

제 2 교시

수학 영역 (가형)

5 지 선 다 형

1.  $2 \times \left(2\frac{2}{3}\right)^3$  의 값은? [2점]

- ① 2      ② 4      ③ 6      ④ 8      ⑤ 10

2. 두 집합

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6\}$$

에 대하여  $n(A \cup B)$  의 값은? [2점]

- ① 5      ② 6      ③ 7      ④ 8      ⑤ 9

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2+2}}$  의 값은? [2점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

4. 함수  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$  에 대하여  $f'(1)$  의 값은? [3점]

- ① -2      ② -1      ③ 0      ④ 1      ⑤ 2

5. 첫째항이 2인 수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n)^2 + 2$$

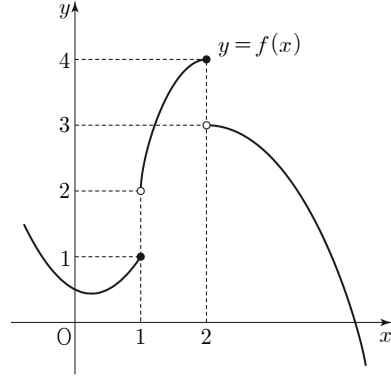
를 만족시킬 때,  $a_4$ 의 값은? [3점]

- ① 52      ② 54      ③ 56      ④ 58      ⑤ 60

6. 이차함수  $f(x) = x^2 - x + 5$ 의 그래프 위의 점  $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식이  $y = 3x + b$ 일 때, 두 상수  $a, b$ 에 대하여  $a + b$ 의 값은? [3점]

- ① -6      ② -3      ③ 0      ④ 3      ⑤ 6

7. 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① 2      ② 3      ③ 4      ④ 5      ⑤ 6

8. 자연수  $k$ 에 대한 조건

‘모든 자연수  $x$ 에 대하여  $x > k-5$ 이다.’

가 참인 명제가 되도록 하는 모든  $k$ 의 값의 합은? [3점]

- ① 13
- ② 15
- ③ 17
- ④ 19
- ⑤ 21

9. 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n - \frac{7n}{3n+2} \right)$ 이 수렴할 때,

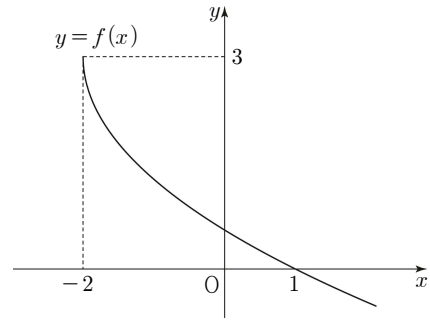
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+5)a_n}{n+3}$ 의 값은? [3점]

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

10. 정의역이  $\{x \mid x \geq -2\}$ 인 무리함수

$$f(x) = -\sqrt{ax+b} + 3$$

의 그래프가 그림과 같다.



함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 점  $(1, 0)$ 을 지날 때, 두 상수  $a, b$ 의 곱  $ab$ 의 값은? [3점]

- ① 10
- ② 12
- ③ 14
- ④ 16
- ⑤ 18

11. 두 집합

$$X = \{x \mid -3 \leq x \leq 5\}, \quad Y = \{y \mid |y| \leq a, a > 0\}$$

에 대하여  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수  $f(x) = 2x + b$ 가 일대일 대응이다. 두 상수  $a, b$ 에 대하여  $a^2 + b^2$ 의 값은? [3점]

- ① 66      ② 68      ③ 70      ④ 72      ⑤ 74

12. 첫째항이 1이고 공비가  $r$ 인 등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 할 때,

$$\frac{S_6 - S_4}{3} = \frac{a_6 - a_4}{2}$$

가 성립한다. 양수  $r$ 의 값은? [3점]

- ① 2      ②  $\frac{5}{2}$       ③ 3      ④  $\frac{7}{2}$       ⑤ 4

13. 함수  $f(x)=3x^2+2$  에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1+\frac{2k}{n}\right) \frac{1}{n}$  의 값은?

[3점]

- ① 12
- ② 15
- ③ 18
- ④ 21
- ⑤ 24

14. 1보다 큰 세 자연수  $a, b, c$  에 대하여 세 수

$\log a, \log b, \log c$

가 이 순서대로 공차가 자연수인 등차수열을 이룬다.

