2017학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역[나형] •

정 답

1	②	2	⑤	3	①	4	④	5	③
6	①	7	⑤	8	④	9	②	10	①
11	③	12	④	13	②	14	①	15	③
16	②	17	⑤	18	③	19	④	20	⑤
21	②	22	26	23	15	24	12	25	27
26	5	27	20	28	40	29	36	30	480

해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2=3^{\frac{1}{2}\times 2}=3^1=3$

2. [출제의도] 집합의 연산 이해하기

$A^C=\{4,\ 5\}$이므로 A^C의 모든 원소의 합은 $4+5=9$이다.

3. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-3}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{3}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}$이다.

4. [출제의도] 등비수열 이해하기

첫째항이 2이고 공비가 3이므로 $a_3=2\times 3^2=18$이다.

5. [출제의도] 역함수 이해하기

$f^{-1}(5)=1$이므로 $f(1)=5$이다.
따라서 $5=f(1)=2+k$이고 $k=3$이다.

6. [출제의도] 명제의 참, 거짓 이해하기

명제가 참이 되기 위해서는
$a^2+6a-7=0$에서 $(a-1)(a+7)=0$이다.
따라서 $a=1$ 또는 $a=-7$이다.
$a>0$이므로 $a=1$이다.

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)+\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=0+2=2$이다.

8. [출제의도] 부분집합의 개수 이해하기

$\{1,2\}\subset X\subset\{1,2,3,4,5\}$이므로 집합 X의 개수는 집합 $\{3,4,5\}$의 부분집합의 개수와 같다.
따라서 집합 X의 개수는 $2^3=8$이다.

9. [출제의도] 함수의 합성 문제 해결하기

$(f\circ g)(a)=f(a^2-1)=2(a^2-1)-1=2a^2-3=5$이므로 $a=\pm 2$이다.
$a>0$이므로 $a=2$이다.

[다른 풀이]

함수 $f(x)$는 일대일 대응이다.
$f(g(a))=5$이고 $f(3)=5$이므로 $g(a)=3$이다.
따라서 $a^2-1=3$이고 $a=\pm 2$이다.
$a>0$이므로 $a=2$이다.

10. [출제의도] 로그의 정의 이해하기

$2^a=5$이고 $5^b=7$이므로 $(2^a)^b=(5)^b=7$이다.

[다른 풀이]

$ab=\log_2 5\times\log_5 7$
$=\dfrac{\log_{10}5}{\log_{10}2}\times\dfrac{\log_{10}7}{\log_{10}5}$
$=\dfrac{\log_{10}7}{\log_{10}2}=\log_2 7$

그러므로 $(2^a)^b=2^{ab}=2^{\log_2 7}=7$이다.

11. [출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)$는 함수 $y=\sqrt{-x}$를 x축 방향으로 2만큼, y축 방향으로 1만큼 평행이동한 함수이다.
따라서 $f(x)=\sqrt{-(x-2)}+1=\sqrt{-x+2}+1$이다.
$\sqrt{-x+a}+b=\sqrt{-x+2}+1$이므로
$a=2,\ b=1$이고 $a+b=3$이다.

12. [출제의도] 급수 계산하기

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{2\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+2)}\right\}$
$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots\right.$
$\left.+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)\right\}$
$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{3}{4}$

13. [출제의도] 등비수열의 합 이해하기

첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열에서
$S_3=\dfrac{a(1-r^3)}{1-r}=21$이므로
$S_6=\dfrac{a(1-r^6)}{1-r}=\dfrac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=21(1+r^3)=189$이다.
$1+r^3=9$이므로 $r^3=8$이고 $r=2$이다.
$S_3=\dfrac{a(1-2^3)}{1-2}=7a=21$이므로 $a=3$이고
$a_5=ar^4=3\times 2^4=48$이다.

[다른 풀이]

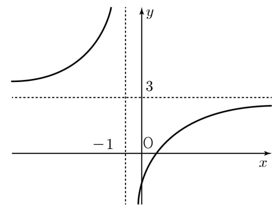
$S_3=a+ar+ar^2=21$
$S_6=a+ar+ar^2+r^3(a+ar+ar^2)$
$=(1+r^3)(a+ar+ar^2)$
$=21(1+r^3)$
$S_6=189$이므로 $21(1+r^3)=189$에서
$r^3=8$이고 $r=2$이다.
$S_3=a+2a+2^2a=7a=21$이므로 $a=3$이다.
$a_5=ar^4=3\times 2^4=48$이다.

