac{1}{2}e^{\ln\frac{1}{4}}\right)-\left(-\frac{3}{8}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{8}\times 4-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+\frac{3}{8}$$
$$=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$$

정답 ⑤

13. **출제의도** : 평면 운동을 하는 점의 속도와 가속도를 구할 수 있는가?

정답 풀이 :

$t=\alpha$에서의 점 P의 속도는

$$\vec{v}=(2+\sin\alpha,\ -\cos\alpha)$$

$t=\alpha$에서의 점 P의 가속도는

$$\vec{a}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$$

이때

$$\vec{v}\cdot\vec{a}=(2+\sin\alpha)\cos\alpha-\cos\alpha\sin\alpha$$
$$=2\cos\alpha$$

이므로 $2\cos\alpha=1$에서

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}$$

$0<\alpha<\pi$이므로

$$\alpha=\frac{\pi}{3}$$

정답 ②

14. **출제의도** : 로그방정식을 이용하여 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$A(k,\log_2 k)$, $B(k,-\log_2(8-k))$ 이고

$\overline{AB}=2$ 이므로

$|\log_2 k+\log_2(8-k)|=2$

$|\log_2 k(8-k)|=2$

$\log_2 k(8-k)=-2$ 또는 $\log_2 k(8-k)=2$

(i) $\log_2 k(8-k)=-2$일 때

$k(8-k)=\frac{1}{4}$, $4k^2-32k+1=0$

이때 $0<k<8$이므로

$k=\frac{8-3\sqrt{7}}{2}$ 또는 $k=\frac{8+3\sqrt{7}}{2}$

(ii) $\log_2 k(8-k)=2$일 때

$k(8-k)=4$, $k^2-8k+4=0$

이때 $0<k<8$이므로

$k=4-2\sqrt{3}$ 또는 $k=4+2\sqrt{3}$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 k의 값의 곱은

$$\left(\frac{8-3\sqrt{7}}{2}\right)\left(\frac{8+3\sqrt{7}}{2}\right)(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})$$
$$=\frac{1}{4}\times 4=1$$

정답 ②

15. **출제의도** : 정적분의 기본정리와 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2+1}{x}\int_1^{x+1}f(t)dt\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+1}{x}\{F(x+1)-F(1)\}\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{(x^2+1)\times\frac{F(x+1)-F(1)}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}(x^2+1)\times\lim_{x\to 0}\frac{F(x+1)-F(1)}{x}$$

$=(0+1)\times F'(1)$
$=1\times f(1)$
$=f(1)=3$
$f(x)=a\cos(\pi x^2)$에서
$f(1)=a\cos\pi=-a=3$
이므로 $a=-3$이고 $f(x)=-3\cos(\pi x^2)$
따라서
$f(a)=f(-3)=-3\cos(9\pi)=-3\times(-1)=3$

정답 ⑤

16. **출제의도** : 삼각함수의 극한을 이용하여 도형에서의 극한을 구할 수 있는가?

정답 풀이 :
$\overline{\mathrm{OP}}=1$이므로

$$\overline{\mathrm{OH}}=\cos\theta$$

점 Q에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 R라 하면

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{QR}}=\frac{\cos\theta}{2}\times\overline{\mathrm{QR}}$$

한편, 엇각의 성질에 의해 $\angle\mathrm{HQR}=\theta$이므로 $\overline{\mathrm{QR}}=a$라 하면

$$\overline{\mathrm{RH}}=\overline{\mathrm{QR}}\times\tan\theta=a\tan\theta$$
$$\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{OH}}-\overline{\mathrm{RH}}=\cos\theta-a\tan\theta$$

이때 $\overline{\mathrm{QR}}^2+\overline{\mathrm{OR}}^2=1$이므로

$$a^2+(\cos\theta-a\tan\theta)^2=1$$

$$(\tan^2\theta+1)a^2-2a\cos\theta\tan\theta+\cos^2\theta-1=0$$

이때 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$, $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$,
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 위 등식은

$$a^2\sec^2\theta-2a\sin\theta-\sin^2\theta=0$$

위 등식의 양변에 $\cos^2\theta$를 곱하면

$$a^2-2a\sin\theta\cos^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta=0$$

이때 $a>0$이므로 근의 공식에 의해

$$a=\sin\theta\cos^2\theta+\sqrt{\sin^2\theta\cos^4\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$a=\sin\theta\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta\sqrt{\cos^2\theta+1}$$

