2018학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 가형 정답 및 풀이

01. ④	02. ⑤	03. ②	04. ④	05. ③
06. ③	07. ⑤	08. ①	09. ④	10. ②
11. ③	12. ③	13. ①	14. ②	15. ④
16. ③	17. ④	18. ①	19. ⑤	20. ①
21. ②	22. 210	23. 1	24. 4	
25. 12	26. 25	27. 29	28. 50	
29. 27	30. 6			

1. **출제의도** : 벡터의 뺄셈을 성분을 이용하여 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$\vec{a}-\vec{b}=(6, 2)-(0, 4)$

$\quad=(6, -2)$

따라서, 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$의 모든 성분의 합은 4이다.

정답 ④

2. **출제의도** : 삼각함수의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin7x}{4x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin7x}{7x}\times\frac{7x}{4x}\right)$$

$$=1\times\frac{7}{4}=\frac{7}{4}$$

정답 ⑤

3. **출제의도** : 좌표공간에서 내분점의 좌표를 구할 수 있는가 ?

정답풀이 :

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\times5+1\times2}{2+1}, \frac{2\times0+1\times0}{2+1}, \frac{2\times a+1\times4}{2+1}\right)$$

$$\left(4, 0, \frac{2a+4}{3}\right)$$

이 점이 x축 위에 있어야 하므로 y좌표와 z좌표는 0이어야 한다.

그러므로

$$\frac{2a+4}{3}=0,\ a=-2$$

정답 ②

4. **출제의도** : 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

$$=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}$$

정답 ④

5. **출제의도** : 지수함수의 점근선과 로그함수의 교점을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=2^x+5$는 곡선 $y=2^x$를 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

이때, 곡선 $y=2^x$의 점근선은 $y=0$이므로 곡선 $y=2^x+5$의 점근선은 $y=5$이다.

그러므로 직선 $y=5$와 곡선 $y=\log_3 x+3$의 교점의 x좌표는

$\log_3 x+3=5$

$\log_3 x=2$

$x=3^2=9$

정답 ③

6. **출제의도** : 주어진 범위에서 삼각방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$1+\sqrt{2}\sin 2x=0$에서

$\sin 2x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$2x=\dfrac{5\pi}{4}$ 또는 $2x=\dfrac{7\pi}{4}$

$x=\dfrac{5\pi}{8}$ 또는 $x=\dfrac{7\pi}{8}$

따라서 모든 해의 합은

$\dfrac{5\pi}{8}+\dfrac{7\pi}{8}=\dfrac{12\pi}{8}=\dfrac{3\pi}{2}$

정답 ③

7. **출제의도** : 지수함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0<a<1$이므로 함수 $f(x)=a^x$은 실수 전체의 집합에서 감소한다.

그러므로 닫힌 구간 $[-2, 1]$에서 최솟값은 $x=1$에서 가지고 최솟값이 $\dfrac{5}{6}$이므로

$a^1=\dfrac{5}{6}$, $a=\dfrac{5}{6}$

이때, $f(x)=\left(\dfrac{5}{6}\right)^x$이고 함수 $f(x)$는 주어진 구간에서 최댓값은 $x=-2$에서 가지므로

$M=f(-2)=\left(\dfrac{5}{6}\right)^{-2}=\left(\dfrac{6}{5}\right)^2$

따라서,

$a\times M=\dfrac{5}{6}\times\left(\dfrac{6}{5}\right)^2=\dfrac{6}{5}$

정답 ⑤

8. **출제의도** : 치환적분법을 이용하여 정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\displaystyle\int_1^e \frac{3(\ln x)^2}{x}dx$에서

$\ln x=t$로 놓으면

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이고,

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$\int_1^e \frac{3(\ln x)^2}{x}dx=\int_0^1 3t^2\,dt$$
$$=\left[t^3\right]_0^1$$
$$=1$$

정답 ①

9. **출제의도** : 쌍곡선의 초점의 좌표와 점근선을 이용하여 쌍곡선의 주축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

초점이 x축 위에 있고 중심이 원점이므로 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$라 하자.

