

2017학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학'나'형 정답

1	③	2	③	3	②	4	⑤	5	⑤
6	④	7	②	8	①	9	③	10	①
11	①	12	②	13	④	14	④	15	⑤
16	①	17	①	18	④	19	③	20	②
21	⑤	22	48	23	14	24	12	25	17
26	32	27	201	28	25	29	7	30	62

해설

1. [출제의도] 지수의 연산을 이용하여 간단한 지수를 계산한다.

$$4^{\frac{1}{2}} + 3^0 = 2 + 1 = 3$$

2. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 집합의 원소의 개수를 계산한다.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{2, 4, 6\}$$

$$A - B = \{1, 3, 5\}$$

집합 $A - B$ 의 원소의 개수는 3이다.

$$\text{따라서 } n(A - B) = 3$$

3. [출제의도] 수열의 극한을 계산한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{2n^2 + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{7}{n^2}} = \frac{3 - 0 + 0}{2 + 0} = \frac{3}{2}$$

4. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하여 주어진 항의 값을 구한다.

모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = 3a_n \text{ 즉, } \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 \text{ 이므로}$$

수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 3인 등비수열이다.

$$a_2 = 2$$

$$\text{따라서 } a_4 = a_2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$$

5. [출제의도] 무한급수와 일반항의 관계를 이해하고 이를 활용하여 극한값을 구한다.

$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 5)$ 가 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 5) = 0$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{5}{2}$$

6. [출제의도] 유리함수의 그래프의 성질을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

유리함수 $y = \frac{a}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면

$$y = \frac{a}{x-m} + n$$

두 함수 $y = \frac{a}{x-m} + n$ 과 $y = \frac{3}{x-2} + 2$ 가 일치하므로

$$a = 3, m = 2, n = 2$$

$$\text{따라서 } a + m + n = 3 + 2 + 2 = 7$$

7. [출제의도] 역함수의 성질을 이해하여 함수값을 구한다.

$$f^{-1}(1) = 2 \text{ 이므로 } f(2) = 1$$

$$f(2) = 4 + a = 1, a = -3$$

그러므로 $f(x) = 2x - 3$

$$\text{따라서 } f(3) = 2 \times 3 - 3 = 3$$

8. [출제의도] 로그의 연산법칙을 이해하고 이를 활용하여 로그의 값을 문자식으로 나타낸다.

$$\log 2 = a, \log 3 = b \text{ 라 하자.}$$

$$\log \frac{4}{15} = \log \frac{8}{30}$$

$$= \log 8 - \log 30$$

$$= \log 2^3 - \log(3 \times 10)$$

$$= 3\log 2 - \log 3 - 1$$

$$\text{따라서 } \log \frac{4}{15} = 3a - b - 1$$

9. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 미지수의 값을 추론한다.

$$a_{n+1} = \frac{k}{a_n + 2} \dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $n=1$ 을 대입하면

$$a_2 = \frac{k}{a_1 + 2} = \frac{k}{3} \text{ 이고}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $n=2$ 를 대입하면

$$a_3 = \frac{k}{a_2 + 2}$$

$$= \frac{k}{\frac{k}{3} + 2} = \frac{3}{\frac{k}{3} + 2}$$

이므로

$$3 \times \left(\frac{k}{3} + 2 \right) = k + 6 = 2k$$

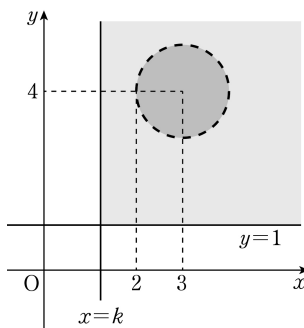
$$\text{따라서 } k = 6$$

10. [출제의도] 부등식의 영역을 이용하여 명제의 조건을 만족시키는 값을 구하는 문제를 해결한다.

