2018학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역[가형] •

정 답

1	④	2	①	3	④	4	⑤	5	②
6	②	7	③	8	③	9	④	10	⑤
11	⑤	12	①	13	③	14	③	15	②
16	④	17	①	18	①	19	②	20	⑤
21	②	22	5	23	16	24	23	25	105
26	33	27	14	28	26	29	12	30	219

해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$(\sqrt[3]{8})^2 = \left(\sqrt[3]{2^3}\right)^2 = 2^2 = 4$

2. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 집합의 원소들의 합 계산하기

$A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{4,5,6\}$ 이므로

$A-B=\{1,2,3\}$ 이다.

따라서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 6이다.

3. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{6n^2}{n^2+3n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{6}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = 6$$

4. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+b_k) = 2\sum_{k=1}^{10}a_k + \sum_{k=1}^{10}b_k = 2\times 7 + \sum_{k=1}^{10}b_k = 38$$

이므로 $\sum_{k=1}^{10}b_k = 38-14=24$ 이다.

5. [출제의도] 합성함수 이해하기

$(f^{-1}\circ g)(4) = f^{-1}(g(4)) = f^{-1}(6) = 2$

6. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to 0-}f(x) + \lim_{x\to 2}f(x) = 1+(-2) = -1$

7. [출제의도] 유리함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\frac{ax}{2x-1} = \frac{\frac{a}{2}}{2x-1}+\frac{a}{2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{a}{2}$ 이다.

그러므로 두 점근선이 만나는 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right)$이므로 $\left(\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right) = \left(b, \frac{1}{2}\right)$ 이다. $\therefore a=1$, $b=\frac{1}{2}$

따라서 $a+b=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 이다.

8. [출제의도] 명제의 충분조건 이해하기

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$이어야 한다.

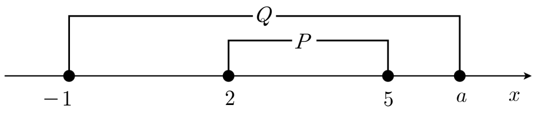
p: $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)\le 0$

$P=\{x \mid 2\le x\le 5\}$

q: $(x+1)(x-a)\le 0$

$Q=\{x \mid -1\le x\le a\}$

이때 $P\subset Q$이므로 아래 그림과 같이 $a\ge 5$이다. 따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다.



9. [출제의도] 집합의 포함 관계 이해하기

전체집합 $U=\{1,2,3,4\}$의 모든 부분집합은

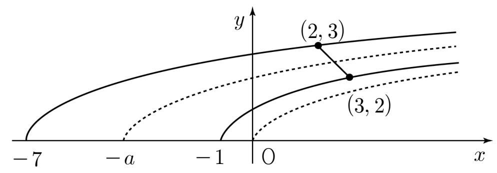
ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$ 이다.

$\{1,2\}\cap A\ne\varnothing$ 이므로 집합 A는 $1,2$ 중 적어도 하나를 원소로 가져야 한다.

$1,2$를 원소로 갖지 않는 전체집합 U의 부분집합을 모두 구하면 ϕ, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{3,4\}$이므로 집합 A의 개수는 $16-4=12$이다.

10. [출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\sqrt{x+a}$ 의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이므로 그림과 같다.



함수 $y=\sqrt{x+a}$ 의 그래프가 두 점 $(2,3)$, $(3,2)$를 지나는 선분과 만나도록 평행이동하여 점 $(3,2)$를 지날 때 실수 a는 최소이므로 $\sqrt{3+a}=2$이다. $\therefore a=1$

그리고 점 $(2,3)$을 지날 때 실수 a는 최대이므로 $\sqrt{2+a}=3$이다. $\therefore a=7$

따라서 최댓값 $M=7$, 최솟값 $m=1$이므로 $M+m=7+1=8$이다.

11. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 실생활 문제 해결하기

수학을 신청한 모든 학생의 집합을 A, 영어를 신청한 모든 학생의 집합을 B라 하자.

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=24+15-n(A\cap B)\le 30$

$\therefore n(A\cap B)\ge 9$

한편 $A\cap B\subset B$이므로 $n(A\cap B)\le n(B)=15$

이다. $\therefore 9\le n(A\cap B)\le 15$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $15+9=24$이다.