조건 (가)에서 두 초점의 좌표가 $(5, 0)$, $(-5, 0)$이므로

$a^2+b^2=25$ ----- ㉠

조건 (나)에서 두 점근선이 수직이고 두 점근선의 방정식이 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$이므로

$\left(\frac{b}{a}\right)\times\left(-\frac{b}{a}\right)=-1$

$b^2=a^2$ ----- ㉡

㉠과 ㉡에서

$a^2=\frac{25}{2}$, $a=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

따라서, 주축의 길이는

$2a=5\sqrt{2}$

정답 ④

10. **출제의도** : 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times 2!}=60$

양 끝에 A가 적힌 카드를 놓고, 남은 4장의 카드 A, B, B, C를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$

정답 ②

11. **출제의도** : 역함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(3)=a$로 놓으면

$f(a)=3$

이때, $f(x)=x^3+5x+3$이므로

$a^3+5a+3=3$

$a(a^2+5)=0$

$a=0$

따라서, $f'(x)=3x^2+5$이므로

$$g'(3)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{5}$$

정답 ③

12. **출제의도** : 표준정규분포표를 이용하여 조건을 만족시키는 σ의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

$\mathrm{P}(m\le X\le m+12)=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{12}{\sigma}\right)$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le m-12)&=\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{12}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{12}{\sigma}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{12}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

즉 $\mathrm{P}(m\le X\le m+12)-\mathrm{P}(X\le m-12)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{12}{\sigma}\right)-0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{12}{\sigma}\right)$

$=-0.5+2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{12}{\sigma}\right)$

$-0.5+2\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{12}{\sigma}\right)=0.3664$에서

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{12}{\sigma}\right)=0.4332$

따라서 $\dfrac{12}{\sigma}=1.5$에서 $\sigma=8$

정답 ③

13. 출제의도 : 좌표공간에서 두 직선이 수직으로 만날 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선 $\dfrac{x-1}{2}=y+1=z$와 직선 l이 점 $(1, a, 0)$에서 만나므로 이 점을 직선 $\dfrac{x-1}{2}=y+1=z$에 대입하면

$0=a+1=0$

$a=-1$

또, 주어진 두 직선이 수직이므로 두 방향벡터가 수직이다.

이때, 직선 $\dfrac{x-1}{2}=y+1=z$의 방향벡터는

$\overrightarrow{d_1}=(2, 1, 1)$

또, 직선 l의 방향벡터는

$\overrightarrow{d_2}=(b, -3, -2)-(1, -1, 0)$

$=(b-1, -2, -2)$

두 벡터 $\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{d_2}$가 수직이므로

$\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}=(2, 1, 1)\cdot(b-1, -2, -2)$

$=2(b-1)+(-2)+(-2)$

$2b-6=0$

$b=3$

따라서,

$a+b=(-1)+3=2$

정답 ①

14. 출제의도 : 두 이산확률변수의 확률질량함수의 관계를 이용하여 평균을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$

$=4$

따라서

$\mathrm{E}(Y)=\sum_{k=1}^{5}\{k\times\mathrm{P}(Y=k)\}$

$=\sum_{k=1}^{5}\left[k\times\left\{\dfrac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\dfrac{1}{10}\right\}\right]$

$=\sum_{k=1}^{5}\left\{\dfrac{1}{2}k\times\mathrm{P}(X=k)\right\}+\sum_{k=1}^{5}\left(\dfrac{1}{10}k\right)$

$=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}+\dfrac{1}{10}\sum_{k=1}^{5}k$

$=\dfrac{1}{2}\mathrm{E}(X)+\dfrac{1}{10}\times\dfrac{5\times6}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\times4+\dfrac{1}{10}\times15=\dfrac{7}{2}$

정답 ②

15. 출제의도 : 삼각함수의 정의와 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 좌표를 $(t, 1-t^2)$이라 하자

직각삼각형 AHP에서 $\tan\theta_1=\dfrac{1}{2}$이므로

$\tan\theta_1=\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{HP}}}$

$$=\frac{\overline{\mathrm{AO}}-\overline{\mathrm{HO}}}{\overline{\mathrm{HP}}}$$

$$=\frac{1-(1-t^2)}{t}$$

$$=t$$

$$=\frac{1}{2}$$

이때, $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$이고 직각삼각형 PHO에서

$$\tan\theta_2=\frac{\overline{\mathrm{HO}}}{\overline{\mathrm{PH}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$$

따라서,

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{4}}=8$$

정답 ④

16. 출제의도 : 로그함수의 그래프와 원이 만나는 두 점이 원의 지름임을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{P}(p, \log_a p)$, $\mathrm{Q}(q, \log_a q)$ $(p>q)$로 놓으면 선분 PQ의 중점이 원의 중심 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$이므로