부등식 $x \geq k$ 이고 $y \geq 1$ 의 영역과

부등식 $(x-3)^2 + (y-4)^2 < 1$ 의 영역을

좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



조건 p 의 진리집합을 P ,

조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면

p 는 q 가 되기 위한 필요조건이므로

$$P \supset Q \text{ 이고,}$$

직선 $x=k$ 가 점 $(2, 4)$ 에서

원 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$ 에 접할 때

k 는 최댓값을 갖는다.

따라서 k 의 최댓값은 2이다.

11. [출제의도] 등비수열의 성질을 이해하여 주어진 항의 값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 + a_3 = ar + ar^2$$

$$= a(r + r^2) = -12 \dots \textcircled{1}$$

이고, 첫째항이 양수이므로

$$r + r^2 = r(1 + r) < 0 \text{ 에서}$$

$$-1 < r < 0 \text{ 이고,}$$

$$a = 4a_3 = 4ar^2$$

$$r^2 = \frac{1}{4}, r = -\frac{1}{2} (\because -1 < r < 0)$$

$\textcircled{1}$ 에 $r = -\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$a = 48$$

$$\text{따라서 } a_5 = ar^4 = 48 \times \frac{1}{16} = 3$$

12. [출제의도] 절대부등식을 이해하여 미지수의 값의 범위를 구한다.

모든 실수 x 에 대하여

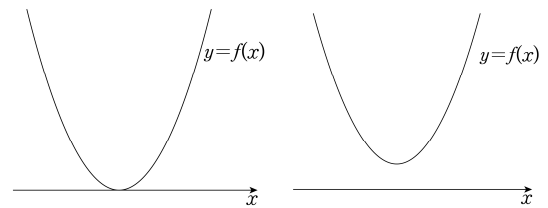
$$\text{부등식 } x^2 + 4kx + 3k^2 \geq 2k - 3 \text{ 이}$$

참인 명제가 되려면

$$f(x) = x^2 + 4kx + 3k^2 - 2k + 3 \text{ 이라 할 때,}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하거나

만나지 않아야 한다.



$$\text{이차방정식 } x^2 + 4kx + 3k^2 - 2k + 3 = 0 \text{ 이}$$

중근 또는 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로

이차방정식 $x^2 + 4kx + 3k^2 - 2k + 3 = 0$ 의 판별식을

D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - (3k^2 - 2k + 3)$$

$$= k^2 + 2k - 3$$

$$= (k+3)(k-1) \leq 0$$

$$-3 \leq k \leq 1 \text{ 이므로}$$

k 의 최댓값 $M=1$,

최솟값 $m=-3$

$$\text{따라서 } M - m = 1 - (-3) = 4$$

13. [출제의도] 일대일 대응의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 함수값을 구한다.

함수 f 가 X 에서 X 로의 일대일 대응이므로

$$\{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

조건 (가)의

$$f(2) - f(3) = f(4) - f(1) = f(5) \text{ 에서}$$

$$f(5) > 0 \text{ 이므로}$$

$$f(2) > f(3), f(4) > f(1) \text{ 이고}$$

조건 (나)에서

$$f(1) < f(2) < f(4) \text{ 이므로}$$

$$f(3) < f(1) < f(2) < f(4) \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } f(2) - f(3) \geq 2 \text{ 이고,}$$

$$f(2) < f(4) \text{ 이므로 } f(2) \leq 4 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } f(2) - f(3) \leq 3$$