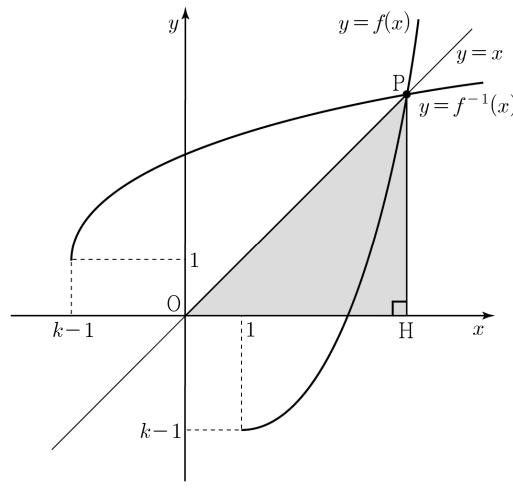
12. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x\to 2}\frac{2xf(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{2x}{x+3}\times\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x-2} = \frac{4}{5}\times 15 = 12$$

13. [출제의도] 역함수의 그래프 이해하기

$f(x)=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1$ $(x\ge 1)$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점과 같다.



따라서 점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 (t, t)라 하면 삼각형 POH의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}\times t\times t=8$, $t^2=16$이다. $\therefore t=4$ $(\because t\ge 1)$

한편, 점 $\mathrm{P}(4,4)$는 함수 $f(x)=x^2-2x+k$의 그래프 위의 점이므로 $f(4)=4^2-2\times 4+k=4$이다.

$\therefore k=-4$

14. [출제의도] 상용로그 이해하기

수	···	7	8	9
⋮		⋮	⋮	⋮
5.9	···	.7760	.7767	.7774
6.0	···	.7832	.7839	.7846
6.1	···	.7903	.7910	.7917

$\log 607+\log 0.607=\log(6.07\times 10^2)+\log(6.07\times 10^{-1})$

$=2+\log 6.07+(-1)+\log 6.07$

$=2\log 6.07+1=2\times 0.7832+1=2.5664$

15. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 여러 가지 수열의 합 문제 해결하기

$na_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n-1}ka_k$ $(n\ge 2)$

$=n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)$

$=3n(n+1)$

$\therefore a_n=3(n+1)$ $(n\ge 2)$

$\sum_{k=1}^{1}ka_k=a_1=1\times 2\times 3=6=3\times(1+1)$ 이므로

모든 자연수 n에 대하여 $a_n=3(n+1)$이다.

$\therefore \sum_{k=1}^{10}3(k+1)=3\left(\frac{10\times 11}{2}+10\right)=3\times 65=195$

16. [출제의도] 절대부등식을 이용하여 도형 문제 해결하기

$a>1$이고 두 점 P, Q의 좌표가 각각 $\left(a, \frac{1}{a-1}\right)$, $(a, -4a)$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{a-1}+4a$이다.

이때 $a-1>0$이므로

$4a+\frac{1}{a-1}=4(a-1)+\frac{1}{a-1}+4$

$\ge 2\sqrt{4(a-1)\times\frac{1}{a-1}}+4=4+4=8$

(단, 등호는 $a=\frac{3}{2}$일 때 성립)

이다. 따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 8이다.

17. [출제의도] 수학적 귀납법 증명하기

(i) $n=3$일 때, $a_3=4=\frac{8}{(3-1)(3-2)}$ 이므로 성립한다.

(ii) $n=k(k\ge 3)$일 때, 성립한다고 가정하면

$a_k=\frac{8}{(k-1)(k-2)}$

이다.

$k(k-2)a_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}a_i=a_k+\sum_{i=1}^{k-1}a_i$

$=a_k+(k-1)(k-3)a_k$

$=a_k\times\boxed{(k-2)^2}$

$=\frac{8}{(k-1)(k-2)}\times\boxed{(k-2)^2}$

$=\frac{\boxed{8(k-2)}}{k-1}$

이다. 그러므로

$a_{k+1}=\frac{1}{k(k-2)}\times\frac{\boxed{8(k-2)}}{k-1}=\frac{8}{\boxed{k(k-1)}}$

이다. 따라서 $n=k+1$일 때 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\ge 3$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\frac{8}{(n-1)(n-2)}$ 이다.

위 과정에서

$f(k)=(k-2)^2$, $g(k)=8(k-2)$, $h(k)=k(k-1)$

이므로 $\frac{f(13)\times g(14)}{h(12)}=\frac{11^2\times 8\times 12}{12\times 11}=88$ 이다.

18. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 도형 문제 해결하기

x축, y축에 동시에 접하고 원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있는 두 원의 반지름의 길이를 각각 a, b라 하면 두 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$, $(x+b)^2+(y+b)^2=b^2$

이다. 두 원의 중심 (a, a), $(-b, -b)$에서

직선 $3x-4y+4^n=0$까지의 거리가 각각 a, b이므로

$$a=\frac{|3a-4a+4^n|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-a+4^n|}{5}$$

$$a=\frac{4^n}{6},\ -\frac{4^n}{4}\quad \therefore a=\frac{4^n}{6}\ (\because a>0)$$

$$b=\frac{|-3b+4b+4^n|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|b+4^n|}{5}$$

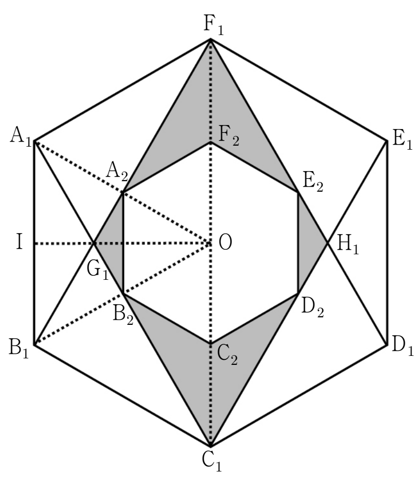
$$b=\frac{4^n}{4},\ -\frac{4^n}{6}\quad \therefore b=\frac{4^n}{4}\ (\because b>0)$$

이다. 두 원의 반지름의 길이는 각각 $\frac{4^n}{6}$, $\frac{4^n}{4}$이므로

$a_n=\frac{4^n}{6}+\frac{4^n}{4}=\frac{5\times 4^n}{12}$ 이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{5\times 4^n}{12}}{4^n+1}=\frac{5}{12}$ 이다.

19. [출제의도] 등비급수를 이용하여 도형 문제 추론하기



점 G_1에서 선분 A_1B_1, C_1F_1에 내린 수선의 발을 각각 I, O라 하자. $\overline{A_1B_1}:\overline{C_1F_1}=\overline{G_1I}:\overline{G_1O}$이고 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{C_1F_1}=8$이므로 $\overline{G_1O}=2\overline{G_1I}$이다. 삼각형 OA_1B_1이 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로 $\overline{IO}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4=2\sqrt{3}$ 이고, $\overline{G_1O}=2\sqrt{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이다. 따라서 마름모 $F_1G_1C_1H_1$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{G_1H_1}\times\overline{C_1F_1}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\times 2\right)\times 8=\frac{32}{3}\sqrt{3}$$

이다. 한편,

사각형 $A_1B_1OF_1$은 마름모이고 점 A_2는 선분 B_1F_1의 중점이므로 점 A_2는 선분 OA_1의 중점이다. 마찬가지로 점 B_2는 선분 OB_1의 중점이다. 따라서 $\overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=2:1$이므로 $\overline{A_2B_2}=2$이다.

그러므로 정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$는 한 변의 길이가 2이므로 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times 6=6\sqrt{3}$이다.

따라서 R_1에서 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1은 다음과 같다.

$S_1=$(마름모 $F_1G_1C_1H_1$의 넓이)
$\quad-$ (정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$의 넓이)
$\quad=\frac{14}{3}\sqrt{3}$

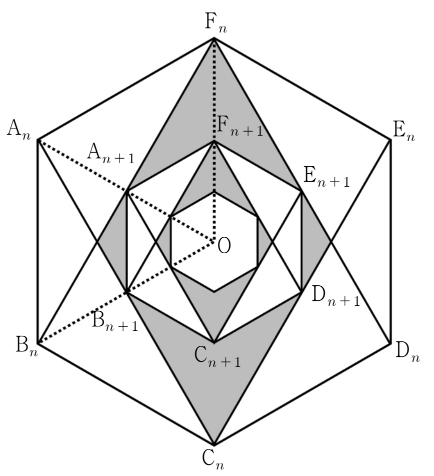


그림 R_n을 얻은 과정에서 새로 색칠한 도형의 넓이를 a_n이라 하자. 그림 R_n에서 직선 A_nA_{n+1}과 직선 B_nB_{n+1}은 점 O에서 만난다. 점 A_{n+1}은 선분 OA_n의 중점이므로 $\overline{A_nB_n}:\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=2:1$이다. 따라서 $a_n:a_{n+1}=2^2:1$이므로 수열 $\{a_n\}$의 공비 $r=\frac{1}{4}$ 이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{S_1}{1-r}=\frac{\frac{14}{3}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{56}{9}\sqrt{3}$$

이다.

