제 2 교시

수학 영역(가 형)

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 4)$, $\vec{b}=(1,\ 1)$에 대하여 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

2. $\sin\frac{7\pi}{3}$의 값은? [2점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $-\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

4. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{9}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

5. 함수 $f(x)=e^x(2x+1)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [3점]

① $8e$ ② $7e$ ③ $6e$ ④ $5e$ ⑤ $4e$

6. 매개변수 t 로 나타내어진 곡선

$$x=t^2+2,\quad y=t^3+t-1$$

에서 $t=1$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

7. 자연수 8 을 4 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는? [3점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

8. 부등식

$$2\log_2|x-1| \le 1-\log_2\frac{1}{2}$$

을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

9. 함수 $f(x)=\frac{1}{x+3}$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}=2$ 를 만족시키는 실수 a의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

10. 주축의 길이가 4인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 의 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{5}{2}x$ 일 때, a^2+b^2 의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

11. 두 벡터 $\vec{a}=(3,\ 1)$, $\vec{b}=(4,\ -2)$가 있다. 벡터 $\vec{v}$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{v}+\vec{b}$가 서로 평행할 때, $|\vec{v}|^2$의 최솟값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

12. 양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\int_1^x f(t)\,dt = x^2 - a\sqrt{x} \quad (x>0)$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

13. 이틀 동안 진행하는 어느 축제에 모두 다섯 개의 팀이 참가하여 공연한다. 매일 두 팀 이상이 공연하도록 다섯 팀의 공연 날짜와 공연 순서를 정하는 경우의 수는? (단, 공연은 한 팀씩 하고, 축제 기간 중 각 팀은 1회만 공연한다.) [3점]

① 180 ② 210 ③ 240 ④ 270 ⑤ 300

14. $\int_{2}^{6} \ln(x-1)\,dx$ 의 값은? [4점]

① $4\ln 5-4$ ② $4\ln 5-3$ ③ $5\ln 5-4$
④ $5\ln 5-3$ ⑤ $6\ln 5-4$

15. 그림과 같이 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 카드가 각각 3장씩 12장이 있다. 이 12장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 선택할 때, 선택한 카드 중에 같은 숫자가 적혀 있는 카드가 2장 이상일 확률은? [4점]

$\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{3}\,\boxed{3}\,\boxed{4}\,\boxed{4}\,\boxed{4}$

① $\frac{12}{55}$ ② $\frac{16}{55}$ ③ $\frac{4}{11}$ ④ $\frac{24}{55}$ ⑤ $\frac{28}{55}$

16. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2+k & (x\le 2) \\ \ln(x-2) & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 직선 $y=x+t$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 한 개일 때, k의 값은? [4점]

① -2 ② $-\frac{9}{4}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{11}{4}$ ⑤ -3

17. 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수가 같으면 한 개의 동전을 4번 던지고, 나온 눈의 수가 다르면 한 개의 동전을 2번 던진다. 이 시행에서 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같을 때, 동전을 4번 던졌을 확률은? [4점]

① $\frac{3}{23}$ ② $\frac{5}{23}$ ③ $\frac{7}{23}$ ④ $\frac{9}{23}$ ⑤ $\frac{11}{23}$

18. 좌표평면에서 점 P는 시각 $t=0$일 때 $(0,\ -1)$에서 출발하여 시각 t에서의 속도가

$$\vec{v}=(2t,\ 2\pi\sin 2\pi t)$$

이고, 점 Q는 시각 $t=0$일 때 출발하여 시각 t에서의 위치가

$$\mathrm{Q}(4\sin 2\pi t,\ |\cos 2\pi t|)$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q가 만나는 횟수는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

19. 다음은 x에 대한 다항식 $(x+a^2)^n$과 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수가 같게 되는 두 자연수 a와 $n\,(n \geq 4)$의 값을 구하는 과정의 일부이다.

> $(x+a^2)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는 a^2n이다.
> $(x^2-2a)(x+a)^n = x^2(x+a)^n - 2a(x+a)^n$에서
> $x^2(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $\boxed{(가)} \times a^3$이고,
> $2a(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $2a^2n$이다.
> 따라서 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는
> $\boxed{(가)} \times a^3 - 2a^2n$
> 이다. 그러므로
> $a^2n = \boxed{(가)} \times a^3 - 2a^2n$
> 이고, 이 식을 정리하여 a를 n에 관한 식으로 나타내면
> $a = \dfrac{18}{\boxed{(나)}}$
> 이다. 여기서 a는 자연수이고 n은 4 이상의 자연수이므로
> $n = \boxed{(다)}$
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $f(k)+g(k)$의 값은? [4점]

① 10 ② 16 ③ 22 ④ 28 ⑤ 34

20. 양수 a와 실수 b에 대하여 함수 $f(x)=ae^{3x}+be^x$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [4점]

> (가) $x_1 < \ln\dfrac{2}{3} < x_2$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2) < 0$이다.
> (나) 구간 $[k, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, $f(2m) = -\dfrac{80}{9}$이다.