$\frac{p+q}{2}=\frac{5}{4}$, $\frac{\log_a p+\log_a q}{2}=0$에서

$p+q=\frac{5}{2}$, $pq=1$

p, q를 두 실근으로 갖는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-\frac{5}{2}t+1=0$

$2t^2-5t+2=0$

$(2t-1)(t-2)=0$

$t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

즉 $p=2$, $q=\frac{1}{2}$

이때, $\mathrm{P}(2, \log_a 2)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2}, -\log_a 2\right)$이고, 선분 PQ의 길이가 원의 지름 $\frac{\sqrt{13}}{2}$이므로

$$\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\{\log_a 2-(-\log_a 2)\}^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$$

정리하면 $(\log_a 4)^2=1$

$a>1$이므로 $\log_a 4=1$에서 $a=4$

정답 ③

17. 출제의도 : 좌표공간에서 두 평면이 이루는 각의 크기를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P에서 접하고 두 점 Q, R를 포함하는 평면이 z축과 만나는 점을 S라 하고, 구 S의 중심 $(0, 0, 1)$을 T라 하자.

이등변삼각형 OQR에서 선분 QR의 중점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{OS}} \perp (xy$평면), $\overline{\mathrm{OM}} \perp \overline{\mathrm{QR}}$

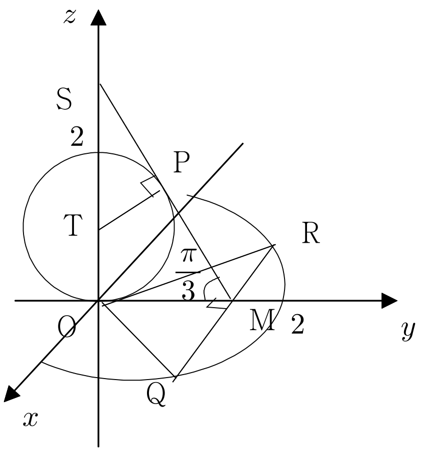
그러므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{\mathrm{SM}} \perp \overline{\mathrm{QR}}$

그러므로 두 평면이 이루는 각의 크기가

$\frac{\pi}{3}$이므로 직각삼각형 SOM에서

$\angle\mathrm{OMS} = \frac{\pi}{3}$ -----㉠



직각삼각형 STP에서 $\angle\mathrm{TSP} = \frac{\pi}{6}$이므로

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\overline{\mathrm{TP}}}{\overline{\mathrm{ST}}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\overline{\mathrm{ST}}}$$

$\overline{\mathrm{ST}} = 2$

이때, 직각삼각형 SOM에서 $\overline{\mathrm{SO}} = 3$이므로 ㉠에서

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{\mathrm{SO}}}{\overline{\mathrm{OM}}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{3}{\overline{\mathrm{OM}}}$$

$\overline{\mathrm{OM}} = \sqrt{3}$

따라서, 이등변 삼각형 OQR에서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{QR}} &= 2\overline{\mathrm{MQ}} \\ &= 2\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2 - \overline{\mathrm{MO}}^2} \\ &= 2\sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= 2\end{aligned}$$

정답 ④

18. 출제의도 : 접선의 방정식과 관계식을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 A를 지나고 점 A에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$$y - f(t) = -\frac{1}{f'(t)}(x - t)$$

$y = 0$일 때 $x = f(t)f'(t) + t$이므로

$\mathrm{C}(f(t)f'(t) + t,\ 0)$

$\overline{\mathrm{AB}} = f(t)$, $\overline{\mathrm{BC}} = f(t)f'(t)$이므로

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\{f(t)\}^2 f'(t)$$

즉 $\frac{1}{2}\{f(t)\}^2 f'(t) = \frac{1}{2}(e^{3t} - 2e^{2t} + e^t)$에서

$$\{f(t)\}^2 f'(t) = e^{3t} - 2e^{2t} + e^t$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}\{f(t)\}^3\right] = e^{3t} - 2e^{2t} + e^t$$

$$\frac{1}{3}\{f(t)\}^3 = \frac{1}{3}e^{3t} - e^{2t} + e^t + C$$

(단, C는 적분상수)

이때, $f(0) = 0$이므로 $C = -\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}\{f(t)\}^3 = \frac{1}{3}e^{3t} - e^{2t} + e^t - \frac{1}{3}$에서

$$\begin{aligned}\{f(t)\}^3 &= e^{3t} - 3e^{2t} + 3e^t - 1 \\ &= (e^t - 1)^3\end{aligned}$$