14. [출제의도] 수열의 합 계산하기

$\sum\limits_{k=1}^{10}\dfrac{k^3}{k+1}+\sum\limits_{k=1}^{10}\dfrac{1}{k+1}$
$=\sum\limits_{k=1}^{10}\dfrac{k^3+1}{k+1}$
$=\sum\limits_{k=1}^{10}\dfrac{(k+1)(k^2-k+1)}{k+1}$
$=\sum\limits_{k=1}^{10}(k^2-k+1)$
$=\sum\limits_{k=1}^{10}k^2-\sum\limits_{k=1}^{10}k+\sum\limits_{k=1}^{10}1$
$=\dfrac{10\times 11\times 21}{6}-\dfrac{10\times 11}{2}+1\times 10$
$=385-55+10=340$

15. [출제의도] 유리함수의 그래프 문제 해결하기

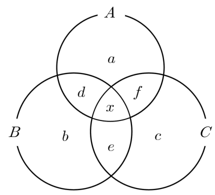
$y=\dfrac{3x+k-10}{x+1}=3+\dfrac{k-13}{x+1}$이므로
점근선의 방정식은 $x=-1,\ y=3$이다.



이 함수의 그래프가 제4사분면을 지나기 위해서는 그림과 같이 $k-13<0$이고 (y절편)$=k-10<0$이어야 한다.
따라서 $k<10$이고, 자연수 k의 개수는 9이다.

16. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 외적 문제 해결하기

자격증 A를 취득한 수강생의 집합을 A, 자격증 B를 취득한 수강생의 집합을 B, 자격증 C를 취득한 수강생의 집합을 C라 하자.
각 영역에 속하는 원소의 개수를 벤 다이어그램에 나타내면 아래 그림과 같다.



수강생 수는 총 35명이고 세 자격증 A, B, C 중에서 어느 것도 취득하지 못한 수강생이 3명이므로
$n(A\cup B\cup C)=35-3=32$이다.
이 학원의 수강생 중에서 세 자격증 A, B, C를 모두 취득한 수강생이 없으므로 $x=0$이다.
자격증 A, B, C를 취득한 수강생이
각각 21명, 18명, 15명이므로
$a+d+f=21\cdots$①
$b+d+e=18\cdots$②
$c+e+f=15\cdots$③
①+②+③을 하면
$a+b+c+2(d+e+f)=54\cdots$④ 이고
$n(A\cup B\cup C)=a+b+c+d+e+f=32\cdots$⑤ 이다.
④−⑤를 하면 $d+e+f=22$이다.
따라서 세 자격증 A, B, C 중에서 두 종류의 자격증만 취득한 수강생 수는 22이다.

17. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 추론하기

주어진 식 (∗)의 양변을 $\dfrac{n(n+1)}{2}$로 나누면
$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}>\dfrac{2n}{n+1}$ …… ㉠
이므로 $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여
(i) $n=2$일 때,
(좌변)$=\boxed{\dfrac{3}{2}}$, (우변)$=\dfrac{4}{3}$이므로 ㉠이 성립한다.
(ii) $n=k\,(k\geq 2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}>\dfrac{2k}{k+1}$ …… ㉡
이다. ㉡의 양변에 $\dfrac{1}{k+1}$을 더하면
$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}>\dfrac{2k+1}{k+1}$
이 성립한다. 한편,
$\dfrac{2k+1}{k+1}-\boxed{\dfrac{2(k+1)}{k+2}}=\dfrac{k}{(k+1)(k+2)}>0$
이므로

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\boxed{\frac{2(k+1)}{k+2}}$

이다. 따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립하므로 (*)도 성립한다.
위 과정에서 $p=\frac{3}{2}$, $f(k)=\frac{2(k+1)}{k+2}$이므로
$8p\times f(10)=8\times\frac{3}{2}\times\frac{22}{12}=22$이다.

18. [출제의도] 함수의 극한 문제 해결하기

점 M의 좌표는 $\left(\frac{t}{2},\frac{t^2}{2}\right)$이므로 직선 AB의 방정식은 $y=\frac{t^2}{2}$이다. 점 B는 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\frac{t^2}{2}$의 교점이고, 점 B의 x좌표는 방정식 $x^2=\frac{t^2}{2}$의 양의 해이므로 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}t$이다. 따라서

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{2}}{2}t\times 2=\sqrt{2}t$, $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+t^4}=t\sqrt{1+t^2}$

이다. 그러므로

$\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{OP}}}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{2}\,t}{t\sqrt{1+t^2}}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+t^2}}=\sqrt{2}$ 이다.