$\log abc = 15$  일 때,  $\log \frac{ac^2}{b}$  의 최댓값은? [4점]

- ① 11
- ② 12
- ③ 13
- ④ 14
- ⑤ 15

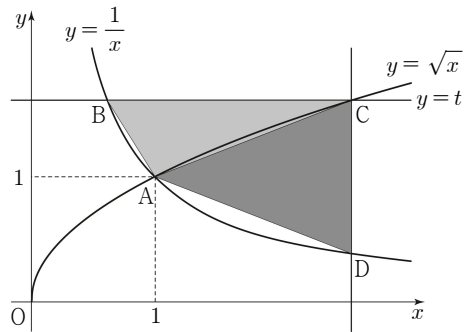
15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_2^x (t-2)f'(t) dt$$

라 하자. 함수  $g(x)$ 가  $x=0$ 에서만 극값을 가질 때,  $g(0)$ 의 값은? [4점]

- ① -2    ②  $-\frac{5}{2}$     ③ -3    ④  $-\frac{7}{2}$     ⑤ -4

16. 그림과 같이 두 곡선  $y = \frac{1}{x}$ 과  $y = \sqrt{x}$ 가 점 A(1, 1)에서 만난다. 직선  $y = t (t > 1)$ 이 두 곡선  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = \sqrt{x}$ 와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 C를 지나고  $y$ 축과 평행한 직선이 곡선  $y = \frac{1}{x}$ 과 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 ACB의 넓이를  $f(t)$ , 삼각형 ADC의 넓이를  $g(t)$ 라 할 때,  $\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{g(t)}{f(t)}$ 의 값은? [4점]



- ① 2    ②  $\frac{9}{4}$     ③  $\frac{5}{2}$     ④  $\frac{11}{4}$     ⑤ 3

17. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시간  $t (t \geq 0)$ 에서의 속도가 각각

$$f(t) = t^2 - t, g(t) = -3t^2 + 6t$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 점 P는 출발 후 운동방향을 1번 바꾼다.  
 ㄴ.  $t=2$ 에서 두 점 P, Q의 가속도를 각각  $p, q$ 라 할 때,  $pq < 0$ 이다.  
 ㄷ.  $t=0$ 부터  $t=3$ 까지 점 Q가 움직인 거리는 8이다.

- ① ㄱ                      ② ㄷ                      ③ ㄱ, ㄴ  
 ④ ㄴ, ㄷ                ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 다음은 3이 아닌 양수  $p$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n + 3p^{n-1} + 3^2p^{n-2} + \dots + 3^{n-1}p + 3^n}{(p+3)^n} = \frac{p^2 + 3p + \text{〔다〕}}{3p}$$

가 성립함을 보이는 과정이다.

$p^n + 3p^{n-1} + 3^2p^{n-2} + \dots + 3^{n-1}p + 3^n$ 은  
 첫째항이  $p^n$ , 공비가  $\text{〔가〕}$ 인 등비수열의 첫째항부터  
 제  $(n+1)$ 항까지의 합이고,  $p \neq 3$ 이므로

$$\frac{p^n + 3p^{n-1} + 3^2p^{n-2} + \dots + 3^{n-1}p + 3^n}{(p+3)^n} = \frac{p^{n+1} - 3^{n+1}}{\text{〔나〕}}$$

이다.

$0 < \frac{p}{p+3} < 1, 0 < \frac{3}{p+3} < 1$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n + 3p^{n-1} + 3^2p^{n-2} + \dots + 3^{n-1}p + 3^n}{(p+3)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n+1} - 3^{n+1}}{\text{〔나〕} \times (p+3)^n}$$

$$= \frac{1}{\text{〔나〕}} \left\{ p \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{p}{p+3} \right)^n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{p+3} \right)^n \right\}$$

$$= \frac{p^2 + 3p + \text{〔다〕}}{3p}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각  $f(p), g(p)$ 라 하고, (다)에 알맞은 수를  $k$ 라 할 때,  $f(k) \times g(k)$ 의 값은? [4점]

- ① 2                      ② 4                      ③ 6                      ④ 8                      ⑤ 10

19. 최고차항의 계수가 1인 두 다항함수  $f(x), g(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$f(-x) = -f(x), g(-x) = -g(x)$$

를 만족시킨다. 두 함수  $f(x), g(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x^2 g'(x)} = 3, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = -1$$

일 때,  $f(2)+g(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 8      ② 9      ③ 10      ④ 11      ⑤ 12

20. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고, 호 AB 위에 두 점 P, Q를  $\angle POA = \angle BOQ = 30^\circ$ 가 되도록 잡는다.



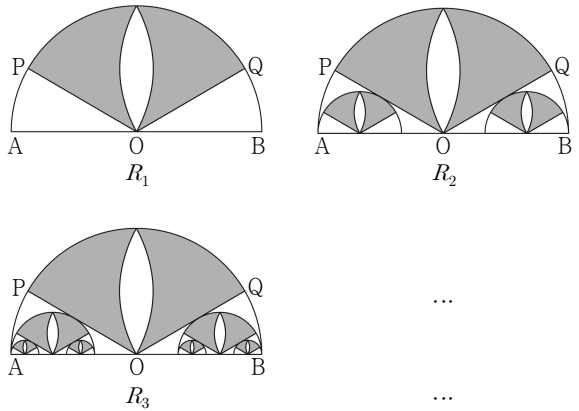
부채꼴 POQ의 내부에서 점 P를 중심으로 하고 선분 PO를 반지름으로 하는 원의 내부와 점 Q를 중심으로 하고 선분 QO를 반지름으로 하는 원의 내부의 공통부분을 제외한  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을  $R_1$ 이라 하자.