따라서

$$S(\theta)=\frac{a}{2}\cos\theta$$

$$=\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{2}(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+1})$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{2\theta}(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+1})\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\{\cos^2\theta(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+1})$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\{1^2\times(1+\sqrt{1^2+1})\}$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

정답 ①

17. **출제의도** : 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$\overline{BC}=\overline{BF}$ 이므로
$\angle CFB=\angle BCF=\theta'$
이라 하자.
또한, $\overline{BF}=a$ 에서 $\overline{BC}=a$ 이므로
$C(0,a+b)$
따라서 삼각형 COF에서

$$\tan\theta' = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} = \frac{1}{16},\quad \frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{1}{16}$$

즉, $b = \frac{15}{17}a$

또한, 삼각형 COA에서

$$\tan(\theta+\theta') = \frac{\tan\theta + \tan\theta'}{1-\tan\theta\tan\theta'} = \frac{\tan\theta + \frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}\tan\theta}$$

$$\tan(\theta+\theta') = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{a+\frac{15}{17}a} = \frac{17}{32}$$

이므로

$$\frac{\tan\theta + \frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}\tan\theta} = \frac{17}{32},$$

$$32\tan\theta + 8 = 17 - \frac{17}{4}\tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{36}{145}$$

정답 ①

18. **출제의도** : 삼각함수의 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
주사위를 두 번 던져서 나올 수 있는 경우의 수는 $6^2 = 36$이다.
$\overline{\mathrm{AB}} = 8$이고 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH의 길이는 점 C의 x좌표의 절댓값과 같다. 즉,

$$\overline{\mathrm{CH}} = \left| m\cos\frac{n\pi}{3} \right|$$

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면 m은 자연수이므로

$$S = \frac{1}{2} \times 8 \times \left| m\cos\frac{n\pi}{3} \right| = 4m\left| \cos\frac{n\pi}{3} \right|$$

$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$일 때 $\left| \cos\frac{n\pi}{3} \right|$의 값은 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1이므로 m의 값에 따라 $S < 12$인 경우를 구해 보자.

(i) $m = 1$, 2일 때
 $4m \leq 8$이므로 $1 \leq n \leq 6$일 때 $S < 12$이고, 순서쌍 (m, n)의 개수는 $2 \times 6 = 12$이다.

(ii) $m = 3$, 4, 5일 때
 $12 \leq 4m \leq 20$이므로 $\left| \cos\frac{n\pi}{3} \right| < 1$
즉, $n = 1, 2, 4, 5$일 때 $S < 12$이고, 순서쌍 (m, n)의 개수는 $3 \times 4 = 12$이다.

(iii) $m = 6$일 때
 $S = 24\left| \cos\frac{n\pi}{3} \right|$이므로 $S < 12$가 될 수 없다.

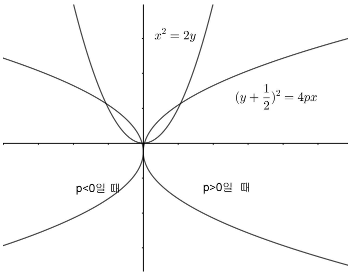
(i), (ii), (iii)에서 $S < 12$인 경우의 수는
$12 + 12 = 24$
이므로 구하는 확률은

$$\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

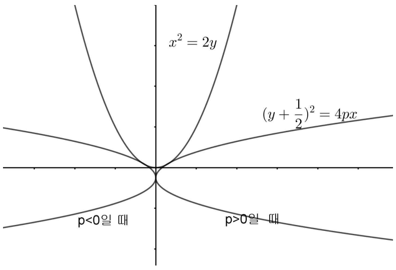
정답 ④

19. **출제의도** : 두 포물선에 동시에 접하는 직선의 개수를 구하여 문제를 해결할 수 있는가?

