

2018학년도 3월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 '가'형 정답

1	④	2	②	3	①	4	③	5	③
6	②	7	⑤	8	④	9	⑤	10	④
11	①	12	②	13	③	14	①	15	⑤
16	③	17	①	18	②	19	④	20	④
21	⑤	22	16	23	4	24	13	25	18
26	600	27	12	28	128	29	2	30	67

해 설

1. [출제의도] 다항식의 덧셈을 계산한다.

두 다항식 $A=x^2-1$, $B=x^2+2x+7$ 에서
 $2A+B=2(x^2-1)+(x^2+2x+7)$
 $=2x^2-2+x^2+2x+7$
 $=3x^2+2x+5$

2. [출제의도] 교집합의 원소의 합을 구한다.

두 집합 $A=\{1, 2, 4, 6\}$, $B=\{2, 4, 5\}$ 에서
 $A \cap B = \{2, 4\}$ 이므로
 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합은
 $2+4=6$

3. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그를 계산한다.

$\log_2 8 + \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 \left(8 \times \frac{1}{2} \right)$
 $= \log_2 4$
 $= 2$

4. [출제의도] 복소수의 곱셈을 계산한다.

$(1+2i)(1-2i) = 1^2 - (2i)^2$
 $= 1 - (-4)$
 $= 5$

5. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 나머지를 구한다.

$f(x) = 2x^3 - 3x + 4$ 라 하면 나머지정리에 의하여
 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 $f(1)$ 이므로
 $f(1) = 2 - 3 + 4 = 3$

6. [출제의도] 두 직선의 수직 조건을 이용하여 상수의 값을 구한다.

직선 $x+y+2=0$ 의 기울기는 -1 이고,
 직선 $(a+2)x-3y+1=0$ 의 기울기는 $\frac{a+2}{3}$ 이다.
 두 직선 $x+y+2=0$, $(a+2)x-3y+1=0$ 이 서로 수직
 이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.
 따라서 $(-1) \times \frac{a+2}{3} = -1$ 이므로
 $a=1$

7. [출제의도] 연립이차부등식의 해를 구한다.

연립부등식 $\begin{cases} 2x-7 \geq 0 \\ x^2-5x-14 < 0 \end{cases}$
 을 풀면 $2x-7 \geq 0$ 에서 $x \geq \frac{7}{2}$ ㉠
 $x^2-5x-14 < 0$ 에서 $(x-7)(x+2) < 0$
 $-2 < x < 7$ ㉡
 이므로 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $\frac{7}{2} \leq x < 7$
 따라서 연립부등식을 만족시키는 정수 x 는 4, 5, 6
 이므로 모든 정수 x 의 값의 합은
 $4+5+6=15$

8. [출제의도] 이차방정식의 판별식을 이용하여 자연수의 개수를 구한다.

$(a^2-9)x^2 = a+3$
 $(a+3)(a-3)x^2 = a+3$
 a 는 자연수이므로 $a+3 > 0$
 $(a-3)x^2 = 1$
 이차방정식 $(a-3)x^2 - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 이
 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로
 $D = 0^2 - 4(a-3)(-1) = 4(a-3) > 0$
 $a-3 > 0$, $a > 3$
 따라서 10보다 작은 자연수 a 는
 4, 5, 6, 7, 8, 9
 이므로 a 의 개수는 6이다.

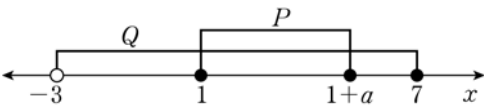
[다른 풀이]

$(a^2-9)x^2 = a+3$
 $(a+3)(a-3)x^2 = a+3$
 a 는 자연수이므로 $a+3 > 0$
 $(a-3)x^2 = 1$
 $x^2 = \frac{1}{a-3}$
 이차방정식이 두 실근을 가지므로 $\frac{1}{a-3} > 0$
 $a-3 > 0$ 이므로 $a > 3$
 따라서 10보다 작은 자연수 a 는
 4, 5, 6, 7, 8, 9
 이므로 a 의 개수는 6이다.

9. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구한다.

$2^{\frac{a}{2}} - 2^{\frac{b}{2}} = 3$ 의 양변을 제곱하면
 $\left(2^{\frac{a}{2}} - 2^{\frac{b}{2}} \right)^2 = 3^2$
 $2^a - 2 \times 2^{\frac{a}{2}} \times 2^{\frac{b}{2}} + 2^b = 2^a - 2^{\frac{a+b}{2}+1} + 2^b$
 $= 9$
 $a+b=2$ 이므로
 $2^a + 2^b - 2^{\frac{2}{2}+1} = 2^a + 2^b - 2^2 = 9$
 따라서 $2^a + 2^b = 9+4=13$

10. [출제의도] 충분조건과 이차부등식의 성질을 이용하여 자연수의 개수를 구한다.

두 조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라 하자.
 a 는 자연수이므로 $1 < 1+a$ 이다.
 $P = \{x | 1 \leq x \leq 1+a\}$
 $Q = \{x | -3 < x \leq 7\}$

 p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$ 이어야 한다.
 따라서
 $1+a \leq 7$, $a \leq 6$
 자연수 a 는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 a 의 개수는 6
 이다.

11. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식의 해를 구한다.

부등식 $|3x-2| \leq x+6$ 에서
 (i) $x \geq \frac{2}{3}$ 일 때, $3x-2 \geq 0$ 이므로
 $3x-2 \leq x+6$
 $2x \leq 8$, $x \leq 4$
 따라서 $\frac{2}{3} \leq x \leq 4$
 (ii) $x < \frac{2}{3}$ 일 때, $3x-2 < 0$ 이므로
 $-(3x-2) \leq x+6$
 $-4 \leq 4x$, $-1 \leq x$
 따라서 $-1 \leq x < \frac{2}{3}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-1 \leq x \leq 4$
 따라서 $\alpha = -1$, $\beta = 4$
 $\alpha + \beta = (-1) + 4 = 3$

12. [출제의도] 도형의 이동과 유리함수의 그래프의 성질을 이용하여 함수값을 구한다.

함수 $f(x)$ 의 그래프는 곡선 $y = -\frac{2}{x}$ 를 평행이동한
 것이므로 두 상수 m , n 에 대하여
 $f(x) = -\frac{2}{x-m} + n$
 이라 하자. 함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여
 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$ 의 두 점근선 $x=m$,
 $y=n$ 의 교점 (m, n) 이 직선 $y=x$ 위에 있다.
 따라서 $m=n$
 함수 $f(x)$ 의 정의역이 $\{x | x \neq -2 \text{ 인 모든 실수}\}$ 이므로
 $m = -2$, $n = -2$ 이다.
 $f(x) = -\frac{2}{x+2} - 2$ 이므로
 $f(4) = -\frac{2}{4+2} - 2$
 $= -\frac{1}{3} - 2$
 $= -\frac{7}{3}$

13. [출제의도] 등차수열의 일반항을 이해하여 수열의 항을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면
 $a_n = 20 + (n-1)d$, $a_{n+1} = 20 + nd$
 $b_n = a_n + a_{n+1}$ 이므로
 $b_n = a_n + a_{n+1}$
 $= \{20 + (n-1)d\} + \{20 + nd\}$
 $= 40 + (2n-1)d$
 $a_{10} = b_{10}$ 이므로
 $20 + 9d = 40 + 19d$ 에서
 $-10d = 20$, $d = -2$
 따라서
 $b_n = 40 - 2(2n-1)$
 $= 42 - 4n$
 이므로
 $b_8 = 42 - 4 \times 8 = 42 - 32 = 10$

[다른 풀이]

$b_{10} = a_{10} + a_{11}$ 이고 $a_{10} = b_{10}$ 이므로
 $a_{11} = 0$
 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면
 $a_{11} = 20 + 10d = 0$
 $d = -2$
 따라서 $a_n = 20 - 2(n-1) = 22 - 2n$ 이므로
 $b_8 = a_8 + a_9$
 $= (22 - 2 \times 8) + (22 - 2 \times 9)$
 $= 10$

14. [출제의도] 삼차방정식의 근을 이해하여 식의 값을 구한다.

$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4$
 좌변을 전개하면
 $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7$
 이므로
 $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7 = x^7 + x^6 + x^5 + x^4$
 $1+x+x^2+x^3 = 0$
 $(1+x)+x^2(1+x) = 0$
 $(1+x)(1+x^2) = 0$
 $x = -1$ 또는 $x^2 = -1$
 따라서 주어진 방정식의 세 근은 $-1, i, -i$ 이므로
 $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = (-1)^4 + i^4 + (-i)^4$
 $= 1+1+1=3$

[다른 풀이]

우변을 인수분해하면

$$x^4(x^3+x^2+x+1) = x^4\{x^2(x+1)+x+1\}$$

$$= x^4(x^2+1)(x+1)$$

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) = x^4(1+x)(1+x^2)$$

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4-x^4) = 0$$

$$(1+x)(1+x^2) = 0$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x^2 = -1$$

따라서 주어진 방정식의 세 근은 $-1, i, -i$ 이므로

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = (-1)^4 + i^4 + (-i)^4$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

15. [출제의도] 거듭제곱근을 이해하여 자연수의 개수를 구한다.

$\sqrt[5]{8}$ 이 자연수 N 의 n 제곱근이므로 거듭제곱근의 정의에 의하여 $(\sqrt[5]{8})^n = N$ 이다. 따라서

$$N = (\sqrt[5]{8})^n = 8^{\frac{n}{5}} = (2^3)^{\frac{n}{5}} = 2^{\frac{3n}{5}}$$

N 은 자연수이므로 n 의 값은 5의 배수이다.

따라서 $\sqrt[5]{8}$ 이 어떤 자연수 N 의 n 제곱근이 되도록 하는 두 자리 자연수 n 은 10, 15, 20, ..., 95이므로 n 의 개수는 18이다.