20. [출제의도] 함수의 정의를 이용하여 명제 증명하기

ㄱ. $10+m-1=9+m$이 소수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 m은 2이므로 $f(10)=2$이다. (참)

ㄴ. $f(n)=5$이면 $n+5-1=n+4$는 소수이므로 $n+4+m-1=n+3+m$이 소수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 m은 1이므로 $f(n+4)=1$이다. (참)

ㄷ. $f(n)=1$이므로 $f(n)$의 정의에 의해 n은 소수이다. $(n-3)+m-1=n-4+m$은 $m=4$이면 소수이므로 $f(n-3)\le 4$이다. 4보다 작은 자연수는 $f(n-3)$이 될 수 없음을 귀류법을 이용하여 보이자.

(i) $m=1$이면 $n-3$은 소수이다. n은 5 이상의 소수이므로 홀수이고, $n-3$은 짝수이다. 이를 만족하는 경우는 $n=5$이고 $f(4)=2>1=f(3)$이 되어 주어진 조건에 모순이다.

(ii) $m=2$이면 $f(n-2)=1$이므로 $f(n-1)<f(n-2)=1$이 되어 모순이다.

(iii) $m=3$이면 $f(n-1)=1$이므로 $n-1$과 n이 모두 소수가 되어야 한다. 연속한 두 소수는 2, 3뿐이므로 주어진 조건에 모순이다.

그러므로 $(n-3)+m-1$을 소수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 m은 4이므로 $f(n-3)=4$이다.(참)

21. [출제의도] 등비수열의 극한을 이용하여 수열의 합 문제 해결하기

함수 $f(x)=\frac{x-1}{2x-6}$에 대하여

$$|f(3-a)|=\left|\frac{(3-a)-1}{2(3-a)-6}\right|=\left|\frac{2-a}{-2a}\right|=\left|\frac{a-2}{2a}\right|$$

$$|1-f(3+a)|=\left|1-\frac{(3+a)-1}{2(3+a)-6}\right|=\left|\frac{a-2}{2a}\right|$$

이다. $h(a)=\frac{a-2}{2a}\ (a\ne 0)$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f(3-a)|^{n+1}}{2^n+|1-f(3+a)|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|h(a)|^{n+1}}{2^n+|h(a)|^n}$$

이다.

(i) $|h(a)|<2$일 때,

$\left|\frac{h(a)}{2}\right|<1$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{h(a)}{2}\right|^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|h(a)|^{n+1}}{2^n+|h(a)|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left|\frac{h(a)}{2}\right|^{n+1}}{1+\left|\frac{h(a)}{2}\right|^n}=0$$

이 되어 $k=0$이다.

(ii) $|h(a)|=2$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|h(a)|^{n+1}}{2^n+|h(a)|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n+2^n}=1$$

이 되어 $k=1$이다.

(iii) $|h(a)|>2$일 때,

$\left|\frac{2}{h(a)}\right|<1$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2}{h(a)}\right|^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|h(a)|^{n+1}}{2^n+|h(a)|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|h(a)|}{\left|\frac{2}{h(a)}\right|^n+1}=|h(a)|$$

이다.

$|h(a)|=\left|\frac{a-2}{2a}\right|=\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right|=k\ (k\ge 3$인 자연수$)$를 만족시키는 a를 구하면

$\frac{1}{a}-\frac{1}{2}=k$일 때, $a=\frac{2}{2k+1}$

$\frac{1}{a}-\frac{1}{2}=-k$일 때, $a=-\frac{2}{2k-1}$

이다. 따라서 $g(k)=-2\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$이다.

$$\sum_{k=3}^{17}g(k)=-2\sum_{k=3}^{17}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=-2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{33}-\frac{1}{35}\right)$$
$$=-2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{35}\right)=-\frac{12}{35}$$

22. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x+1)=1^2+3+1=5$

23. [출제의도] 등차수열의 항 계산하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_4-a_2=2d=6\ \therefore d=3$

이므로 $a_5=a_1+4d=4+4\times 3=16$이다.