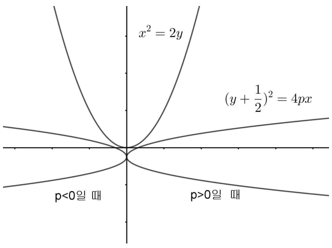
정답 풀이 :



[그림1]



[그림2]



[그림3]

[그림1]과 같이 두 포물선이 두 점에서 만나면 두 포물선에 동시에 접하는 직선의 개수는 1,
[그림2]와 같이 두 포물선이 한 점에서 만나면 두 포물선에 동시에 접하는 직선의 개수는 2,
[그림3]과 같이 두 포물선이 만나지 않으면 두 포물선에 동시에 접하는 직선의 개수는 3이다.
두 포물선이 한 점에서만 만날 때, 교점의 좌표 (a,b)를 구하자.
(i) 점 (a,b)가 두 곡선 위의 점이므로

$$a^2 = 2b\text{이고 } \left(b+\frac{1}{2}\right)^2 = 4pa$$

따라서 $\left(\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 = 4pa$이므로

$$(a^2+1)^2 = 16pa \ \cdots \ ㉠$$

(ii) 두 곡선 위의 점 (a,b)에서의 접선의 기울기가 서로 같아야 한다.

$x^2 = 2y$, 즉 $y = \frac{x^2}{2}$에서

$$\frac{dy}{dx} = x \ \cdots \ ㉡$$

$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 4px$의 양변을 x로 미분하면

$$2\left(y+\frac{1}{2}\right)\frac{dy}{dx} = 4p$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4p}{2y+1} \ \cdots \ ㉢$$

$x = a$, $y = b$일 때의 ㉡, ㉢의 값이 서로 같아야 하므로

$$a = \frac{4p}{2b+1}$$

이때 $2b = a^2$이므로

$$4p = a(a^2+1) \ \cdots \ ㉣$$

㉠, ㉣에서

$$(a^2+1)^2 = 4a^2(a^2+1)$$

이때 $a^2+1 > 0$이므로

$$a^2+1 = 4a^2$$

$$a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

㉣에서

$$a = \frac{\sqrt{3}}{3}\text{일 때, } p = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$a = -\frac{\sqrt{3}}{3}\text{일 때, } p = -\frac{\sqrt{3}}{9}$$

이므로 함수 $f(p)$ $(p \neq 0)$은 다음과 같다.

$p < -\dfrac{\sqrt{3}}{9}$이면 $f(p)=1$,

$p=-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$이면 $f(p)=2$,

$-\dfrac{\sqrt{3}}{9}<p<0$이면 $f(p)=3$,

$0<p<\dfrac{\sqrt{3}}{9}$이면 $f(p)=3$,

$p=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$이면 $f(p)=2$,

$p>\dfrac{\sqrt{3}}{9}$이면 $f(p)=1$

따라서 $\lim\limits_{p\to k+} f(p)=f(k)$를 만족시키는 실수 k의 값은 $-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$이다.

정답 ③

20. 출제의도 : 중복조합의 수를 구하는 과정에서 빈칸에 들어가는 식 또는 수를 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

음이 아닌 정수 a, b, c, d가 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키려면 음이 아닌 정수 k에 대하여 $c+d=2k$이어야 한다.

$c+d=2k$인 경우는 (1) 음이 아닌 정수 k_1, k_2에 대하여 $c=2k_1$, $d=2k_2$인 경우이거나 (2) 음이 아닌 정수 k_3, k_4에 대하여 $c=2k_3+1$, $d=2k_4+1$인 경우이다.

(1) $c=2k_1$, $d=2k_2$인 경우:

$2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$2a+2b+2k_1+2k_2=2n$

에서 $a+b+k_1+k_2=n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, k_1, k_2의 모든 순서쌍 (a, b, k_1, k_2)의 개수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_n={}_{n+3}\mathrm{C}_n=\boxed{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}$이다.

(2) $c=2k_3+1$, $d=2k_4+1$인 경우:

$2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$2a+2b+(2k_3+1)+(2k_4+1)=2n$

에서 $a+b+k_3+k_4=n-1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, k_3, k_4의 모든 순서쌍 (a, b, k_3, k_4)의 개수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_{n-1}={}_{n+2}\mathrm{C}_{n-1}=\boxed{{}_{n+2}\mathrm{C}_3}$이다.