16. [출제의도] 부등식의 영역의 최대·최소를 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

두 메뉴 A, B를 각각 x 인분, y 인분 만든다고 하면

$$x \geq 0, y \geq 0 \dots \textcircled{1}$$

하루에 최대 35인분을 만들 수 있으므로

$$x + y \leq 35 \dots \textcircled{2}$$

재료 S의 가격은 10g당 600원이므로 두 메뉴 A, B 1인분을 만들기 위한 재료 S의 구입 비용은 각각 6000원, 3000원이다. 따라서 하루 동안 사용할 재료 S의 구입 비용은 $6000x + 3000y$ (원)이다.

재료 T의 가격은 10g당 400원이므로 두 메뉴 A, B 1인분을 만들기 위한 재료 T의 구입 비용은 각각 2000원, 6000원이다. 따라서 하루 동안 사용할 재료 T의 구입 비용은 $2000x + 6000y$ (원)이다.

하루에 사용할 수 있는 두 재료 S, T의 구입 비용은 최대 30만 원이므로

$$(6000x + 3000y) + (2000x + 6000y) \leq 300000$$

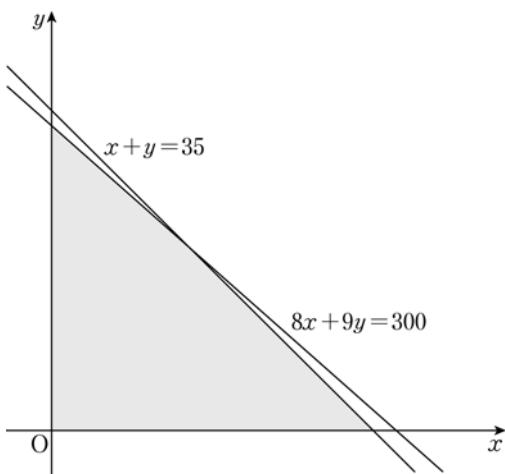
$$8000x + 9000y \leq 300000$$

$$8x + 9y \leq 300 \dots \textcircled{3}$$

좌표평면 위에 세 부등식 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 을 모두 만족시키는 영역을 나타내면 그림과 같이 두 직선

$$x + y = 35, 8x + 9y = 300$$

과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분이다.



한편, 하루 동안 두 메뉴 A, B를 각각 x 인분, y 인분 판매하여 얻을 수 있는 판매 금액은

$$20000x + 22000y \text{ (원) 이므로}$$

$$20000x + 22000y = k \text{ (} k \text{는 양의 실수)라 하면}$$

$$10x + 11y = \frac{k}{2000} \dots \textcircled{4}$$

이때 두 직선 $x + y = 35$, $8x + 9y = 300$ 과 직선 $\textcircled{4}$ 의 기울기의 관계가

$$-1 < -\frac{10}{11} < -\frac{8}{9}$$

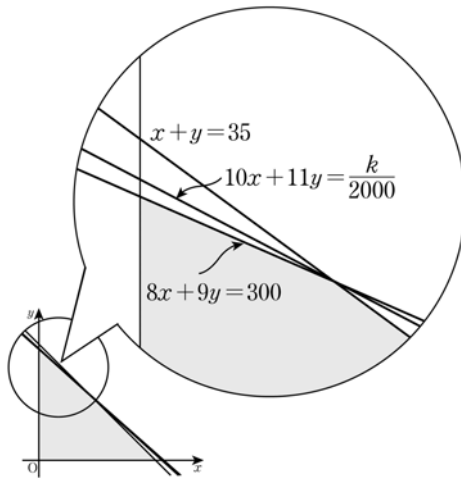
이므로 직선 $\textcircled{4}$ 이 두 직선

$$x + y = 35, 8x + 9y = 300$$

이 만나는 점을 지날 때 k 의 값은 최대이다.

두 직선 $x + y = 35$, $8x + 9y = 300$ 의 교점은 (15, 20)이고 따라서 식당에서 두 메뉴 A, B를 판매하여 얻을 수 있는 하루 최대 판매 금액은

$$20000 \times 15 + 22000 \times 20 = 740000 \text{ (원)이다.}$$



17. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 명제를 증명한다.

(i) $n=1$ 일 때,

$$\text{(좌변)} = 1 \times 1 = 1$$

$$\text{(우변)} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{24} = 1$$

(좌변) = (우변) = 1 이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m k\{k+(k+1)+(k+2)+\dots+m\}$$

$$= \frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24}$$

이다. $n=m+1$ 일 때, (*)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} k\{k+(k+1)+(k+2)+\dots+(m+1)\}$$

$$= \sum_{k=1}^m k\{k+(k+1)+\dots+(m+1)\}$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{m+1} k\{k+(k+1)+\dots+(m+1)\}$$

$$= \frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24} + \frac{(m+1)^2}{2}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(3m+4)}{24}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(3m+4)}{24}$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 (*)이 성립한다. 따라서

$$a=1$$

$$f(m) = (m+1)^2$$

$$g(m) = \frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24}$$

이므로

$$a + f(2) + g(3) = 1 + (2+1)^2 + \frac{3(3+1)(3+2)(3 \times 3 + 1)}{24}$$

$$= 1 + 9 + 25$$

$$= 35$$

18. [출제의도] 이차방정식과 집합의 연산을 이용하여 교집합의 원소의 개수를 구한다.