$$\text{그러므로 } f(5) = 2 \text{ 또는 } f(5) = 3$$

i) $f(5) = 2$ 인 경우

$$f(3), f(1), f(2), f(4) \text{ 가 이 순서대로}$$

증가하는 4개의 자연수이므로

$$f(3) = 1, f(1) = 3, f(2) = 4, f(4) = 5 \text{ 이다.}$$

$$\text{그런데 } f(5) = 2,$$

$$f(2) - f(3) = 4 - 1 = 3$$

$$\text{이므로 모순이다.}$$

ii) $f(5) = 3$ 인 경우

$$f(5) = f(2) - f(3)$$

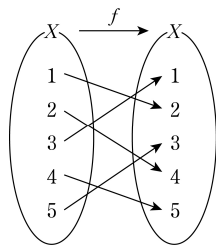
$$= f(4) - f(1) = 3 \text{ 이고}$$

3이 1, 2, 3, 4, 5의 중앙값이므로

$$f(3) < f(1) < f(5) < f(2) < f(4)$$

$$\text{즉, } f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 1,$$

$$f(4) = 5, f(5) = 3$$



따라서 $f(2)+f(5)=4+3=7$

14. [출제의도] 원의 성질을 활용하여 수열의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.

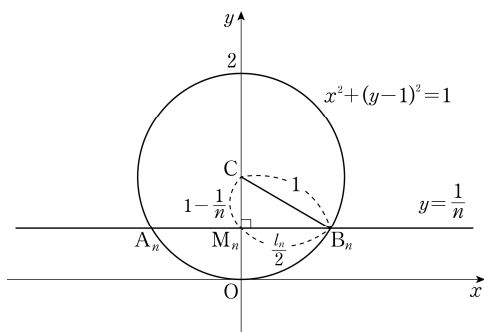
직선 $y = \frac{1}{n}$ 과 원 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 의 두 교점을 각각

A_n, B_n 이라 하고

주어진 원의 중심을 $C(0, 1)$,

선분 $A_n B_n$ 의 중점을 M_n 이라 하면

삼각형 $CM_n B_n$ 은 직각삼각형이다.



$\overline{CB_n} = 1, \overline{CM_n} = 1 - \frac{1}{n}$ 이므로

피타고라스 정리에 의해

$$\left(\frac{l_n}{2}\right)^2 = \overline{B_n M_n}^2 = \overline{CB_n}^2 - \overline{CM_n}^2$$

$$= 1^2 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

$$= \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$$

$$(l_n)^2 = \frac{8}{n} - \frac{4}{n^2}$$

$$n(l_n)^2 = 8 - \frac{4}{n}$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(l_n)^2 = 8$

15. [출제의도] 다항함수와 지수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

점 P_2 의 y 좌표는

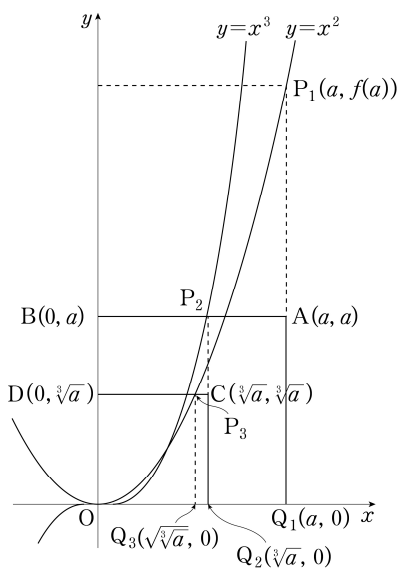
정사각형 $OQ_1 A B$ 의 한 변의 길이가 a 이므로

$$b = \sqrt[3]{a}$$

점 P_3 의 y 좌표는

정사각형 $OQ_2 C D$ 의 한 변의 길이가 b 이므로

$$c = \sqrt{b} = \sqrt[6]{a}$$



$$bc = \sqrt[3]{a} \sqrt[6]{a}$$

$$= a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}$$

$$= a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}$$

$$= a^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$a = 4$$

따라서 점 P_1 의 y 좌표의 값은 16 이다.

16. [출제의도] 유리함수와 합성함수의 성질을 이해하여 방정식의 해의 개수를 구한다.