(1), (2)에 의하여 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수 a_n은

$$a_n={}_{n+3}\mathrm{C}_3+{}_{n+2}\mathrm{C}_3$$

이다. 자연수 m에 대하여

$$\sum_{n=1}^{m} {}_{n+2}\mathrm{C}_3={}_{m+3}\mathrm{C}_4$$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{8} a_n &= \sum_{n=1}^{8} {}_{n+3}\mathrm{C}_3+\sum_{n=1}^{8} {}_{n+2}\mathrm{C}_3\\ &=({}_{12}\mathrm{C}_4-1)+{}_{11}\mathrm{C}_4\\ &=(495-1)+330\\ &=\boxed{824}\end{aligned}$$

$f(n)={}_{n+3}\mathrm{C}_3$, $g(n)={}_{n+2}\mathrm{C}_3$, $r=824$이므로

$f(6)+g(5)+r$

$={}_9\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_3+824$

$=84+35+824$

$=943$

정답 ③

21. 출제의도 : 함수의 그래프와 미분가능하지 않을 조건을 이용하여 합성함수가 연속이 될 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x & (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}) \\ \cos x & (\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$ 에서

$$f'(x)=\begin{cases} 6\sin^2 x\cos x & (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}) \\ -\sin x & (\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

이므로

$f'(x)=0$

에서

$x=0$ 또는 $x=\pi$

이때, $f'(0)=0$ 이지만 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)>0$ 이므로 $x=0$에서 극값을 갖지 않고 $x=\pi$ 에서는 극솟값 $f(\pi)=-1$을 갖는다.

또한,

$f(\frac{\pi}{4})=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)$ 이고

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}f'(x)=\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

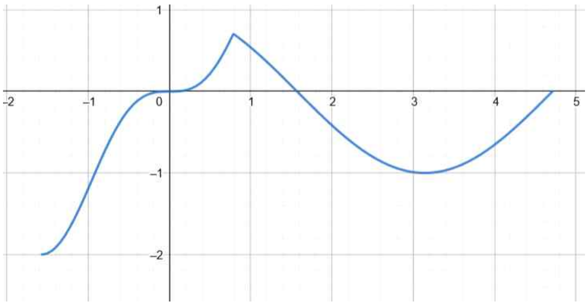
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}f'(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극댓값

$f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$을 갖는다.

그리고, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+}f(x)=-2$,

$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}-}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



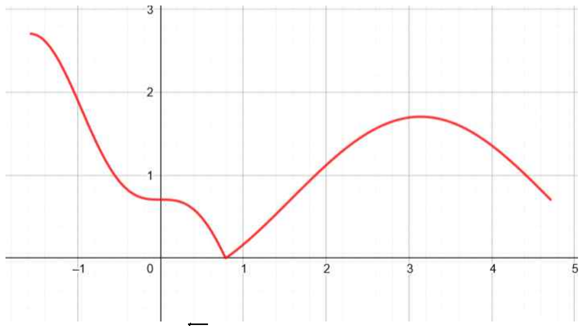
이때 $G(x)=|f(x)-t|$라 하면

$$(\sqrt{G(x)})'=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{G(x)}}\times G'(x)$$

이므로 함수 $\sqrt{G(x)}$는 $G(x)$가 미분가능하지 않는 x의 값과 $G(x)=0$인 x의 값에서 미분가능하지 않다.

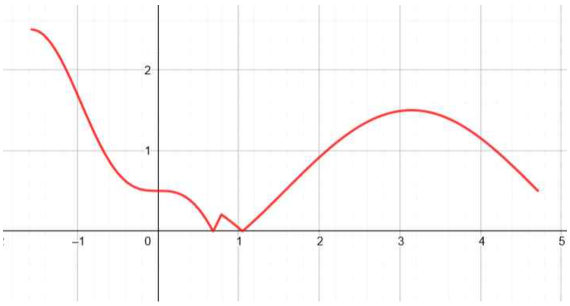
(i) $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

함수 $G(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 1이다.



(ii) $0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

함수 $G(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 3이다.



(iii) $t=0$일 때

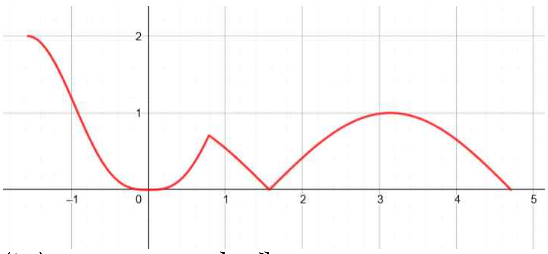
함수 $G(x)=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.