집합 A 의 원소는 20 이하의 자연수 n 에 대하여

$$f(n) = (n^2 - 7n + 11)(n^2 + 3n + 3)$$

이고 집합 B 의 원소가 100 이하의 소수이므로 집합 $A \cap B$ 의 원소는 $f(n) = (n^2 - 7n + 11)(n^2 + 3n + 3)$ 중에서 100 이하의 소수이다.

집합 $A \cap B$ 의 원소는 두 수

$$n^2 - 7n + 11, n^2 + 3n + 3$$

의 곱으로 나타낼 수 있고, $n^2 + 3n + 3$ 이 1보다 큰 자연수이므로

$$n^2 - 7n + 11 = 1, n^2 + 3n + 3 = p \text{ (} p \text{는 소수)}$$

가 되어야 한다.

$$n^2 - 7n + 11 = 1$$

$$n^2 - 7n + 10 = 0$$

$$(n-2)(n-5) = 0$$

$$n = 2 \text{ 또는 } n = 5$$

(i) $n=2$ 일 때,

$$f(2) = 1 \times (2^2 + 3 \times 2 + 3) = 13$$

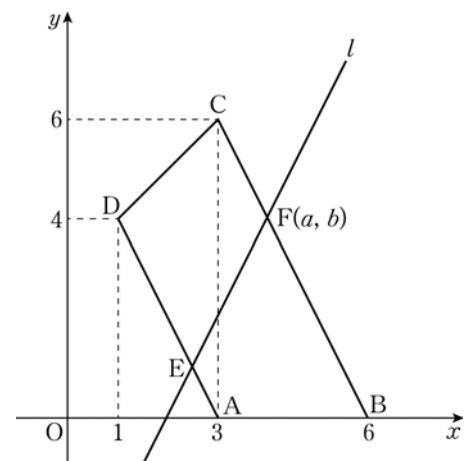
(ii) $n=5$ 일 때,

$$f(5) = 1 \times (5^2 + 3 \times 5 + 3) = 43$$

(i), (ii)에서 13과 43이 모두 100 이하의 소수이므로 $A \cap B = \{13, 43\}$

따라서 $n(A \cap B) = 2$

19. [출제의도] 선분의 내분점과 직선의 방정식을 활용하여 점의 좌표를 구한다.



$$\text{직선 AD의 기울기는 } \frac{4-0}{1-3} = -2$$

$$\text{직선 BC의 기울기는 } \frac{6-0}{3-6} = -2$$

에서 두 직선 AD, BC는 평행하므로 사다리꼴 ABCD는 사다리꼴이다.

두 밑변의 길이가 각각 a, b 이고 높이가 h 인 사다리꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times (a+b) \times h$$

이다. 직선 l 이 사다리꼴 ABCD의 넓이를 이등분하려면 나누어진 두 개의 사다리꼴의 두 밑변의 길이의 합이 서로 같아야 한다.

선분 AD를 1:3으로 내분하는 점을 E라 하고 점 E를 지나는 직선 l 이 사다리꼴 ABCD의 넓이를 이등분할 때, 선분 BC와 만나는 점 F에 대하여 점 F가

선분 BC를 $m:n$ 으로 내분한다고 하자.

$$\overline{AD} = 2\sqrt{5}, \overline{BC} = 3\sqrt{5} \text{ 이고}$$

$$\overline{AE} + \overline{BF} = \overline{DE} + \overline{CF} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{4} \times 2\sqrt{5} + \frac{m}{m+n} \times 3\sqrt{5} = \frac{3}{4} \times 2\sqrt{5} + \frac{n}{m+n} \times 3\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3m}{m+n} = \frac{3}{2} + \frac{3n}{m+n}$$

$$\frac{3(m-n)}{m+n} = 1 \text{ 에서}$$

$$3m - 3n = m + n$$

$$2m = 4n, m = 2n$$

따라서 $m:n = 2:1$ 이므로

점 F의 좌표는

$$F\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times 6}{3}, \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{3}\right)$$

에서 $F(4, 4)$ 이다.
따라서 $a=4, b=4$ 이므로
 $a+b=8$

20. [출제의도] 무리함수의 그래프의 성질을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판단한다.

두 함수 $f(x), g(x)$ 를
 $f(x) = -\sqrt{kx+2k}+4, g(x) = \sqrt{-kx+2k}-4$
라 하자.

$$\begin{aligned} \neg. f(-x) &= -\sqrt{-kx+2k}+4 \\ &= -(\sqrt{-kx+2k}-4) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

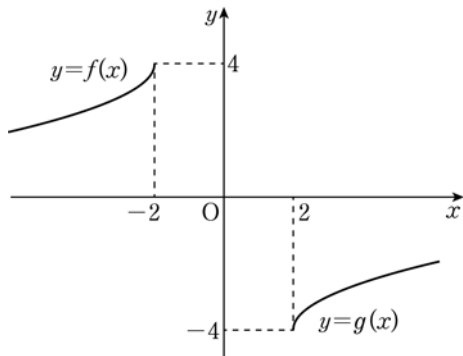
이므로 $g(x) = -f(-x)$

따라서 두 곡선

$$y = -\sqrt{kx+2k}+4, y = \sqrt{-kx+2k}-4$$

는 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $k < 0$ 이면 두 곡선은 다음과 같다.