따라서 $f(x) = e^x - 1$이므로

구하는 넓이는

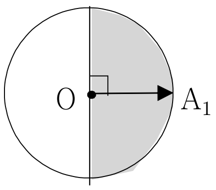
$$\int_0^1 (e^x - 1)\,dx = [e^x - x]_0^1$$

$= (e-1)-1$
$= e-2$

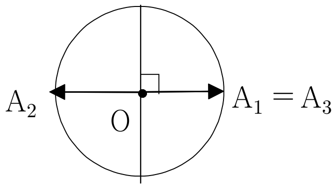
정답 ①

19. 출제의도 : 평면벡터의 크기와 내적의 정의를 이용하여 벡터의 종점이 이루는 도형에 관련된 문제를 해결할 수 있는가?

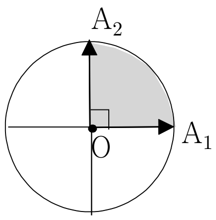
정답풀이 :
$|\overrightarrow{OX}| \leq 1$이므로 점 X는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원의 내부와 경계이다.
또, $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_k} \geq 0$에서 두 벡터 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OA_k}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면
$|\overrightarrow{OX}|\,|\overrightarrow{OA_k}|\cos\theta \geq 0$
$\cos\theta \geq 0$
그러므로
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
ㄱ. $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_3}$이므로 조건을 만족시킬 점 X를 나타내는 도형 D는 반원과 이 반원의 내부이다.



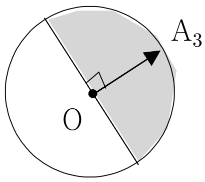
그러므로 도형 D의 넓이는 반지름의 길이가 1인 원의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로
$\frac{1}{2} \times 1^2 \times \pi = \frac{\pi}{2}$ <참>
ㄴ. $\overrightarrow{OA_2} = -\overrightarrow{OA_1}$이고 $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1}$이면 아래 그림과 같다. 이때, 점 X를 나타내는 도형 D는 선분 A_1A_2와 수직인 원의 지름이다.



그러므로 D의 길이는 2이다. <참>
ㄷ. $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = 0$이면
$\overrightarrow{OA_1} \perp \overrightarrow{OA_2}$
이때, 두 벡터 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$에 대하여 조건을 만족시킬 점 X를 나타내면 다음과 같은 사분원의 경계 및 내부이다.



[그림1]
또, 벡터 $\overrightarrow{OA_3}$에 대하여 조건을 만족시킬 점 X를 나타내면 그림과 같이 반원과 이 반원의 내부이다.



[그림2]
이때, 도형 D의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$이기 위해서는 위의 두 도형의 공통부분이 [그림1]과 같은 사분원의 경계 및 내부이어야 한다.
그러므로 점 A_3는 호 A_1A_2위에 있어야 한다. 즉, D에 포함되어야 한다. <참>
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

20. **출제의도** : 중복조합의 수를 이용하여 빈칸을 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ)의 경우:

n명의 사람이 각자 세 상자 중 공을 넣을 두 상자를 선택하는 경우의 수는 n명의 사람이 각자 공을 넣지 않을 한 상자를 선택하는 경우의 수와 같다. 따라서 세 상자에서 중복을 허락하여 n개의 상자를 선택하는 경우의 수인 $\boxed{{}_3\mathrm{H}_n}$이다.

(ⅱ)의 경우:

각 상자에 $\frac{2n}{3}$개의 공이 들어가는 경우뿐이므로 경우의 수는 1이다.

(ⅲ)의 경우:

두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가면 상자 C에는 최대 n개의 공을 넣을 수 있으므로 두 상자 A, B에 각각 $\frac{n}{2}$개보다 작은 개수의 공이 들어갈 수 없다. 따라서 두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가려면 두 상자에 들어있는 공의 개수는 각각

$\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2}+1$, $\frac{n}{2}+2$, $\cdots$, $\frac{n}{2}+\frac{n}{2}$

이므로 경우의 수는 $\boxed{\frac{n}{2}+1}$이다.

그런데 세 상자에 같은 개수의 공이 들어있는 경우를 제외해야 하므로 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2\times\left(\boxed{\frac{n}{2}+1}-1\right)$이다.

따라서 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수는

$\boxed{{}_3\mathrm{H}_n-1-\frac{3n}{2}}$이다.