이때, $i(x)=\sqrt{|2\sin^3 x|}$라 하면

$$i'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{i(0+h)-i(0)}{h}$$

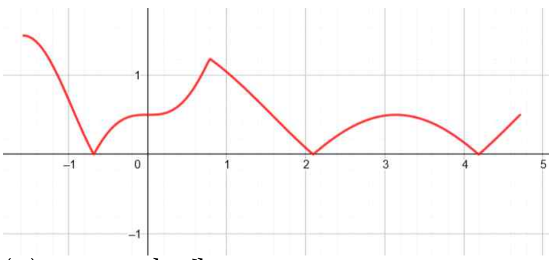
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|2\sin^3 h|}}{h}=0$$

이므로 $x=0$에서는 미분이 가능하다. 따라서, 조건을 만족시키는 k의 개수는 2이다.



(iv) $-1<t<0$일 때

함수 $G(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 4이다.



(v) $t=-1$일 때

함수 $G(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같다.

이때, $j(x)=\sqrt{|\cos x+1|}$라 하면

$$\lim_{h\to 0-}\frac{j(\pi+h)-j(\pi)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{|\cos(\pi+h)+1|}-\sqrt{|\cos\pi+1|}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{|-\cos h+1|}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{-\cos h+1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\left(-\sqrt{\frac{1-\cos h}{h^2}}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0-}\left\{-\sqrt{\frac{\sin^2 h}{h^2(1+\cos h)}}\right\}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{j(\pi+h)-j(\pi)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{|\cos(\pi+h)+1|}-\sqrt{|\cos\pi+1|}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{|-\cos h+1|}}{h}$$

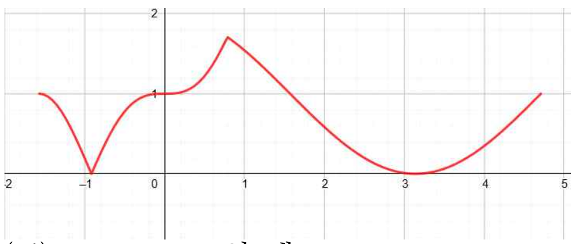
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{-\cos h+1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\left(\sqrt{\frac{1-\cos h}{h^2}}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0+}\sqrt{\frac{\sin^2 h}{h^2(1+\cos h)}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

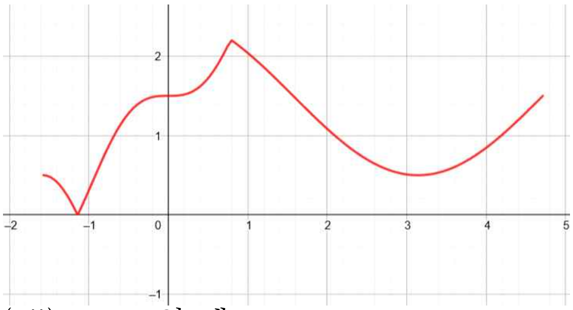
즉, $x=\pi$에서 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 3이다.



(vi) $-2<t<-1$일 때

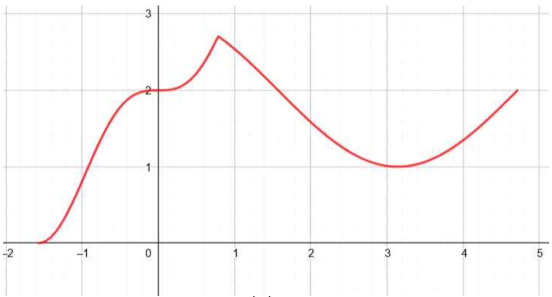
함수 $G(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과

같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 2이다.

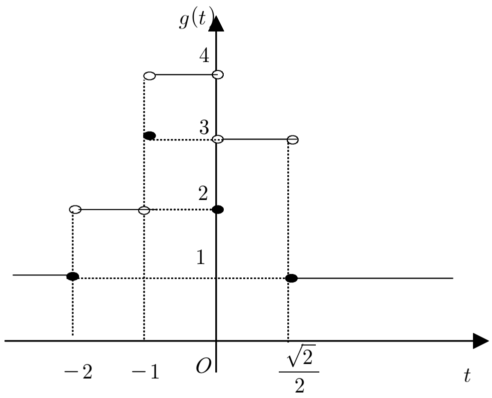


(vii) $t \le -2$일 때

함수 $G(x)=|f(x)-t|$의 그래프는 그림과 같으므로 조건을 만족시키는 k의 개수는 1이다.