방정식 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1$ 이므로

$g(x)$ 의 정의에 의해 $f(x)$ 는 정수이다.

$$f(x) = \frac{6x+12}{2x-1}$$

$$= \frac{15}{2x-1} + 3 \text{ 이 정수가 되려면}$$

$2x-1$ 은 15의 약수이어야 한다.

x 가 자연수이므로 $2x-1$ 은 자연수이고,

$2x-1$ 은 15의 양의 약수이다.

$$2x-1 = 1, 3, 5, 15$$

$$x = 1, 2, 3, 8$$

따라서 서로 다른 자연수 x 의 개수는 4이다.

17. [출제의도] 역함수와 무리함수의 성질을 활용하여 부등식의 해를 구하는 문제를 해결한다.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} & (x \geq 0) \\ 4x & (x < 0) \end{cases}$$

이므로 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하면

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & (x \geq 0) \\ \frac{1}{4}x & (x < 0) \end{cases}$$

i) $x \geq 0$ 인 경우

$$g(x) \leq -\frac{1}{4}x^2 + 3$$

$$\frac{1}{2}x^2 \leq -\frac{1}{4}x^2 + 3$$

$$\frac{3}{4}x^2 \leq 3$$

$$x^2 \leq 4$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

$$x \geq 0 \text{ 이므로 } 0 \leq x \leq 2$$

ii) $x < 0$ 인 경우

$$g(x) \leq -\frac{1}{4}x^2 + 3$$

$$\frac{1}{4}x \leq -\frac{1}{4}x^2 + 3$$

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 3 \leq 0$$

$$x^2 + x - 12 \leq 0$$

$$(x+4)(x-3) \leq 0$$

$$-4 \leq x \leq 3$$

$$x < 0 \text{ 이므로 } -4 \leq x < 0$$

i), ii)에서 부등식의 해는 $-4 \leq x \leq 2$

따라서 $a+b = -2$

18. [출제의도] 수열의 합과 성질을 이용하여 수열의 일반항을 구하는 과정을 증명한다.

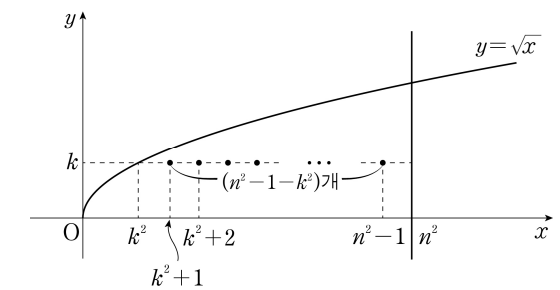
$n=2$ 일 때 주어진 도형의 내부에 있는 점 중에서

x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은

$(2, 1), (3, 1)$ 이므로

$$a_2 = 2$$

따라서 [가] 는 2이다.



$n \geq 3$ 일 때,

$1 \leq k \leq n-1$ 인 정수 k 에 대하여

주어진 도형의 내부에 있는 점 중

y 좌표가 k 인 점은

$(k^2+1, k), (k^2+2, k), \dots, (n^2-1, k)$

이므로

이 점의 개수를 b_k 라 하면

$$b_k = n^2 - 1 - k^2$$

따라서 [나] 는 $n^2 - 1$ 이다.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - 1 - k^2)$$

$$= (n-1)(n^2 - 1) - \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$= (n-1)(n^2 - 1) - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{(n-1)(4n^2 + n - 6)}{6}$$

따라서 [다] 는 $\frac{(n-1)(4n^2 + n - 6)}{6}$ 이다.

그러므로 $p=2, f(n)=n^2-1,$

$$g(n) = \frac{(n-1)(4n^2 + n - 6)}{6}$$

따라서 $p+f(4)+g(6) = 2+15+120$

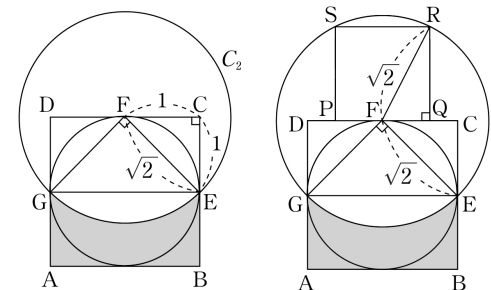
$$= 137$$

19. [출제의도] 도형의 답음을 이용하여 등비급수의 합을 구하는 문제를 해결한다.