① -15 ② -12 ③ -9 ④ -6 ⑤ -3

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x)=\ln|f(x)|$$

라 하고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여

$$G(x)=\ln|g(x)\sin x|$$

라 하자.

$$\lim_{x\to 1}(x-1)F'(x)=3,\quad \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{1}{4}$$

일 때, $f(3)+g(3)$의 값은? [4점]

① 57 ② 55 ③ 53 ④ 51 ⑤ 49

단답형

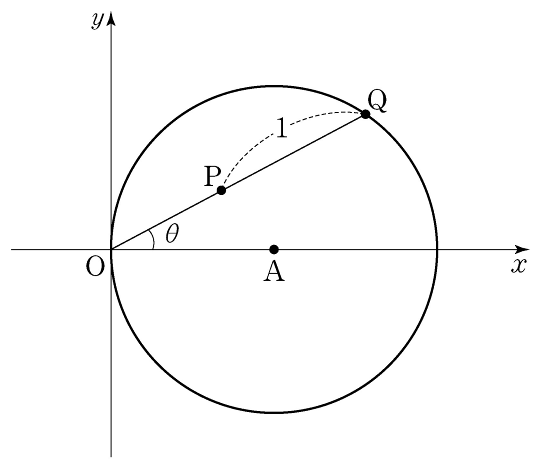
22. ${}_6\mathrm{C}_4$의 값을 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x)=\sqrt{x^3+1}$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

24. $\int_{2}^{4} 2e^{2x-4}dx = k$일 때, $\ln(k+1)$의 값을 구하시오. [3점]

25. 좌표평면 위의 점 $(6,\ 3)$을 지나고 벡터 $\vec{u} = (2,\ 3)$에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2$의 값을 구하시오. [3점]

26. 그림과 같이 좌표평면에 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 원 위의 점 Q에 대하여 $\angle \mathrm{AOQ} = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{3}\right)$라 할 때, 선분 OQ 위에 $\overline{\mathrm{PQ}} = 1$인 점 P를 정한다. 점 P의 y좌표가 최대가 될 때 $\cos\theta = \frac{a+\sqrt{b}}{8}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, a와 b는 자연수이다.) [4점]

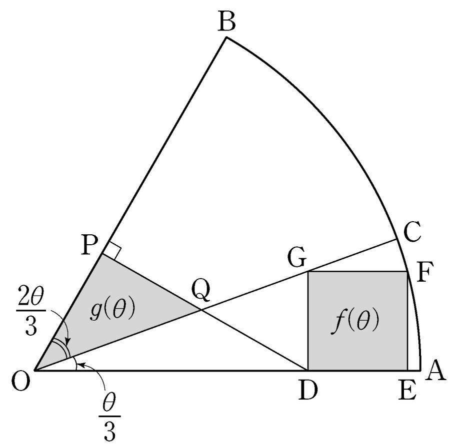


27. 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합을 두 개 선택할 때, 선택한 두 집합이 서로 같지 않은 경우의 수를 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점을 C라 하자. 변 DE가 선분 OA 위에 있고, 꼭짓점 G, F가 각각 선분 OC, 호 AC 위에 있는 정사각형 DEFG의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. 점 D에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 P, 선분 DP와 선분 OC가 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OQP의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\displaystyle\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta \times g(\theta)} = k$일 때, $60k$의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$이고, $\overline{\mathrm{OD}} < \overline{\mathrm{OE}}$이다.) [4점]



29. 좌표평면에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 한 점을 A, 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 한 점을 B라 할 때, 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$
(나) $|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 = 20$

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$의 최솟값은 m이고 이때 $|\overrightarrow{OP}| = k$이다. $m+k^2$의 값을 구하시오. [4점]

30. 실수 a와 함수 $f(x) = \ln(x^4+1) - c$ ($c > 0$인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

라 하자. 함수 $y = g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 α_1, α_2, $\cdots$, α_m (m은 자연수)이다. $a = \alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x = 1$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)\,dx = k\alpha_m \int_0^1 |f(x)|\,dx$

$mk \times e^c$의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.