따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



그런데, 합성함수 $(h \circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되어야 하므로

$$\lim_{t \to \frac{\sqrt{2}}{2}-} (h \circ g)(t) = \lim_{t \to \frac{\sqrt{2}}{2}+} (h \circ g)(t) = (h \circ g)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

즉, $h(3)=h(1)\cdots$㉠

$$\lim_{t \to 0-} (h \circ g)(t) = \lim_{t \to 0+} (h \circ g)(t) = (h \circ g)(0)$$

즉, $h(4)=h(3)=h(2)\cdots$㉡

$$\lim_{t \to -1-} (h \circ g)(t) = \lim_{t \to -1+} (h \circ g)(t) = (h \circ g)(-1)$$

즉, $h(2)=h(4)=h(3)\cdots$㉢

$$\lim_{t \to -2-} (h \circ g)(t) = \lim_{t \to -2+} (h \circ g)(t) = (h \circ g)(-2)$$

즉, $h(1)=h(2)\cdots$㉣

따라서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 의하여

$h(1)=h(2)=h(3)=h(4)$

이므로

$h(1)=h(2)=h(3)=h(4)=k$

라 하면 사차함수 $h(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+k$

또한,

$a=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$,

$b=g(0)=2$, $c=g(-1)=3$

이므로

$h(a+5)-h(b+3)+c$

$=h(6)-h(5)+3$

$=(5\times4\times3\times2+k)-(4\times3\times2\times1+k)+3$

$=(120+k)-(24+k)+3$

$=99$

정답 ④

22. **출제의도** : 평면벡터의 연산을 할 수 있는가?

정답 풀이 :

$\vec{a}+2\vec{b}=(2,4)+2(1,3)$

$=(2,4)+(2,6)=(4,10)$

따라서 모든 성분의 합은

$4+10=14$

정답 14

23. **출제의도** : 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sec^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$=\frac{1}{(\frac{1}{7})^2}$$
$$=49$$

정답 49

24. **출제의도** : 자연수를 분할하는 방법의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

자연수 11을 홀수인 자연수로 분할할 때, 자연수 3이 두 개 이상 포함하도록 분할하는 경우는

$$11=3+3+1+1+1+1+1$$
$$=3+3+3+1+1$$
$$=3+3+5$$

이므로 구하는 경우의 수는 3이다.

정답 3

[다른 풀이]

$11-(3+3)=5$이므로 구하는 경우의 수는 자연수 5를 홀수인 자연수로 분할하는 경우의 수와 같다.

$5=1+1+1+1+1=3+1+1$

이므로 구하는 경우의 수는 3이다.

정답 3

25. **출제의도** : 역함수의 미분법을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답 풀이 :

곡선 $y=g(x)$가 점 $(3,0)$을 지나므로

$$g(3)=0$$

따라서 $f(0)=3$이므로 역함수의 미분법에 의해

$$g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(0)}$$

$f'(x)=15e^{5x}+1+\cos x$에서

$$f'(0)=15+1+1=17$$

이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{g(x)-g(3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{\frac{g(x)-g(3)}{x-3}}$$
$$=\frac{1}{\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}}$$
$$=\frac{1}{g'(3)}=f'(0)=17$$

정답 17

26. **출제의도** : 변곡점이 될 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $(2,a)$가 곡선 $y=\frac{2}{x^2+b}(b>0)$의 변곡점이므로

$$\frac{2}{b+4}=a\cdots㉠$$

또한,

$$y'=\frac{-4x}{(x^2+b)^2}$$

$$y''=\frac{-4(x^2+b)^2+4x\times2(x^2+b)\times2x}{(x^2+b)^4}$$

$$= \frac{-4(x^2+b)+16x^2}{(x^2+b)^3}$$

$$= \frac{12x^2-4b}{(x^2+b)^3}$$

이므로

$$\frac{12\times 2^2-4b}{(2^2+b)^3} = \frac{48-4b}{(b+4)^3} = 0$$

즉, $b=12$ 이므로 ㉠에 대입하여 정리하면

$$a = \frac{1}{8}$$

따라서 $\frac{b}{a} = \frac{12}{\frac{1}{8}} = 96$

정답 96

27. 출제의도 : 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 조건을 만족하는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) a가 네 번 나오는 경우

네 개의 a를 일렬로 나열하는 경우의 수는 1이다.