따라서 두 곡선은 만나지 않는다. (거짓)

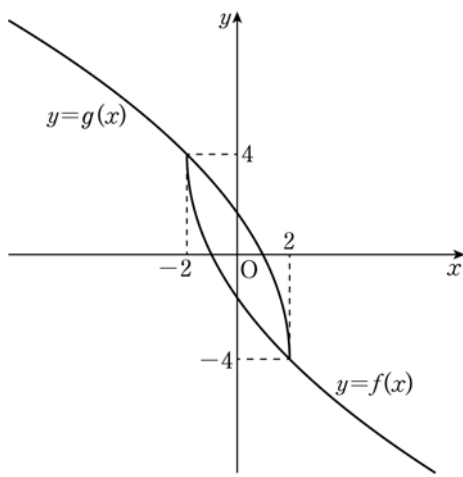
ㄷ. (i) $k < 0$ 일 때

ㄴ에 의하여 두 곡선은 만나지 않는다.

(ii) $k > 0$ 일 때

ㄱ에서 두 곡선은 원점에 대하여 대칭이고 k 의 값이 커질수록 곡선 $y=f(x)$ 는 직선 $y=4$ 와 멀어지고 곡선 $y=g(x)$ 는 직선 $y=-4$ 와 멀어진다.

따라서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k 의 최댓값은 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, -4)$ 를 지날 때이다.



$$-4 = -\sqrt{2k+2k}+4$$

$$\sqrt{4k} = 8, 4k = 64$$

따라서 $k = 16$ (참)

21. [출제의도] 이차부등식과 이차함수의 성질을 이용하여 최댓값과 최솟값의 차를 구한다.

조건 (가)에서 $\frac{1-x}{4} = t$ 라 하면 $x = 1-4t$ 이고,

부등식 $f\left(\frac{1-x}{4}\right) \leq 0$ 의 해가 $-7 \leq x \leq 9$ 이므로

$$-7 \leq 1-4t \leq 9, -2 \leq t \leq 2$$

따라서 $f(t) = k(t-2)(t+2) (k > 0)$ 에서

$$f(x) = k(x-2)(x+2) = k(x^2-4) \dots \dots \textcircled{1}$$

라 할 수 있다.

조건 (나)에서 부등식

$$f(x) \geq 2x - \frac{13}{3}$$

이 항상 성립하므로 이차부등식

$$kx^2 - 2x - 4k + \frac{13}{3} \geq 0$$

의 해는 모든 실수이다. 따라서 방정식

$$kx^2 - 2x - 4k + \frac{13}{3} = 0$$

의 판별식을 D 라 놓으면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 1 - k\left(-4k + \frac{13}{3}\right) \\ &= 4k^2 - \frac{13}{3}k + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

$$12k^2 - 13k + 3 \leq 0$$

$$(4k-3)(3k-1) \leq 0$$

$$\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{3}{4}$$

㉠에서 $f(3) = 5k$ 이므로

$$\frac{5}{3} \leq f(3) \leq \frac{15}{4}$$

따라서 $M = \frac{15}{4}, m = \frac{5}{3}$ 에서

$$M - m = \frac{15}{4} - \frac{5}{3} = \frac{25}{12}$$

[다른 풀이]

0이 아닌 실수 k 와 두 상수 a, b 에 대하여 $f(x) = k(x-a)(x-b)$ 라 하자.

조건 (가)에서 $f\left(\frac{1-x}{4}\right) \leq 0$

$$k\left(\frac{1-x}{4}-a\right)\left(\frac{1-x}{4}-b\right) \leq 0$$

$$k\left(\frac{1-4a-x}{4}\right)\left(\frac{1-4b-x}{4}\right) \leq 0$$

부등식 $k(x+4a-1)(x+4b-1) \leq 0$ 의 해가

$$-7 \leq x \leq 9 \text{ 이므로 } k > 0$$

$$-4a+1 = -7, -4b+1 = 9 \text{ 라 하면}$$

$$a = 2, b = -2$$

따라서 $f(x) = k(x-2)(x+2) = k(x^2-4) \dots \dots \textcircled{1}$

조건 (나)에서 부등식

$$f(x) \geq 2x - \frac{13}{3}$$

이 항상 성립하므로 이차부등식

$$kx^2 - 2x - 4k + \frac{13}{3} \geq 0$$

의 해는 모든 실수이다. 따라서 방정식

$$kx^2 - 2x - 4k + \frac{13}{3} = 0$$

의 판별식을 D 라 놓으면

$$\frac{D}{4} = 1 - k\left(-4k + \frac{13}{3}\right) = 4k^2 - \frac{13}{3}k + 1 \leq 0$$

$$12k^2 - 13k + 3 \leq 0, (4k-3)(3k-1) \leq 0$$

$$\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{3}{4}$$

㉠에서 $f(3) = 5k$ 이므로

$$\frac{5}{3} \leq f(3) \leq \frac{15}{4}$$

따라서 $M = \frac{15}{4}, m = \frac{5}{3}$ 에서

$$M - m = \frac{15}{4} - \frac{5}{3} = \frac{25}{12}$$

22. [출제의도] 등비수열의 성질을 이용하여 주어진 항을 구한다.