19. [출제의도] 등비급수를 이용하여 도형 문제 추론하기

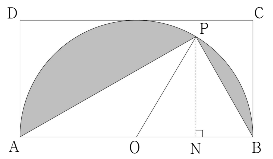


그림 R_1에서 반원의 중심을 O라 하면 $\overline{\mathrm{OP}}=2$, $\overline{\mathrm{ON}}=1$ 이므로 $\overline{\mathrm{NP}}=\sqrt{3}$이다. 따라서 R_1에서 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1은 다음과 같다.

$S_1=(\text{반원 }O\text{의 넓이})-(\text{삼각형 ABP의 넓이})$
$=\frac{1}{2}\pi(2^2)-\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{3}$
$=2(\pi-\sqrt{3})$

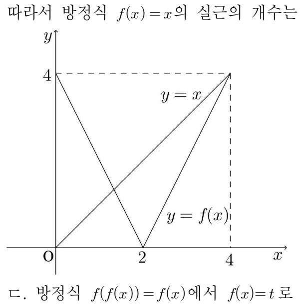
이다. 한편, 그림 R_n에서 그림 R_{n+1}을 얻을 때 새로 그려지는 사각형들은 그림 R_n에서 새로 그린 사각형보다 넓이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$배로 줄어들고, 개수는 2배가 되므로 수열 $\{S_n\}$의 공비 $r=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2=\frac{1}{2}$이다.
그러므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-r}=\frac{2(\pi-\sqrt{3})}{1-\frac{1}{2}}=4(\pi-\sqrt{3})$

이다.

20. [출제의도] 함수의 합성을 이용하여 추론하기

ㄱ. $f(f(1))=f(2)=0$ (참)
ㄴ. 그림과 같이 방정식 $f(x)=x$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수와 같다. 따라서 방정식 $f(x)=x$의 실근의 개수는 2이다.(참)



ㄷ. 방정식 $f(f(x))=f(x)$에서 $f(x)=t$로 치환하고 방정식 $f(t)=t$를 만족하는 해를 구해보면
$|2t-4|=t$에서 $t=\frac{4}{3}$ 또는 $t=4$이다.
따라서 $f(x)=\frac{4}{3}$ 또는 $f(x)=4$를 만족하는 x의 값을 구하면 된다.

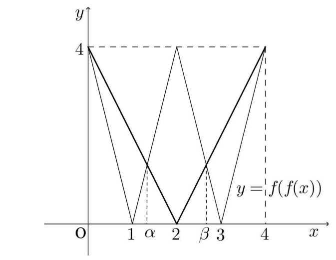
i) $f(x)=\frac{4}{3}$인 경우
$|2x-4|=\frac{4}{3}$에서 $x=\frac{4}{3}$ 또는 $x=\frac{8}{3}$이다.
ii) $f(x)=4$인 경우
$|2x-4|=4$에서 $x=0$ 또는 $x=4$이다.

i), ii)에 의해 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근의 합은 $\frac{4}{3}+\frac{8}{3}+0+4=8$이다.(참)

[다른 풀이]
방정식 $f(f(x))=f(x)$의 실근은 함수 $y=f(f(x))$와 직선 $y=f(x)$의 교점의 x좌표와 같다.

$f(f(x))$
$=|2f(x)-4|$
$=\begin{cases}2f(x)-4 & (f(x)\geq 2)\\ 4-2f(x) & (f(x)<2)\end{cases}$
$=\begin{cases}2|2x-4|-4 & (0\leq x\leq 1\text{ 또는 }3\leq x\leq 4)\\ 4-2|2x-4| & (1<x<3)\end{cases}$
$=\begin{cases}-4x+4 & (0\leq x\leq 1)\\ 4x-4 & (1<x<2)\\ -4x+12 & (2\leq x<3)\\ 4x-12 & (3\leq x\leq 4)\end{cases}$

이다.
그러므로 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 실근은 그림과 같이 0, α, β, 4이다.