(ii) a가 세 번 나오는 경우

a가 3개, b가 1개이거나 a가 3개, c가 1개인 경우이므로 그 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{3!} = 4+4=8$$

(iii) a가 두 번 나오는 경우

먼저 a가 2개, b가 2개이거나 a가 2개, c가 2개인 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\,2!} + \frac{4!}{2!\,2!} = 6+6=12$$

a가 2개, b가 1개, c가 1개인 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

이므로 이 경우의 수는

$$12+12=24$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$1+8+24=33$$

정답 33

28. 출제의도 : 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$n=3k$ 또는 $n=3k+1$ 또는 $n=3k+2$ (k는 자연수)일 때 b가 3의 배수인 사건의 수는

$3+6+9+\cdots+3k$

$=3(1+2+3+\cdots+k)$

$= \frac{3}{2}k(k+1)$

이 중에서 $a=b$인 사건의 수는

k

이므로

$$\frac{k}{\frac{3}{2}k(k+1)} = \frac{1}{9},\ \frac{2}{k+1} = \frac{1}{3}$$

$k+1=6,\ k=5$

따라서, 모든 자연수 n의 값의 합은

$15+16+17=48$

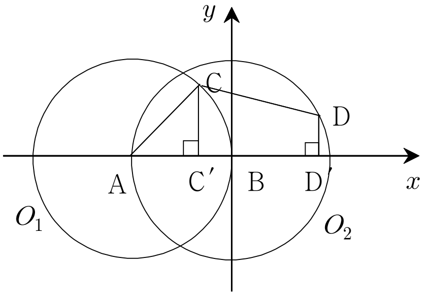
정답 48

29. 출제의도 : 평면벡터의 내적의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표평면에서 두 점 A, B의 좌표를 각각

$(-5, 0)$, $(0, 0)$이라 하자.



점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 C′이라 하자. 점 C는 원 O_1 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=5$이고, (가)에서 $\cos(\angle\mathrm{CAB})=\frac{3}{5}$이므로

$\overline{\mathrm{AC'}}=3$이다. 이때 $\overline{\mathrm{C'B}}=2$이므로 $\mathrm{C'}(-2, 0)$이고 $\mathrm{C}(-2, 4)$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=30$에서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$가 이루는 각을 θ라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{CD}}|\cos\theta=30$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=5$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|\cos\theta=6$

점 D에서 x축에 내린 수선의 발을 D′이라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|\cos\theta=|\overrightarrow{C'D'}|=6$이다.

따라서 $\mathrm{D'}(4, 0)$이다. $\overline{\mathrm{BD}}=5$이고, $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|<9$이므로 $\mathrm{D}(4, 3)$이다.

선분 CD를 지름으로 하는 원의 중심을 E, 반지름의 길이를 r라 하면 $\mathrm{E}\left(1, \frac{7}{2}\right)$이고

$$r=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{37}}{2}$$

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$이고

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\\ &=(\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})\\ &=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{PM}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})+\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}\\ &=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{PM}}\cdot\vec{0}-|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2\\ &=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2-\frac{25}{4}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|$의 최댓값은

$$|\overrightarrow{\mathrm{EM}}|+r=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2}+\frac{\sqrt{37}}{2}$$
$$=\frac{7\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}$$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값은

$$\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$$
$$=\left(\frac{49}{2}+\frac{7\sqrt{74}}{2}+\frac{37}{4}\right)-\frac{25}{4}$$
$$=\frac{55}{2}+\frac{7}{2}\sqrt{74}$$

$a=\frac{55}{2}$, $b=\frac{7}{2}$이므로

$$a+b=\frac{55}{2}+\frac{7}{2}=31$$

정답 31

30. **출제의도** : 함수의 성질과 부분적분법을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답 풀이 :

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$
$$y=f'(t)x-tf'(t)+f(t)$$

따라서 접선의 y절편은

$$g(t)=f(t)-tf'(t)$$

이므로 $f(t)=g(t)+tf'(t)$에서

$$\int_{-4}^{4}f(t)dt=\int_{-4}^{4}g(t)dt+\int_{-4}^{4}tf'(t)dt \quad \cdots ㉠$$

이때

$$\int_{-4}^{4}tf'(t)dt=[tf(t)]_{-4}^{4}-\int_{-4}^{4}f(t)dt$$

$=\{4f(4)-(-4)f(-4)\}-\int_{-4}^{4}f(t)dt$

$=4\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4}f(t)dt$

이므로

$2\int_{-4}^{4}f(t)dt=\int_{-4}^{4}g(t)dt+4\{f(4)+f(-4)\}$

따라서

$2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4}f(t)dt=-\frac{1}{2}\int_{-4}^{4}g(t)dt$