그림  $R_1$ 에서 지름의 양 끝점이 선분 AB 위에 있고 선분 PO와 선분 QO에 각각 접하는 가장 큰 반원을 그린다. 새로 그려진 2개의 반원에 그림  $R_1$ 을 얻는 것과 같은 방법으로  모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을  $R_2$ 라 하자.

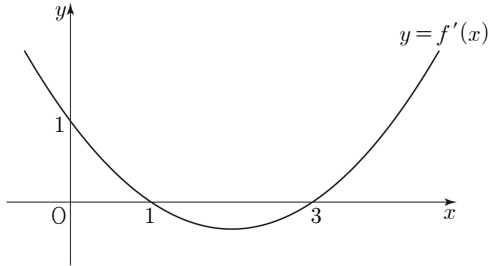
이와 같은 과정을 계속하여  $n$ 번째 얻은 그림  $R_n$ 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를  $S_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ①  $\frac{15\sqrt{3}}{7}$       ②  $\frac{16\sqrt{3}}{7}$       ③  $\frac{17\sqrt{3}}{7}$   
 ④  $\frac{18\sqrt{3}}{7}$       ⑤  $\frac{19\sqrt{3}}{7}$



21.  $f(0)=0$  인 삼차함수  $f(x)$  의 도함수  $y=f'(x)$  의 그래프가 그림과 같다.



실수  $k$  에 대하여 함수  $g(x)$  를

$$g(x) = \begin{cases} (x-k) + f(k) & (x \leq k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases}$$

라 하자.  $x \leq k$  에서 두 함수  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$  의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를  $h(k)$  라 할 때,  $\sum_{k=1}^7 h(k)$  의 값은?  
(단,  $f'(0)=1$ ,  $f'(1)=f'(3)=0$ ) [4점]

- ① 10    ② 11    ③ 12    ④ 13    ⑤ 14

단답형

22.  $\log_2 48 - \log_2 3$  의 값을 구하시오. [3점]

23.  $\int_0^2 (5x^4 - 6x^2 + 1) dx$  의 값을 구하시오. [3점]

24. 일차함수  $f(x)$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 하자.

$f(14)=3$ ,  $g(2)=11$  일 때,  $g(6)$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 전체집합  $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 부분집합

$A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 약수}\}$ 에 대하여

$$(X-A) \subset (A-X)$$

를 만족시키는  $U$ 의 모든 부분집합  $X$ 의 개수를 구하시오.

[3점]

26. 일차함수  $f(x) = 3x + a$ 와 함수

$$g(x) = \begin{cases} -x+2 & (x \leq -1) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}+3}{x^{2n}+1} & (x > -1) \end{cases}$$

에 대하여 함수  $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때,  $f(11)$ 의 값을 구하시오. (단,  $a$ 는 상수이다.) [4점]

27. 곡선  $y = \frac{2}{x}$  와 직선  $y = -x + k$  가 제1사분면에서 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B 라 하자.  $\angle ABC = 90^\circ$  인 점 C 가 곡선  $y = \frac{2}{x}$  위에 있다.  $\overline{AC} = 2\sqrt{5}$  가 되도록 하는 상수  $k$  에 대하여  $k^2$  의 값을 구하시오. (단,  $k > 2\sqrt{2}$ ) [4점]

28. 등차수열  $\{a_n\}$  의 첫째항부터 제  $n$  항까지의 합을  $S_n$  이라 할 때, 수열  $\{a_n\}$  과  $S_n$  이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $S_k > S_{k+1}$  을 만족시키는 가장 작은 자연수  $k$  에 대하여  $S_k = 102$  이다.
- (나)  $a_8 = -\frac{5}{4}a_5$  이고  $a_5 a_6 a_7 < 0$  이다.

$a_2$  의 값을 구하시오. [4점]

29. 자연수  $n$  에 대하여 두 집합  $A_n, B_n$  이

$$A_n = \{ (x, y) \mid (x+n)^2 + y^2 \leq (n+1)^2, x, y \text{ 는 정수} \},$$

$$B_n = \{ (x, y) \mid (x-n)^2 + y^2 \leq (n+1)^2, x, y \text{ 는 정수} \}$$

일 때, 집합  $A_n \cap B_n$  의 모든 원소의 개수를  $a_n$  이라 하자.

$\sum_{n=1}^{18} a_n$  의 값을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수  $f(x)$  와 양수  $k$  에 대하여 함수  $g(x)$  를

$$g(x) = \frac{f(x) + |f(x) - k|}{2}$$

라 하자. 두 함수  $f(x)$  와  $g(x)$  는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수  $g(x)$  는  $x=0$  에서만 미분가능하지 않다.

(나)  $g(0) = g(2)$

(다)  $\int_0^2 |f(x) - g(x)| dx = 8$

$g(1) + g(-1)$  의 값을 구하시오. [4점]

\* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.