24. [출제의도] 급수의 수렴 이해하기

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+2}\right)$은 수렴하므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+2}\right)=0$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(a_n-\frac{5n}{n+2}\right)+\frac{5n}{n+2}\right\}=0+5=5$$

이다. 그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}(4a_n+3)=4\times 5+3=23$이다.

25. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

수열 $\{a_n\}$은 $0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, \cdots$ 이므로

수열 $\{b_n\}$을 구해보면

$b_1=(-1)^0\times 5^0=1$, $b_2=(-1)^1\times 5^0=-1$

$b_3=(-1)^2\times 5^1=5$, $b_4=(-1)^3\times 5^1=-5$

$b_5=(-1)^4\times 5^1=5$, $b_6=(-1)^5\times 5^2=-25$

$b_7=(-1)^6\times 5^2=25$, $b_8=(-1)^7\times 5^2=-25$

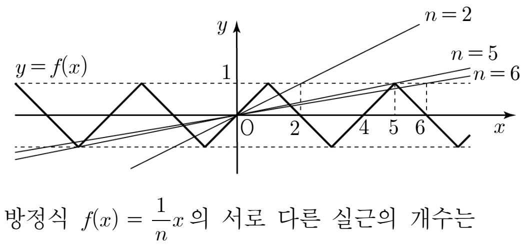
$b_9=(-1)^8\times 5^3=125$이다. 따라서

$\sum\limits_{k=1}^{9}b_k=1-1+5-5+5-25+25-25+125=105$

이다.

26. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 방정식 문제 해결하기

주어진 조건에 맞는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $f(x)=\frac{1}{n}x$의 서로 다른 실근의 개수는

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{n}x$가 만나는 점의 개수이다.

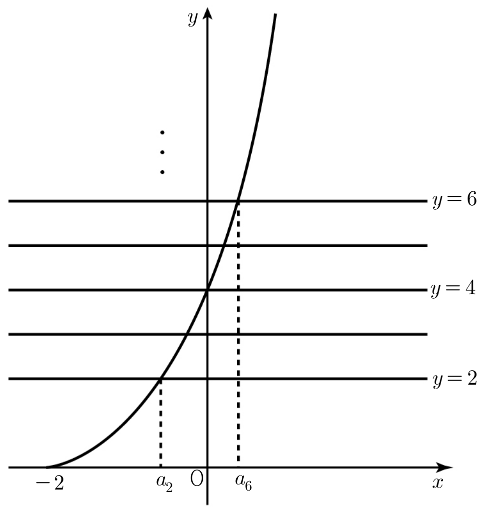
(i) $n=1$일 때, 무수히 많은 점에서 만난다.
(ii) $2 \le n \le 4$일 때, 만나는 점의 개수는 3
(iii) $n=5$일 때, 만나는 점의 개수는 5
(iv) $6 \le n \le 8$일 때, 만나는 점의 개수는 7
(v) $n=9$일 때, 만나는 점의 개수는 9
(vi) $10 \le n \le 12$일 때, 만나는 점의 개수는 11
따라서 만나는 점의 개수가 11이 되도록 하는 자연수 n은 $10, 11, 12$이다.
모든 자연수 n의 값의 합은 $10+11+12=33$이다.

27. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 함수의 연속성 문제 해결하기

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로
함수 $f(x)\{f(x)-a\}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되기 위해서는 $x=1$에서 연속이어야 한다.
$f(1)\{f(1)-a\}=-(-1-a)=1+a$,
$\lim_{x\to 1-} f(x)\{f(x)-a\}=-(-1-a)=1+a$,
$\lim_{x\to 1+} f(x)\{f(x)-a\}=15(15-a)$
에서 $1+a=15(15-a)$이다. $\therefore a=14$

28. [출제의도] 거듭제곱근의 정의를 이용하여 수열의 합 문제 해결하기

두 함수 $y=(x+2)^2\ (x \ge -2)$, $y=n$의 그래프는 다음과 같다.