$f(n)={}_3\mathrm{H}_n=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

$g(n)=\frac{n}{2}+1$

$h(n)=\frac{(n+2)(n+1)}{2}-1-\frac{3n}{2}$

이므로

$$\frac{f(30)}{g(30)}+h(30)=\frac{496}{16}+450$$
$$=31+450=481$$

정답 ①

21. **출제의도** : 정적분과 미분, 함수의 그래프의 방정식에의 활용을 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

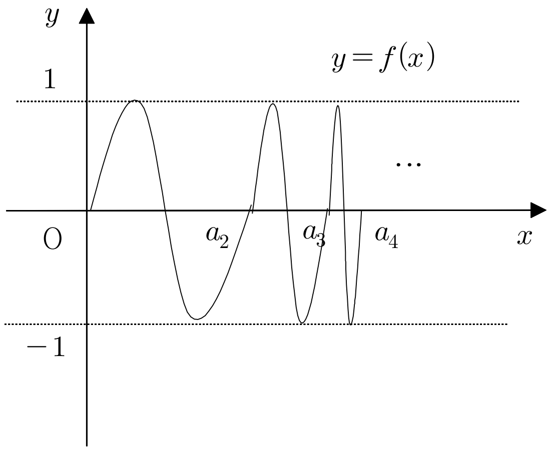
방정식 $\int_{\alpha}^{t}f(x)dx=0$에서

$$\int_{\alpha}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{t}f(x)dx=0$$

$$\int_{0}^{t}f(x)dx=-\int_{\alpha}^{0}f(x)dx$$

이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\int_{0}^{t}f(x)dx$의 그래프와 직선 $y=-\int_{\alpha}^{0}f(x)dx$의 교점의 개수이다.

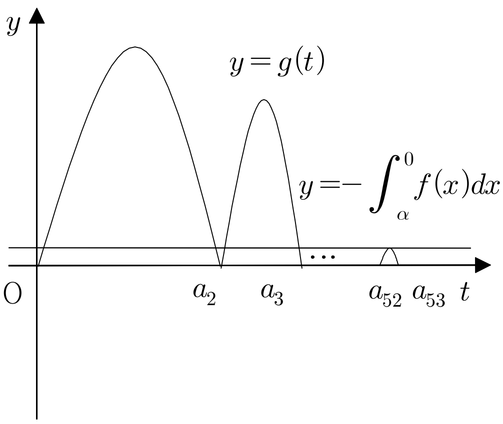
한편, $f(x)=\sin(2^n\pi x)$ $(a_n\le x\le a_{n+1})$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(t)=\int_0^t f(x)dx$라 하면

$g'(t)=f(t)$이므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.

이때, 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=-\int_\alpha^0 f(x)dx$의 교점의 개수가 103이기 위해서는 곡선 $y=g(t)$와 직선 $y=-\int_\alpha^0 f(x)dx$가 구간 $(a_{52},\ a_{53})$에서 접해야 한다.



한편, 수직선 위에서 두 점 0, a_2의 중점을 b_1이라 하고 $n\geq 2$일 때, 두 점 a_n, a_{n+1}의 중점을 b_n이라 하면

$$\int_0^{b_1} f(x)dx=\int_0^{b_1}\sin(2\pi x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\{(-1)-1\}=\frac{1}{\pi}$$

$$\int_0^{b_2} f(x)dx=\int_0^{a_2} f(x)dx+\int_{a_2}^{b_2} f(x)dx$$

$$=\int_{a_2}^{b_2} f(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{4}}\sin(2^2\pi x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2^2\pi}\cos(2^2\pi x)\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$=-\frac{1}{2^2\pi}\{(-1)-1\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}$$

이와 같은 방법으로 하면

$$\int_0^{b_{52}} f(x)dx=\frac{1}{2^{51}\pi} \quad ---- ㉠$$

한편,

$$-\int_\alpha^0 \sin(2\pi x)dx$$

$$=-\left[-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x)\right]_\alpha^0$$

$$=\frac{1}{2\pi}\{1-(\cos 2\pi\alpha)\} \quad ---- ㉡$$

㉠과 ㉡의 값이 같아야 하므로

$$\frac{1}{2\pi}\{1-\cos(2\pi\alpha)\}=\frac{1}{2^{51}\pi}$$

$$1-\cos(2\pi\alpha)=\frac{1}{2^{50}}$$

따라서,

$$\log_2(1-\cos(2\pi\alpha))$$

$$=\log_2\frac{1}{2^{50}}$$

$$=\log_2 2^{-50}=-50$$

정답 ②

22. **출제의도** : 순열 기호의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$_7P_3 = 7\times6\times5$