그림 R_1 에서 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_1 이라

하면 S_1 은 그림과 같이 정사각형 $ABCD$ 의 내부와

원 C_2 의 외부의 공통부분의 넓이와 같다.



직각삼각형 FCE 가 $\overline{FC} = \overline{CE} = 1$ 이므로

$$\overline{FE} = \sqrt{2}$$

따라서 선분 AD 의 중점을 G 라 하면

$S_1 = (\text{직사각형 } ABEG \text{ 의 넓이})$

$- \{(\text{부채꼴 } EFG \text{ 의 넓이})$

$- (\text{직각삼각형 } EFG \text{ 의 넓이})\}$

$$= (2 \times 1) - \left\{ \pi \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{1}{4} - (\sqrt{2})^2 \times \frac{1}{2} \right\}$$

$$= 3 - \frac{\pi}{2}$$

R_2 에서 정사각형 PQRS의 한 변의 길이 \overline{QR} 는 $\overline{FR} = \overline{FE} = \sqrt{2}$ 이므로
직각삼각형 FQR에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{QR}^2 = (\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\overline{QR}}{2}\right)^2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{QR} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

R_1 에서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이고

$$\overline{QR} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \text{ 이므로}$$

R_2 에서 추가로 색칠되는 도형의 넓이 S_2 는

$$S_2 = \left(\frac{2\sqrt{10}}{5} \times \frac{1}{2}\right)^2 \times S_1$$

$$= \frac{2}{5} S_1$$

같은 방법으로 R_{n+1} 에서 추가로 색칠되는 도형의 넓이는 R_n 에서 추가로 색칠된

도형의 넓이의 $\frac{2}{5}$ 배이다.

따라서

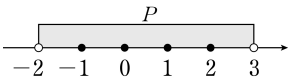
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3 - \frac{\pi}{2}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{30 - 5\pi}{6}$$

20. [출제의도] 연립부등식을 활용하여 조건이 참이 되도록 하는 문제를 해결한다.

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) < 0 \text{ 이므로}$$

조건 $p: x^2 - x - 6 < 0$ 의 진리집합 P 는

$$P = \{x | -2 < x < 3\}$$



$$x^2 + (6-3a)x + 2a^2 - 10a + 8$$

$$= x^2 + (6-3a)x + 2(a-1)(a-4)$$

$$= (x-2a+2)(x-a+4) \text{ 이므로}$$

조건 $q: x^2 + (6-3a)x + 2a^2 - 10a + 8 \geq 0$ 의

진리집합 Q 는 a 의 범위에 따라 각각 다음과 같다.

i) $2a-2 < a-4$ 일 때 즉, $a < -2$ 일 때,

$$Q = \{x | x \leq 2a-2 \text{ 또는 } x \geq a-4\}$$

ii) $2a-2 = a-4$ 일 때 즉, $a = -2$ 일 때,

$$Q = \{x | x \neq -6 \text{인 모든 실수}\}$$

iii) $2a-2 > a-4$ 일 때 즉, $a > -2$ 일 때,

$$Q = \{x | x \leq a-4 \text{ 또는 } x \geq 2a-2\}$$

i), ii)에서 $a \leq -2$ 일 때

$$P \cap Q = \{x | -2 < x < 3\} \text{ 이므로}$$

두 조건 p, q 를 모두 참이 되도록 하는 정수 x 는

$-1, 0, 1, 2$ 의 4개이다.

iii)에서 $a > -2$ 일 때

두 조건 p, q 를 모두 참이 되도록 하는 정수 x 가 오직 하나 존재하려면

$$1 < 2a-2 \leq 2 \text{ 이거나 } -1 \leq a-4 < 0 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } \frac{3}{2} < a \leq 2 \text{ 또는 } 3 \leq a < 4 \text{ 이므로}$$

가능한 정수 a 는 2 또는 3이다.