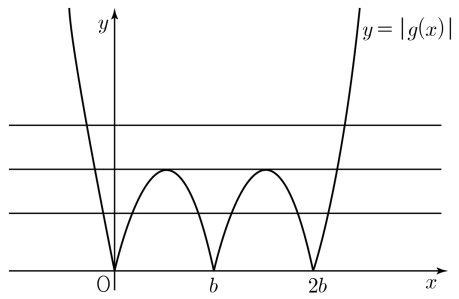
(i) $n=2,\ 3$일 때, $a_n<0$이므로
$F(2)=0,\ F(3)=1$이다.
(ii) $n=4$일 때, $a_n=0$이므로 $F(4)=1$이다.
(iii) $n \ge 5$일 때, $a_n>0$
① 5이상인 홀수 n에 대하여, n제곱하여 양수 a_n이 되는 실수는 $\sqrt[n]{a_n}$이므로
$F(5)=F(7)=F(9)=\cdots=F(19)=1$이다.
② 6이상인 짝수 n에 대하여, n제곱하여 양수 a_n이 되는 실수는 $\sqrt[n]{a_n},\ -\sqrt[n]{a_n}$이므로
$F(6)=F(8)=F(10)=\cdots=F(20)=2$이다.
$\therefore \sum_{n=2}^{20} F(n)=0+1+1+(1\times 8)+(2\times 8)=26$

29. [출제의도] 로그의 정의를 이용하여 집합의 원소의 개수 추론하기

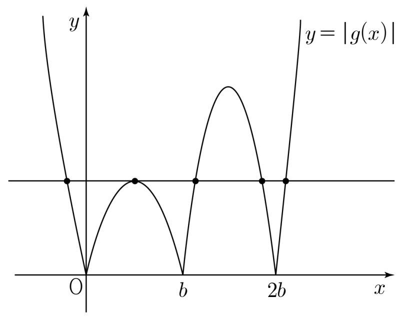
$\log_a b=\frac{k}{2} \Leftrightarrow b=a^{\frac{k}{2}} \Leftrightarrow b^2=a^k$이므로
$A_k=\left\{\frac{b}{a} \,\middle|\, b^2=a^k,\ a\text{와 } b\text{는 2 이상 100 이하의 자연수}\right\}$
이다.
(i) $k=3$일 때
$b^2=a^3$을 만족하는 자연수 $a,\ b$의 순서쌍은
$(2^2, 2^3),\ (3^2, 3^3),\ (4^2, 4^3)$이므로 $A_3=\{2, 3, 4\}$이다.
따라서 $n(A_3)=3$이다.
(ii) $k=4$일 때
$b^2=a^4$을 만족하는 자연수 $a,\ b$의 순서쌍은
$(2, 2^2),\ (3, 3^2),\ (4, 4^2),\ \cdots,\ (9, 9^2),\ (10, 10^2)$
이므로 $A_4=\{2, 3, 4, \cdots, 10\}$이다.
따라서 $n(A_4)=9$이다.
(i), (ii)에 의하여 $n(A_3)+n(A_4)=3+9=12$이다.

30. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 함수의 극한 문제 해결하기

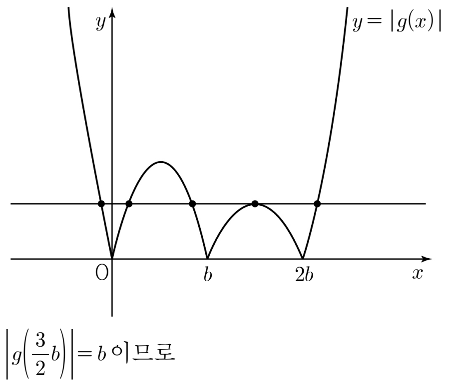
(i) $k=1$일 때
방정식 $|g(x)|=b$의 서로 다른 실근의 개수는 $2, 4, 6$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



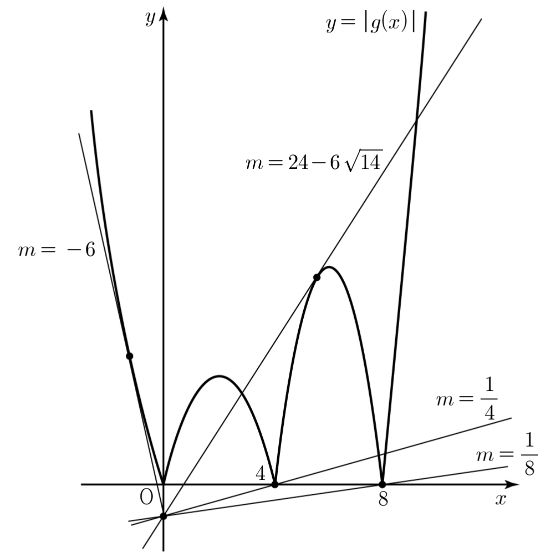
(ii) $k>1$일 때
방정식 $|g(x)|=b$의 서로 다른 실근의 개수는 직선 $y=b$가 함수 $y=|g(x)|\ (x<b)$의 그래프에 접할 때 5이다.