$= 210$

정답 210

23. **출제의도** : 삼각함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x) = -2\cos x\times(\cos x)'$

$= 2\cos x\sin x$

이므로

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}$

$= 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 1$

정답 1

24. **출제의도** : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$5x + xy + y^2 = 5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$5 + y + x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$(x+2y)\frac{dy}{dx} = -(5+y)$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{5+y}{x+2y}$ (단, $x+2y\neq0$)$\cdots\cdots$ ㉠

따라서 구하는 접선의 기울기는 ㉠에 $x=1$, $y=-1$을 대입한 값과 같으므로

$-\frac{5+(-1)}{1+2\times(-1)} = 4$

정답 4

25. **출제의도** : 삼수선의 정리를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

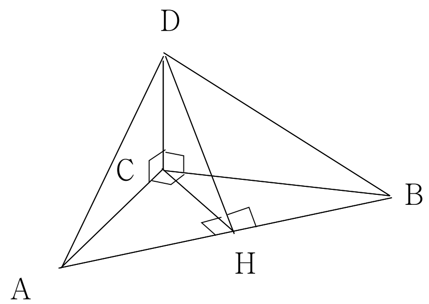
정답풀이 :

점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{DC}\perp$(평면ABC), $\overline{DH}\perp\overline{AB}$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{CH}\perp\overline{AB}$



한편 삼각형 ABD의 넓이가 20이고 $\overline{AB}=8$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{DH} = 20$

$\frac{1}{2}\times8\times\overline{DH} = 20$

$\overline{DH} = 5$

직각삼각형 DCH에서

$\overline{DH}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CH}^2$

$5^2 = 4^2 + \overline{CH}^2$

$\overline{CH} = 3$

따라서, 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}=\frac{1}{2}\times8\times3=12$

정답 12

26. 출제의도 : 모평균의 신뢰구간을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이

$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{49}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{49}}$

이므로

$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{7}=1.73$ …… ㉠

$\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{7}=1.87$ …… ㉡

㉠+㉡에서

$2\overline{x}=3.6$이므로 $\overline{x}=1.8$

㉡−㉠에서

$2\times1.96\times\frac{\sigma}{7}=0.14$이므로 $\sigma=0.25$

따라서 $k=\frac{0.25}{1.8}=\frac{5}{36}$이므로

$180k=180\times\frac{5}{36}=25$

정답 25

27. 출제의도 : 포물선과 타원의 정의를 이용하여 타원의 장축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

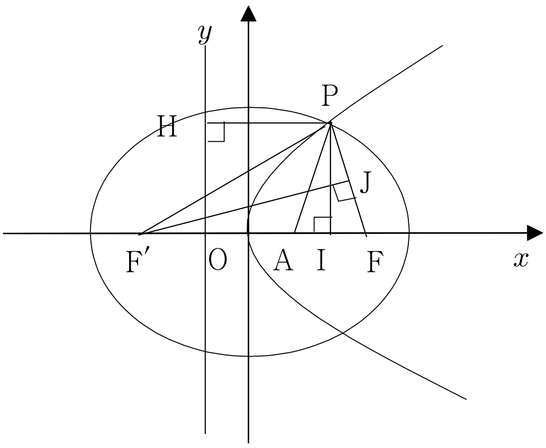
$\overline{AF}=2$, A$(a, 0)$이고 삼각형 PAF가 $\overline{PA}=\overline{PF}$인 이등변 삼각형이므로 점 P의 x좌표는 $a+1$이다.