첫째항이 $\frac{1}{2}$ 이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반

항은

$$a_n = \frac{1}{2} \times 2^{n-1} = 2^{n-2}$$

따라서 $a_6 = 2^4 = 16$

[다른 풀이]

첫째항이 $\frac{1}{2}$ 이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 을 순서

대로 나열하면

$$\{a_n\}: \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

따라서 $a_6 = 16$

23. [출제의도] 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 알고 식의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2+8x-2=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -8, \alpha\beta = -2$$

$$\text{따라서 } \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-8}{-2} = 4$$

[다른 풀이]

이차방정식 $x^2+8x-2=0$ 의 근을 구하면

$$x = -4 \pm 3\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

$$\alpha + \beta = (-4 + 3\sqrt{2}) + (-4 - 3\sqrt{2})$$

$$= -8$$

$$\alpha\beta = (-4 + 3\sqrt{2})(-4 - 3\sqrt{2})$$

$$= -2$$

$$\text{따라서 } \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-8}{-2} = 4$$

24. [출제의도] 역함수를 이해하여 함숫값을 구한다.

$$(g \circ f^{-1})(2) = g(f^{-1}(2))$$

$$f^{-1}(2) = k \text{ 라 하면 } f(k) = 2$$

$$\frac{1}{2}k = 2, k = 4$$

$$\text{따라서 } g(f^{-1}(2)) = g(4) = 13$$

[다른 풀이]

$$f(x) = \frac{1}{2}x \text{ 이므로 함수 } f^{-1}(x) \text{ 는}$$

$$x = \frac{1}{2}y \text{ 에서 } y = 2x$$

$$\text{즉, } f^{-1}(x) = 2x \text{ 이므로}$$

$$(g \circ f^{-1})(x) = g(f^{-1}(x))$$

$$= g(2x)$$

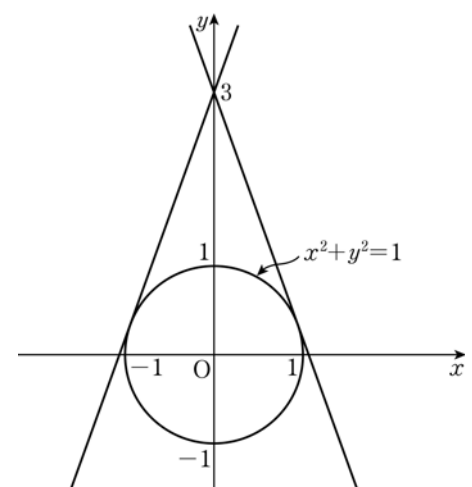
$$= 4x + 5$$

따라서

$$(g \circ f^{-1})(2) = 4 \times 2 + 5$$

$$= 13$$

25. [출제의도] 원의 접선의 방정식을 이해하여 점의 좌표를 구한다.



점 $(0, 3)$ 을 지나고 원 $x^2+y^2=1$ 에 접하는 직선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y = mx + 3 \text{ 즉, } mx - y + 3 = 0$$

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $mx - y + 3 = 0$ 까지의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|m \times 0 - 0 + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$

$$3 = \sqrt{m^2 + 1}, m^2 = 8$$

$$m = 2\sqrt{2}, m = -2\sqrt{2}$$

(i) $m = 2\sqrt{2}$ 일 때

접선의 방정식이 $y = 2\sqrt{2}x + 3$ 이므로

x 축과 만나는 점의 x 좌표 k 는

$$k = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \text{에서 } k^2 = \frac{9}{8}$$

(ii) $m = -2\sqrt{2}$ 일 때
 접선의 방정식이 $y = -2\sqrt{2}x + 3$ 이므로
 x 축과 만나는 점의 x 좌표 k 는

$$k = \frac{3}{2\sqrt{2}} \text{에서 } k^2 = \frac{9}{8}$$

(i), (ii)에서 $16k^2 = 16 \times \frac{9}{8} = 18$

26. [출제의도] 연립방정식을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 R석의 티켓의 수를 a , S석의 티켓의 수를 b , A석의 티켓의 수를 c 라 놓으면

$$a + b + c = 1500 \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서 R석, S석, A석 티켓의 가격은 각각 10만 원, 5만 원, 2만 원이므로

$$10a + 5b + 2c = 6000 \dots\dots \textcircled{2}$$

A석의 티켓의 수는 R석과 S석 티켓의 수의 합과 같으므로

$$a + b = c \dots\dots \textcircled{3}$$

세 방정식 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 2c = 1500 \text{이므로 } c = 750$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{에서 연립방정식}$$

$$\begin{cases} a + b = 750 \\ 2a + b = 900 \end{cases}$$

을 풀면 $a = 150$, $b = 600$ 이다.