따라서 모든 정수 a 의 값의 합은 5이다.

21. [출제의도] 지수의 성질을 이용하여 명제의 참과 거짓을 추론한다.

ㄱ. A_4 는 $2^a = \frac{4}{b}$ 에서 $4 = 2^a \times b$ 인

자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이므로

$$4 = 2^1 \times 2, 4 = 2^2 \times 1$$

$$A_4 = \{(1, 2), (2, 1)\} \text{ (참)}$$

ㄴ. $m = 2^k$ 일 때, $A_m = A_{2^k}$

A_m 은 $2^a = \frac{2^k}{b}$ 에서

$$2^k = 2^a \times b \text{ 인}$$

자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이므로

$$A_m = \{(1, 2^{k-1}), (2, 2^{k-2}), (3, 2^{k-3}), \dots, (k, 2^0)\}$$

이다.

따라서 $n(A_m) = k$ (참)

ㄷ. A_m 은 $2^a = \frac{m}{b}$ 에서

$m = 2^a \times b$ 인 자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이다.

$n(A_m) = 1$ 이 되기 위해서는

$$b = \frac{m}{2^k} \text{ 이 자연수가 되도록 하는 자연수 } k \text{ 가}$$

오직 하나만 존재하므로

$$k = 1 \text{ 이어야 한다.}$$

따라서 $m = 2^1 \times (\text{홀수})$ 이어야 한다.

두 자리 자연수 중에서 $2^1 \times (\text{홀수})$ 인 자연수는

$$2 \times 5, 2 \times 7, 2 \times 9, \dots, 2 \times 49$$

이다.

따라서 $n(A_m) = 1$ 이 되도록 하는 두 자리 자연수

m 의 개수는 5, 7, 9, ..., 49의 개수와 같다.

5, 7, 9, ..., 49는 첫째항이 5이고 공차가 2인

등차수열의 첫째항부터 제23항을 나타낸 것이므로

조건을 만족시키는 두 자리 자연수 m 의 개수는

$$23 \text{ 이다. (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22. [출제의도] 로그의 연산을 이용하여 간단한 로그를 계산한다.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \times \log_2 8 = 16 \times 3 = 48$$

23. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 주어진 항의 값을 계산한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

일반항 a_n 은

$$a_n = a + (n-1)d \text{ 이므로}$$

$$a_5 - a_3 = (a+4d) - (a+2d)$$

$$= 2d = 6$$

$$d = 3$$

$$a_2 = a + d = a + 3 = 2, a = -1$$

$$\text{따라서 } a_6 = a + 5d$$

$$= (-1) + 5 \times 3 = 14$$

24. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$$a_n - 1 = c_n \text{ 이라 하면}$$

$$a_n = c_n + 1 \text{ 이고,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) = 2 \text{ 에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n + 1)$$

$$= 2 + 1 = 3$$

$$a_n + 2b_n = d_n \text{ 이라 하면}$$

$$b_n = \frac{1}{2}(d_n - a_n) \text{ 이고}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2b_n) = 9 \text{ 에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 9 \text{ 이므로}$$

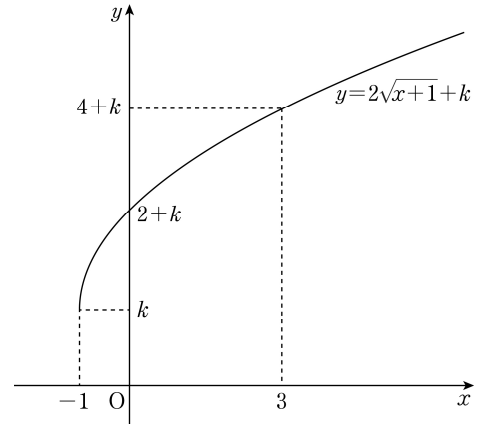
$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(d_n - a_n) = \frac{1}{2}(9 - 3) = 3$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(1 + b_n) = 3 \times (1 + 3) = 12$$