한편, 점 P에서 포물선의 준선 $x=-a$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned}\overline{PA}&=\overline{PH}\\&=(a+1)-(-a)\\&=2a+1\end{aligned}$$

이때, 이등변삼각형 PAF의 꼭짓점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 I라 하고 $\angle PFI=\alpha$라 하면

$$\cos\alpha=\frac{\overline{IF}}{\overline{PF}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AF}}{\overline{PF}}=\frac{1}{2a+1}\ \text{-----}\ ㉠$$



또, 이등변삼각형 PF′F의 꼭짓점 F′에서 변 FP에 내린 수선의 발을 J라 하면 F$(a+2, 0)$이므로

$$\cos\alpha=\frac{\overline{FJ}}{\overline{FF'}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{PF}}{\overline{FF'}}$$

$$= \frac{a+\frac{1}{2}}{2a+4}$$

$$= \frac{2a+1}{4a+8} \quad \text{-------} \ ㉡$$

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$$\frac{1}{2a+1} = \frac{2a+1}{4a+8}$$

$$(2a+1)^2 = 4a+8$$

$$4a^2+4a+1 = 4a+8$$

$$a = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

따라서, 타원의 장축의 길이는

$$\overline{\mathrm{PF}'}+\overline{\mathrm{PF}}$$

$$= \overline{\mathrm{FF}'}+\overline{\mathrm{PF}}$$

$$= (2a+4)+(2a+1)$$

$$= 4a+5$$

$$= 4\times\frac{\sqrt{7}}{2}+5$$

$$= 5+2\sqrt{7}$$

이므로

$$p^2+q^2 = 5^2+2^2 = 29$$

정답 29

28. 출제의도 : 조건부확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 큰 사건을 E, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을과 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합보다 큰 사건을 F라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(F\,|\,E) = \dfrac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}$이다.

갑, 을, 병이 한 장씩 카드를 꺼내는 경우의 수는

$$6\times3\times3 = 54$$

갑, 을, 병이 꺼낸 카드에 적힌 수를 각각 a, b, c라 하면

$a \le b$인 경우를 순서쌍 (a, b)로 나타내면

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$

의 6가지이므로

$$\mathrm{P}(E) = 1-\frac{6\times3}{54} = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

한편, $a > b+c$인 경우는

$a=3, b=1$일 때 $c=1$

$a=4, b=1$일 때 $c=1, 2$

$a=4, b=2$일 때 $c=1$

$a=5, b=1$일 때 $c=1, 2, 3$

$a=5, b=2$일 때 $c=1, 2$

$a=5, b=3$일 때 $c=1$

$a=6, b=1$일 때 $c=1, 2, 3$

$a=6, b=2$일 때 $c=1, 2, 3$

$a=6, b=3$일 때 $c=1, 2$

의 18가지이므로

$$\mathrm{P}(E\cap F) = \frac{18}{54} = \frac{1}{3}$$

따라서

$k = \mathrm{P}(F\,|\,E) = \dfrac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2}$이므로

$$100k = 100\times\frac{1}{2} = 50$$

정답 50

29. 출제의도 : 공간벡터의 크기와 내적을 이해하고 이를 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P가 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=0$, $|\overrightarrow{OP}|\le 4$를 만족시키므로 점 P는 xy평면 위에 있으며 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 원의 경계 및 내부이다.

또, 점 Q가 $|\overrightarrow{PQ}|=1$이고,

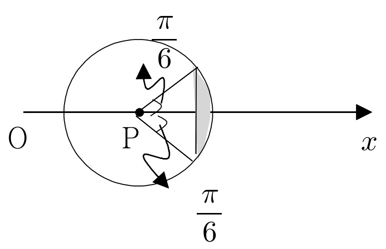
$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{OA}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$|\overrightarrow{PQ}|\,|\overrightarrow{OA}|\cos\theta\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$$

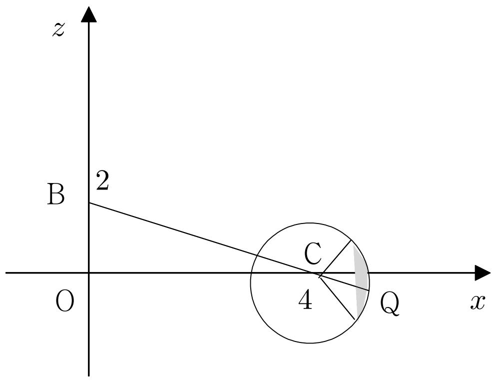
$$\cos\theta\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{6}$$

그러므로 점 Q는 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 구 위에 있으며 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{PQ}$가 이루는 각의 크기 θ가 $0\le\theta\le\frac{\pi}{6}$를 만족시키는 점으로 그림과 같다.