따라서 구하는 S석의 티켓의 수는 600

27. [출제의도] 일대일 대응의 뜻을 이용하여 함수의 최댓값을 구한다.

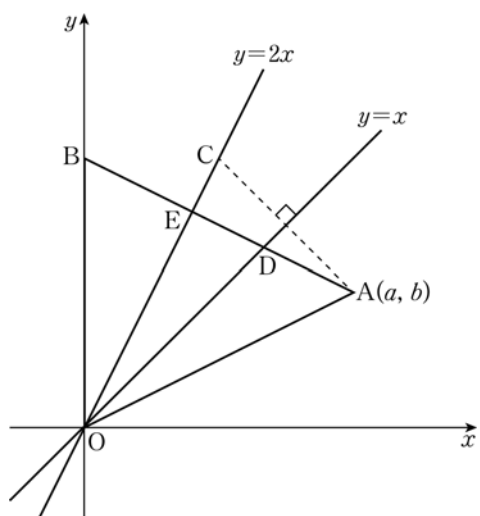
3 이상 5 이하의 자연수 n 에 대하여 $f(n)f(n+2)$ 의 값이 짝수이므로

$f(3) \times f(5)$, $f(4) \times f(6)$, $f(5) \times f(7)$ 은 모두 짝수이다.

$f(4)$ 또는 $f(6)$ 은 적어도 하나가 짝수이고, 집합 X 의 원소 중 짝수인 것은 4, 6뿐이므로 $f(3) \times f(5)$ 와 $f(5) \times f(7)$ 이 모두 짝수이려면 $f(5)$ 는 짝수가 되어야 한다.

따라서 $f(3)$, $f(7)$ 은 모두 홀수이므로 $f(3) + f(7)$ 의 최댓값은 $f(3) = 5$, $f(7) = 7$ 또는 $f(3) = 7$, $f(7) = 5$ 일 때 $5 + 7 = 12$ 이다.

28. [출제의도] 도형의 이동과 직선의 수직 조건을 이용하여 원의 둘레의 길이를 구한다.



두 상수 a , b 에 대하여 점 A의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 C는 점 A를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 C의 좌표는 (b, a) 이다.

점 C는 직선 $y = 2x$ 위의 점이므로 $a = 2b$ 이다.

따라서 점 A의 좌표는 $A(2b, b)$ 이다.

$$\overline{OA} = 2\sqrt{5} \text{이므로}$$

$$\overline{OA}^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$$

$$(2b)^2 + b^2 = 20, \quad 5b^2 = 20$$

$$b^2 = 4 \text{에서 } b = 2$$

따라서 두 점 A, C의 좌표는

$A(4, 2)$, $C(2, 4)$

y 축 위의 점 B의 좌표를 $(0, c)$ 라 하면

$$\overline{AB} = \overline{OA} = 2\sqrt{5}, \quad \overline{AB}^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$$

$$(4-0)^2 + (2-c)^2 = 20$$

$$16 + 4 - 4c + c^2 = 20$$

$$-4c + c^2 = 0, \quad c(c-4) = 0$$

$$c > 0 \text{이므로 } c = 4$$

따라서 점 B의 좌표는 $(0, 4)$ 이다.

점 D는 직선 AB와 직선 $y = x$ 의 교점이므로

$$x = -\frac{1}{2}x + 4, \quad \frac{3}{2}x = 4$$

$$x = \frac{8}{3}, \quad y = \frac{8}{3}$$

따라서 $D\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$

한편, 직선 AB의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이고 직선 $y = 2x$ 의 기울기는 2이므로 두 직선은 서로 수직이다.

따라서 삼각형 ODE는 $\angle OED = 90^\circ$ 인 직각삼각형이고, 삼각형 ODE의 외접원의 지름의 길이는 선분 OD의 길이와 같다.

$$\overline{OD} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

삼각형 ODE의 외접원의 둘레의 길이는

$$k\pi = \frac{8}{3}\sqrt{2}\pi, \quad k = \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

따라서

$$9k^2 = 9 \times \left(\frac{8}{3}\sqrt{2}\right)^2$$

$$= 9 \times \frac{128}{9}$$

$$= 128$$

29. [출제의도] 절댓값과 이차함수의 성질을 이용하여 상수의 최솟값을 구한다.

$$x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2) = 0$$

$$x = -4 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 $x = -4$ 와 $x = 2$ 이다.