$\cdots$ ㉡

한편, $g(t)=f(t)-tf'(t)$에서

$\int_{0}^{1}g(t)dt=\int_{0}^{1}f(t)dt-\int_{0}^{1}tf'(t)dt$

이고

$\int_{0}^{1}tf'(t)dt=[tf(t)]_0^1-\int_{0}^{1}f(t)dt$

$=f(1)-0-\frac{\ln10}{4}=4+\frac{\ln17}{8}-\frac{\ln10}{4}$

이므로

$\int_{0}^{1}g(t)dt=-\frac{\ln10}{4}-\left(4+\frac{\ln17}{8}-\frac{\ln10}{4}\right)$

$=-4-\frac{\ln10}{2}-\frac{\ln17}{8}$

한편, $(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\}=2t$에서

$$g(t+1)-g(t)=\frac{2t}{t^2+1}$$

이므로

$$g(t+1)=g(t)+\frac{2t}{t^2+1}\quad\cdots ㉢$$

한편, 실수 전체의 집합에서 연속인 임의의 함수 $h(x)$는 임의의 실수 n에 대하여

$$\int_{n}^{n+1}h(x)dx=\int_{n-1}^{n}h(x+1)dx$$

를 만족시키므로 ㉢에서

$$\int_{n}^{n+1}g(t)dt=\int_{n-1}^{n}g(t+1)dt$$

$=\int_{n-1}^{n}\left\{g(t)+\frac{2t}{t^2+1}\right\}dt$

$=\int_{n-1}^{n}g(t)dt+\int_{n-1}^{n}\frac{2t}{t^2+1}dt$

이때

$\int_{n-1}^{n}\frac{2t}{t^2+1}dt=\left[\ln(t^2+1)\right]_{n-1}^{n}$

$=\ln(n^2+1)-\ln\{(n-1)^2+1\}$

이므로

$\int_{0}^{1}g(t)dt=-4-\frac{\ln10}{2}-\frac{\ln17}{8}=A$라 하면

$\int_{1}^{2}g(t)dt=A+(\ln2-\ln1)=A+\ln2$

$\int_{2}^{3}g(t)dt=\int_{1}^{2}g(t)dt+(\ln5-\ln2)$

$=(A+\ln2)+(\ln5-\ln2)=A+\ln5$

$\int_{3}^{4}g(t)dt=\int_{2}^{3}g(t)dt+(\ln10-\ln5)$

$=(A+\ln5)+(\ln10-\ln5)=A+\ln10$

한편, $\int_{0}^{1}g(t)dt=\int_{-1}^{0}g(t)dt+(\ln1-\ln2)$

이므로

$$\int_{-1}^{0}g(t)dt=A+\ln2$$

마찬가지로,

$\int_{-2}^{-1}g(t)dt=\int_{-1}^{0}g(t)dt-(\ln2-\ln5)$

$=(A+\ln2)-(\ln2-\ln5)=A+\ln5$

$\int_{-3}^{-2}g(t)dt=\int_{-2}^{-1}g(t)dt-(\ln5-\ln10)$

$=(A+\ln5)-(\ln5-\ln10)=A+\ln10$

$\int_{-4}^{-3}g(t)dt=\int_{-3}^{-2}g(t)dt-(\ln10-\ln17)$

$=(A+\ln10)-(\ln10-\ln17)=A+\ln17$

이상에서

$\int_{-4}^{4}g(t)dt=(A+\ln17)+(A+\ln10)+(A+\ln5)+(A+\ln2)$

$+A+(A+\ln2)+(A+\ln5)+(A+\ln10)$

$=8A+\ln(17\times 10\times 5\times 2\times 2\times 5\times 10)$

$=8A+\ln(17\times 10^4)$

이때 $A=-4-\frac{\ln 10}{2}-\frac{\ln 17}{8}$이므로

$\int_{-4}^{4} g(t)dt=8\times\left(-4-\frac{\ln 10}{2}-\frac{\ln 17}{8}\right)+\ln 17+\ln 10^4$

$=-32$

따라서 ㉡에서

$2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4} f(t)dt=-\frac{1}{2}\int_{-4}^{4} g(t)dt$

$=-\frac{1}{2}\times(-32)=16$

정답 16