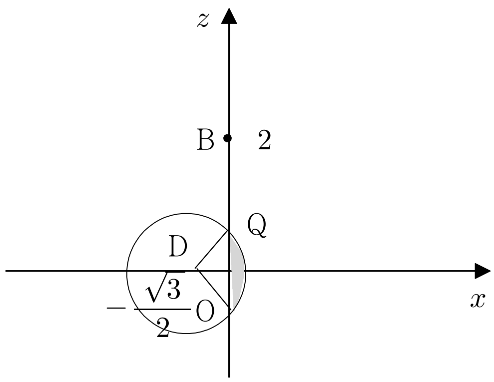
이때, 벡터 $\overrightarrow{BQ}$의 크기가 최대이려면 점 P가 C$(4, 0, 0)$일 때이고 다음 그림과 같이 두 점 B, C를 지나는 직선이 중심이 C이고 반지름의 길이가 1인 구와 만나는 점일 때이다.



그러므로 $|\overrightarrow{BQ}|$의 최댓값은

$$M=\overline{BC}+\overline{CQ}$$
$$=\sqrt{(4-0)^2+(0-0)^2+(0-2)^2}+1$$
$$=2\sqrt{5}+1$$

또, 벡터 $\overrightarrow{BQ}$의 크기가 최소이려면 그림과 같이 점 P가 D$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)$일 때이고 점 Q는 중심이 D이고 반지름의 길이가 1인 구가 z축과 만나는 점일 때이다.



그러므로 $|\overrightarrow{BQ}|$의 최솟값은 $\overline{OQ}=\frac{1}{2}$이므로

$$m=\overline{BQ}$$
$$=2-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{2}$$

따라서

$M+m=(1+2\sqrt{5})+\frac{3}{2}$

$=\frac{5}{2}+2\sqrt{5}$

이므로

$6(a+b)=6\times\left(\frac{5}{2}+2\right)$

$=27$

정답 27

30. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 이차함수에 대하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $h(x)$의 최솟값이 $g(k)$이므로

$|g(k)-f(0)|=g(k)$에서

$g(k)-f(0)=g(k)$ 또는

$g(k)-f(0)=-g(k)$

그런데 $f(0)=\ln 2+2\neq 0$이므로

$g(k)-f(0)=-g(k)$

즉 $g(k)=\frac{1}{2}f(0)=\ln\sqrt{2}+1$

한편, 함수 $y=g(x)-f(x-k)$의 그래프가 x축과 만나면 함수 $h(x)$의 최솟값은 0이다.

$f(x)>0$이고, $f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}+2e^x>0$이므로 함수 $y=g(x)-f(x-k)$의 그래프는 제3사분면과 제4사분면에 그려진다.

즉 $h(x)=f(x-k)-g(x)$

$h'(x)=f'(x-k)-g'(x)$이므로

$h'(k)=f'(0)-g'(k)=0$에서

$g'(k)=f'(0)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

$g(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$으로 놓으면

$g'(x)=2ax+b$

$g(k)=ak^2+bk+c=\ln\sqrt{2}+1$ …… ㉠

$g'(k)=2ak+b=\frac{5}{2}$ …… ㉡

이때, $h(k-1)<h(k+1)$이므로

닫힌 구간 $[k-1,\ k+1]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값은 $h(k+1)$이다.

$h(k+1)=f(1)-g(k+1)$

$=\ln(1+e)+2e-a(k+1)^2-b(k+1)-c$

$=\ln(1+e)+2e-(ak^2+bk+c)-(2ak+b)-a$

㉠, ㉡에서

$h(k+1)$

$=\ln(1+e)+2e-(\ln\sqrt{2}+1)-\frac{5}{2}-a$

함수 $h(x)$의 최댓값이 $2e+\ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$이므로

$\ln(1+e)+2e-(\ln\sqrt{2}+1)-\frac{5}{2}-a$

$=2e+\ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$에서 $a=-\frac{7}{2}$

따라서

$g'\left(k-\frac{1}{2}\right)=2a\left(k-\frac{1}{2}\right)+b$

$=(2ak+b)-a$

$=\frac{5}{2}-\left(-\frac{7}{2}\right)=6$

정답 6

■ 9월 모의평가 이후 내가 필요한 강좌만 골라 듣는다 !

■ 고퀄의 문항으로 마지막 실전 능력을 폭발시켜라!

■ 9월 모평 수학 21번, 29번, 30번 집중 공략!

▶ 클릭! 9월 모의평가 21번, 29번, 30번 다른 문제 풀이 제공 ◀

▶ 클릭! 21번, 29번, 30번 난이도 문제만 집중 연습 ◀

2018학년도 수능은 EBSi와 함께!! 수험생 여러분을 응원합니다!