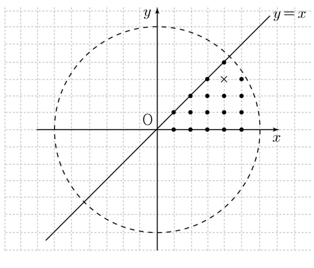
한편, $y=f(f(x))$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $\alpha+\beta=4$이다.
따라서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 실근의 합은 8이다.

21. [출제의도] 함수의 연속 추론하기

함수 $f(t)$는 원 $x^2+y^2=t^2$의 내부에 포함되는 정수 격자점의 개수이므로 다음과 같이 구할 수 있다.

$f(t)=\begin{cases}1 & (0<t\leq 1)\\ 5 & (1<t\leq\sqrt{2})\\ 9 & (\sqrt{2}<t\leq 2)\\ \vdots & \quad\vdots\end{cases}$

위와 같이 원 $x^2+y^2=t^2$이 정수 격자점을 지날 때마다 함수 $f(t)$는 불연속이 된다. 그러므로 원점으로부터 거리(반지름의 길이 t)가 서로 다른 정수 격자점의 개수를 세면 함수 $f(t)$가 불연속이 되는 t의 개수를 알 수 있다.
$0<t<6$이므로 원점으로부터 거리(반지름의 길이 t)가 서로 다른 정수 격자점은 그림과 같이
영역 $\begin{cases}0<x^2+y^2<6^2\\ 0\leq y\leq x\end{cases}$ 에서 찾을 수 있다.



$x=1$일 때, (1,0), (1,1)
$x=2$일 때, (2,0), (2,1), (2,2)
$x=3$일 때, (3,0), (3,1), (3,2), (3,3)
$x=4$일 때, (4,0), (4,1), (4,2), (4,4)
$x=5$일 때, (5,0), (5,1), (5,2), (5,3)

여기서 주의할 점은 그림과 같이 두 좌표 (5,0)과 (4,3)은 원점으로부터 거리(반지름의 길이 t)가 같다. 따라서 불연속이 되는 t의 개수는 17이다.
[참고] 구체적으로 $0<t<6$일 때, 함수 $f(t)$가 불연속일 때의 좌표와 t의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

좌표	t	좌표	t
(1,0)	1	(4,1)	$\sqrt{17}$
(1,1)	$\sqrt{2}$	(3,3)	$3\sqrt{2}$
(2,0)	2	(4,2)	$2\sqrt{5}$
(2,1)	$\sqrt{5}$	(4,3),(5,0)	5
(2,2)	$2\sqrt{2}$	(5,1)	$\sqrt{26}$
(3,0)	3	(5,2)	$\sqrt{29}$
(3,1)	$\sqrt{10}$	(4,4)	$4\sqrt{2}$
(3,2)	$\sqrt{13}$	(5,3)	$\sqrt{34}$
(4,0)	4		

22. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$\lim_{x\to 5}(x^2+1)=5^2+1=26$

23. [출제의도] 등차수열 이해하기

네 수 3, a, b, 12가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $a-3=12-b$이고 $a+b=12+3=15$이다.

24. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이기 위해서는
$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$을 만족시켜야 한다.
$\lim_{x\to 1-}(2x+a)=2+a$, $\lim_{x\to 1+}(x+13)=14$,
$f(1)=14$이다. 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이 되려면 $2+a=14$가 되어야 하므로 $a=12$이다.

25. [출제의도] 급수의 수렴 이해하기

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{6n}{n+1}\right)$이 수렴할 때,
$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{6n}{n+1}\right)=0$이다.
$\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{n+1}=6$이므로
$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(a_n-\frac{6n}{n+1}\right)+\frac{6n}{n+1}\right\}$
$=\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{6n}{n+1}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{n+1}$
$=0+6=6$
따라서 $\lim_{n\to\infty}(4a_n+3)=27$이다.

26. [출제의도] 거듭제곱근 문제 해결하기

m^n의 세제곱근은 $m^{\frac{n}{3}}$이므로 이 값이 자연수가 되기 위해서는 $n=3$ 또는 $n=6$이다.
i) $n=3$일 때,
조건을 만족시키는 $m=2$이다.
ii) $n=6$일 때,
조건을 만족시키는 m의 값은 2, 3, 4, 5이다.
따라서 m^n의 세제곱근이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 (m,n)은 다음과 같다.
(2,3), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6)
그러므로 조건을 만족하는 순서쌍의 개수는 5이다.

27. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 외적 문제 해결하기

$R=k\left(\frac{W}{D+10}\right)^{\frac{1}{3}}$에서

$R_1=k\left(\frac{160}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}$이고, $R_2=k\left(\frac{p}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}$

이다.

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{k\left(\frac{160}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}}{k\left(\frac{p}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}}=\left(\frac{160}{p}\right)^{\frac{1}{3}}=2 \text{ 이고}$$

$\sqrt[3]{\frac{160}{p}}=2$ 에서 $\frac{160}{p}=8$ 이고 $p=20$ 이다.

28. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 문제 해결하기

$1000=2^3\times5^3$ 에서 양의 약수의 개수는 $p=4\times4=16$ 이다.

1000 의 서로 다른 모든 양의 약수를 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=2^2$, $\cdots$, $a_{16}=2^3\cdot5^3$ 이고,

$a_1a_{16}=1\cdot(2^3\cdot5^3)=10^3$, $a_2a_{15}=2\cdot(2^2\cdot5^3)=10^3$, $\cdots$,

$a_8a_9=(5^2)(2^3\cdot5^1)=10^3$ 이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{16}\log_{10}a_k$$

$=\log_{10}a_1+\log_{10}a_2+\log_{10}a_3+\cdots+\log_{10}a_{16}$

$=\log_{10}a_1a_{16}+\log_{10}a_2a_{15}+\cdots+\log_{10}a_8a_9$

$=\log_{10}10^3+\log_{10}10^3+\cdots+\log_{10}10^3$

$=3+3+\cdots+3=24$

이므로 $q=24$ 이다.

$p+q=16+24=40$

29. [출제의도] 절대부등식을 이용하여 문제 해결하기

세 수 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{b}$ 은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ 이고 $\frac{b}{a}>0$ 이다.

$$\begin{aligned}a+25b&=(a+25b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\\&=26+\frac{25b}{a}+\frac{a}{b}\\&\geq 26+2\sqrt{\frac{25b}{a}\times\frac{a}{b}}=36\end{aligned}$$

(단, 등호는 $a^2=25b^2$, 즉 $a=6$, $b=\frac{6}{5}$ 일 때 성립한다.)

따라서 $a+25b$ 의 최솟값은 36 이다.

[다른 풀이]

세 수 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{b}$ 은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ 이고, $b=\frac{a}{a-1}$ 이다.

여기서 a, b 의 부호가 같으므로 $a-1>0$ 이다.

$$\begin{aligned}a+25b&=a+\frac{25a}{a-1}\\&=a+\frac{25(a-1)+25}{a-1}\\&=a+25+\frac{25}{a-1}\\&=(a-1)+\frac{25}{a-1}+26\\&\geq 2\sqrt{(a-1)\times\frac{25}{a-1}}+26\\&=2\sqrt{25}+26\\&=36\end{aligned}$$

(단, 등호는 $(a-1)^2=25$, 즉 $a=6$ 일 때 성립한다.)

따라서 $a+25b$ 의 최솟값은 36 이다.

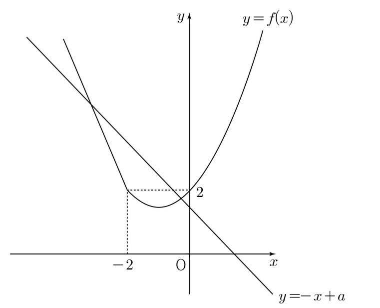
30. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 문제 해결하기

$x<-2$ 일 때 모든 양의 실수 a 에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 근을 구하면

$-3x-4=-x+a$ 에서 $x=\frac{-a-4}{2}$ 이다.

$x\geq-2$ 일 때 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 근은 아래와 같이 세 가지의 경우로 나누어서 구할 수 있다.

ⅰ) $k>0$ 일 때



$x\geq-2$ 에서 곡선 $y=kx^2+2kx+2$ 의 그래프와 직선 $y=-x+a$ 가 만나는 점의 x 좌표는 다음과 같이 구할 수 있다.