25. [출제의도] 무리함수의 그래프를 이해하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

$$f(x) = 2\sqrt{x+1} + k \text{ 로 놓으면}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$0 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값은 $M = f(3)$ 이고

최솟값은 $m = f(0)$ 이므로

$$M = 2\sqrt{3+1} + k = 4 + k,$$

$$m = 2\sqrt{0+1} + k = 2 + k \text{ 에서}$$

$$M + m = (4 + k) + (2 + k)$$

$$= 6 + 2k$$

$$= 40$$

따라서 $k = 17$

26. [출제의도] 등비급수의 성질을 이해하여 등비급수의 합을 구한다.

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 3$ 이고,

모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$ 이므로

수열 $\{a_n\}$ 은

첫째항이 3이고 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 등비수열이다.

$$\text{따라서 } a_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_{2n-1} = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{(2n-1)-1}$$

$$= 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2(n-1)}$$

$$= 3 \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \frac{3}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{27}{5}$$

$$\text{따라서 } p + q = 5 + 27 = 32$$

27. [출제의도] 이차함수의 그래프를 이용하여 여러 가지 수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.

부등식 $f(n) < k < f(n+1)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)은

$$n^2 + n - \frac{1}{3} < k < n^2 + n + \frac{2}{3} \dots \textcircled{1}$$

부등식 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 자연수 k 는 $n^2 + n$ 이므로

$$a_n = n^2 + n$$

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2 + n}$$

$$= \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$$

$$\text{따라서 } p + q = 101 + 100 = 201$$

28. [출제의도] 집합의 연산을 활용하여 실생활 문제를 해결한다.

전체 학생의 집합을 U ,

놀이 기구 A를 이용한 학생의 집합을 A ,

놀이 기구 B를 이용한 학생의 집합을 B 라 하면

$n(U) = 30$ 이고, $n(A) = 23$, $n(B) = 16$ 이므로

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 23 + 16 - n(A \cap B)$$

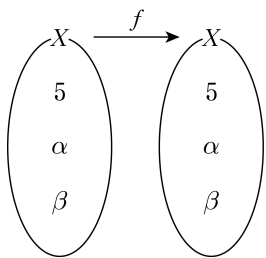
$= 39 - n(A \cap B)$
 이때 $n(A) \leq n(A \cup B) \leq n(U)$ 이므로
 $23 \leq n(A \cup B) \leq 30$
 $23 \leq 39 - n(A \cap B) \leq 30$
 $9 \leq n(A \cap B) \leq 16$
 $n(A \cap B)$ 의 최댓값은 $M=16$,
 최솟값은 $m=9$
 따라서 $M+m=16+9=25$

29. [출제의도] 함수와 로그의 성질을 이용하여 집합의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