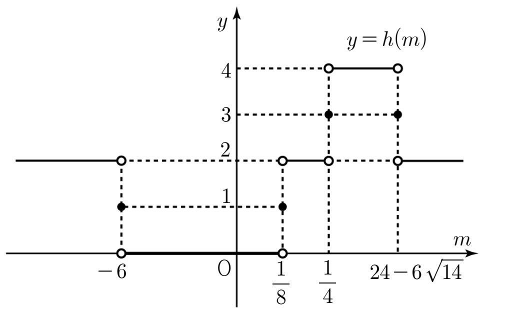
$\left|g\left(\frac{b}{2}\right)\right|=b$이므로 $-f\left(\frac{b}{2}\right)=b$에서 $ab=4$이다.
$a,\ b$는 자연수이므로 가능한 순서쌍 (a, b)는 $(1, 4),\ (2, 2),\ (4, 1)$이고 $b \le 4$이다.
조건 (가)에서
$g(6)=kf(6-b)=ka(6-b)(6-2b)=-8$
$ka(6-b)(3-b)=-4$ ⋯⋯ ㉠
$3-b<0$이므로 만족시키는 자연수 b는 4이다.
그러므로 $a=1$이고 ㉠에서 $k=2$이다.
따라서
$$g(x)=\begin{cases} x(x-4) & (x<4) \\ 2(x-4)(x-8) & (x \ge 4) \end{cases}$$
이다.
(iii) $k<1$일 때
방정식 $|g(x)|=b$의 서로 다른 실근의 개수는 직선 $y=b$가 함수 $y=|g(x)|\ (x \ge b)$의 그래프에 접할 때 5이다.



$\left|g\left(\frac{3}{2}b\right)\right|=b$이므로
$-kf\left(\frac{3b}{2}-b\right)=b,\ kab=4$
이다. 조건 (가)에서
① $b>6$일 때
$g(6)=f(6)=6a(6-b)=-8,\ 3a(b-6)=4$
이다. 이 식의 좌변은 3의 배수이지만 우변은 3의 배수가 아니다. 따라서 만족하는 두 자연수 $a,\ b$는 존재하지 않는다.
② $b \le 6$일 때
$g(6)=kf(6-b)=ka(6-b)(6-2b)=-8$,
$ka(6-b)(3-b)=-4$ ⋯⋯ ㉡
이다. 이 식의 좌변에서 $k>0,\ a>0,\ 6-b \ge 0$이므로 $3-b<0$이어야 한다.
가능한 자연수 b는 4 또는 5이다.
$b=4,\ 5$를 ㉡에 각각 대입하면 $ka=2$이다.
그런데 $kab=4$이므로 $b=2$이다. 이는 모순이다.
따라서 주어진 조건을 만족하는 두 자연수 $a,\ b$는 존재하지 않는다.
(i)~(iii)으로부터
$$g(x)=\begin{cases} x(x-4) & (x<4) \\ 2(x-4)(x-8) & (x \ge 4) \end{cases}$$
이다.



직선 $y=mx-1$이 $(4, 0)$을 지날 때 m의 값을 m_1이라고 하자.
m_1은 직선 $y=mx-1$이 점 $(4, 0)$을 지날 때의 기울기이므로 $m_1=\frac{1}{4}$이다.
이차함수 $y=-2(x-4)(x-8)$의 그래프에 접할 때 m의 값을 m_2라 하자.
m_2는 직선 $y=mx-1$이 함수 $y=-2(x-4)(x-8)$의 그래프에 접할 때이므로
이차방정식 $-2(x-4)(x-8)=mx-1$의 판별식$(D=0)$을 이용하여 구하면 $m_2=24-6\sqrt{14}$이다.



위 그림에서 $\lim_{m\to t-} h(m)+\lim_{m\to t+} h(m)=6$을 만족시키는 모든 실수 t의 값은 $\frac{1}{4},\ 24-6\sqrt{14}$이므로
$\frac{1}{4}+(24-6\sqrt{14})=\frac{97}{4}-6\sqrt{14}$에서
$p=\frac{97}{4},\ q=-6$이다.
따라서 $12(p+q)=12\left(\frac{97}{4}-6\right)=219$이다.