$kx^2+2kx+2=-x+a$

$kx^2+(2k+1)x+2-a=0$

$$x=\frac{-(2k+1)+\sqrt{(2k+1)^2-4k(2-a)}}{2k}$$

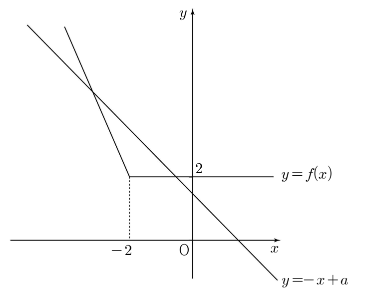
$$x=\frac{-(2k+1)+\sqrt{(2k-1)^2+4ak}}{2k}$$

따라서 모든 양수 a 에 대하여

$$h(a)=\frac{-a-4}{2}+\frac{-(2k+1)+\sqrt{4ka+(2k-1)^2}}{2k}$$

이고 두 연속함수의 합은 연속이므로 함수 $h(a)$ 는 연속이다.

ⅱ) $k=0$ 일 때



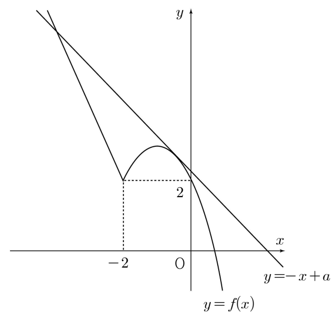
$x\geq-2$ 에서 직선 $y=2$ 의 그래프와 직선 $y=-x+a$ 가 만나는 점의 x 좌표는 $-x+a=2$ 에서 $x=a-2$ 이다. 따라서 모든 양의 실수 a 에 대하여

$h(a)=\frac{-a-4}{2}+(a-2)=\frac{a}{2}-4$

이고 함수 $h(a)$ 는 연속이다.

ⅲ) $k<0$ 일 때

그림과 같이 $x>-2$ 인 부분에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-x+a$ 가 접할 때 판별식을 이용하여 a 의 값을 k 에 관하여 나타내면 다음과 같다.



$kx^2+2kx+2=-x+a$

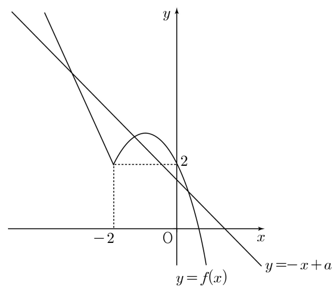
$kx^2+(2k+1)x+2-a=0$ …… (*)

$D=(2k+1)^2-4k(2-a)=0$ 에서

$a=2-\frac{(2k+1)^2}{4k}=1-k-\frac{1}{4k}$

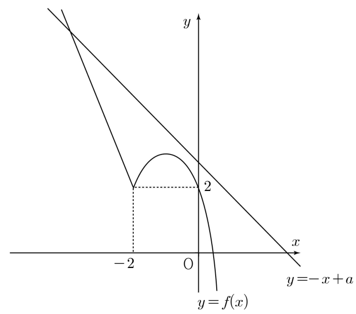
따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-x+a$ 의 위치 관계는 다음 그림과 같다.

① $0<a\leq1-k-\frac{1}{4k}$ 일 때



$x\geq-2$ 에서 방정식 $f(x)=g(x)$ 는 실근을 갖고 (*) 에서 두 실근의 합은 $-\frac{2k+1}{k}$ 이다.

② $a>1-k-\frac{1}{4k}$ 일 때



$x\geq-2$ 에서 방정식 $f(x)=g(x)$ 는 실근을 갖지 않는다.

①, ②에 의해 양의 실수 a 에 대하여 $h(a)$ 는 다음과 같다.

$$h(a)=\begin{cases}\frac{-a-4}{2}-\frac{2k+1}{k} & \left(0<a\leq1-k-\frac{1}{4k}\right)\\ \frac{-a-4}{2} & \left(a>1-k-\frac{1}{4k}\right)\end{cases}$$

$h(a)$ 가 모든 양의 실수 a 에 대하여 연속이기 위해서는 함숫값과 극한값이 같아야 하므로

$\frac{2k+1}{k}=0$ 에서 $k=-\frac{1}{2}$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해 모든 양의 실수 a 에 대하여

$h(a)$가 항상 연속이 되도록 하는 상수 k의 값의 범위는 $k=-\frac{1}{2}$ 또는 $k \ge 0$이다.

따라서 최솟값은 $k=-\frac{1}{2}$이므로 $p^2=\frac{1}{4}$이다.

그러므로

$120 \times \frac{1}{p^2} = 120 \times 4 = 480$이다.