$$\text{부등식 } \frac{|f(x)|}{3} - f(x) \geq m(x-2) \text{에서}$$

(i) $f(x) \geq 0$, 즉 $x \leq -4$ 또는 $x \geq 2$ 일 때

$$\frac{f(x)}{3} - f(x) \geq m(x-2) \text{이므로}$$

$$-\frac{2}{3}f(x) \geq m(x-2)$$

(ii) $f(x) < 0$, 즉 $-4 < x < 2$ 일 때

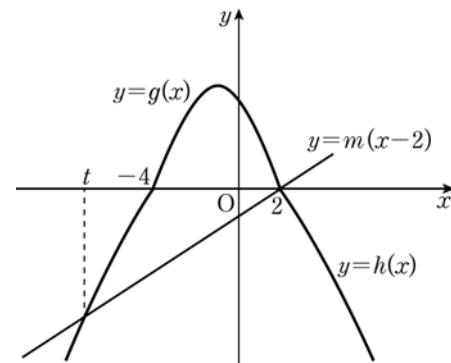
$$-\frac{f(x)}{3} - f(x) \geq m(x-2) \text{이므로}$$

$$-\frac{4}{3}f(x) \geq m(x-2)$$

여기서 $g(x) = -\frac{4}{3}f(x)$, $h(x) = -\frac{2}{3}f(x)$ 라 하면

$$\frac{|f(x)|}{3} - f(x) = \begin{cases} g(x) & (-4 < x < 2) \\ h(x) & (x \leq -4, x \geq 2) \end{cases}$$

한편, 직선 $y = m(x-2)$ 는 점 $(2, 0)$ 을 지나고 기울기 m 이 양수이므로 함수 $y = \frac{|f(x)|}{3} - f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = m(x-2)$ 를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



직선 $y = m(x-2)$ 와 함수 $y = \frac{|f(x)|}{3} - f(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표를 t ($t < -4$)라 하면 부등식

$$\frac{|f(x)|}{3} - f(x) \geq m(x-2)$$

의 해는 $t \leq x \leq 2$

$t \leq x \leq 2$ 인 정수 x 의 개수가 10이 되기 위한 실수 t 의 범위는 $-8 < t \leq -7$ 이고, m 의 값의 범위는 직선 $y = m(x-2)$ 가 점 $(-7, h(-7))$ 을 지날 때보다 크거나 같고, 점 $(-8, h(-8))$ 을 지날 때보다 작다.

$t = -7$ 일 때

$$h(-7) = -\frac{2}{3}\{(-7)^2 + 2 \times (-7) - 8\} = -\frac{2}{3} \times 27 = -18$$

$$\text{이므로 } m = \frac{0 - (-18)}{2 - (-7)} = 2 \dots\dots \textcircled{1}$$

$t = -8$ 일 때

$$h(-8) = -\frac{2}{3}\{(-8)^2 + 2 \times (-8) - 8\} = -\frac{2}{3} \times 40 = -\frac{80}{3}$$

$$\text{이므로 } m = \frac{0 - \left(-\frac{80}{3}\right)}{2 - (-8)} = \frac{8}{3} \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 m 의 범위는 $2 \leq m < \frac{8}{3}$

따라서 m 의 최솟값은 2이다.

30. [출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질을 활용하여 수열의 항을 구한다.

a_7, a_8, a_k 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 이 수열의 공비를 r 라 하면

$$a_8 = a_7r, \quad a_k = a_7r^2 \dots\dots \textcircled{1}$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

조건 (가)에서

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad (a_1 \text{은 정수, } d \text{는 자연수})$$

이므로

$$a_8 - a_7 = d, \quad a_k - a_8 = (k-8)d$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$a_7(r-1) = d, \quad a_7(r-1)r = (k-8)d$$

위 식으로부터

$$dr = (k-8)d$$

$$d \neq 0 \text{이므로 } r = k-8 \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a_k = a_7(k-8)^2, \quad a_k = 144 = 12^2$$

위 식으로부터

$$a_7(k-8)^2 = 12^2$$

조건 (가)에서 $k-8$ 과 a_7 이 정수이므로 a_7 은 완전제곱수이다. 따라서 a_7 은 12의 약수의 제곱수인

$$1, 2^2, 3^2, 4^2, 6^2, 12^2$$

중 하나이다.

(i) $a_7 = 1$ 일 때

$$(k-8)^2 = 12^2 \text{이므로}$$

$$k = 20 \quad (k > 8)$$

(ii) $a_7 = 2^2$ 일 때

$$(k-8)^2 = 6^2 \text{이므로}$$

$$k = 14 \quad (k > 8)$$

(iii) $a_7 = 3^2$ 일 때

$$(k-8)^2 = 4^2 \text{이므로}$$

$$k = 12 \quad (k > 8)$$

(iv) $a_7 = 4^2$ 일 때

$(k-8)^2=3^2$ 이므로
 $k=11 (k>8)$
 (v) $a_7=6^2$ 일 때
 $(k-8)^2=2^2$ 이므로
 $k=10 (k>8)$
 (vi) $a_7=12^2$ 일 때
 $(k-8)^2=1$ 이므로
 $k=9 (k>8)$
 그런데 $k=9$ 이면 ㉠에서 $r=1$ 이므로 수열 $\{a_n\}$
 의 공차가 0이다. 따라서 $k \neq 9$ 이다.
 (i)~(vi)에서 구하는 모든 k 의 값의 합은
 $20+14+12+11+10=67$