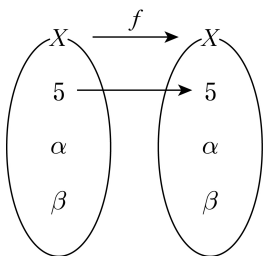
$\log_x n$ 이 자연수가 되려면
 n 은 x 의 거듭제곱이어야 하므로
 $A(x)$ 의 값은 1부터 300 사이의 자연수 중
 x 의 거듭제곱으로 나타내어지는 수의 개수이다.
 $2^8 < 300 < 2^9$ 이므로
 $A(2) = 8$
 이와 같은 방법으로 2 이상의 자연수 x 에 대하여
 $A(x)$ 의 값을 구하면
 $A(2) = 8, A(3) = 5, A(4) = 4, A(5) = 3, A(6) = 3,$
 $A(7) = 2, A(8) = 2, \dots$ 이므로
 전체집합 P 의 공집합이 아닌 부분집합 X 에 대하여
 집합 X 에서 집합 X 로의 대응 f 가 일대일 대응이 되
 려면 집합 X 는 집합 $\{2, 3, 4, 5, 8\}$ 의 부분집합이어야
 한다.
 함수 f 가 일대일 대응이므로
 임의의 $a \in X$ 에 대하여
 $f(a) \in X, f(f(a)) = a$ 를 만족시키는 집합 X 는
 $\{4\}, \{2, 8\}, \{3, 5\}, \{2, 4, 8\}, \{3, 4, 5\},$
 $\{2, 3, 5, 8\}, \{2, 3, 4, 5, 8\}$ 이다.
 따라서 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 일대일 대응이 되도록 하는
 집합 X 의 개수는 7이다.

30. [출제의도] 집합의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 값을 추론한다.

자연수 전체의 집합의 부분집합 X 가
 $n(X) = 3$ 이고 $5 \in X$ 이므로 $X = \{5, \alpha, \beta\}$
 대응 $f: X \rightarrow X$ 를
 $x \in X$ 가 홀수이면 $f(x) = \frac{x+p}{2}$
 $x \in X$ 가 짝수이면 $f(x) = \frac{x}{2}$
 로 정의하면 f 는 함수이다.



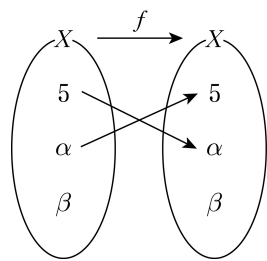
$\frac{5+p}{2}$ 가 자연수가 되어야 하므로 p 는 홀수이다.
 i) $f(5) = 5$, 즉 $p=5$ 일 때



$f(\alpha) = 5, f(\alpha) = \alpha, f(\alpha) = \beta$ 인 경우를 각각 생
 각할 수 있다.
 $f(\alpha) = 5$ 일 때, α 가 짝수이면 $\frac{\alpha}{2} = 5, \alpha = 10$
 이때 β 가 홀수이면 $\beta = 15$ 이고,

β 가 짝수이면 $\beta = 20$
 따라서 가능한 경우는
 $X = \{5, 10, 15\}, X = \{5, 10, 20\}$
 따라서 $p=5$ 이고 α 가 짝수인 경우
 가능한 집합 X 가 존재하므로
 $p=5$ 일 때, α 가 홀수인 경우와
 $f(\alpha) = \alpha, f(\alpha) = \beta$ 인 경우는 다루지 않는다.

ii) $f(5) = \alpha$ 일 때
 $\alpha \neq 5$ 이므로 $p \neq 5$
 그런데 $p < 5$ 인 홀수인 경우에는 $n(X) = 3$ 인
 경우가 존재하지 않음을 쉽게 확인할 수 있다.
 따라서 $p > 5$ 인 경우만 생각하면 된다.
 $5 < p$ 이면 $5 < \alpha < p$ 이다.
 이때 가능한 경우로 $f(\alpha) = 5$ 또는 $f(\alpha) = \alpha$
 또는 $f(\alpha) = \beta$ 를 생각해 볼 수 있다.

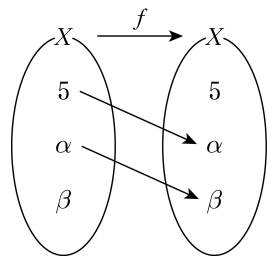


α 가 짝수이면 $\frac{\alpha}{2} = 5, \alpha = 10$ 이고,
 $\frac{5+p}{2} = 10$ 이므로 $p = 15$
 가능한 β 의 값은 $\beta = 15$ 와 $\beta = 20$ 이 있다.

ii-2) $f(5) = \alpha, f(\alpha) = \alpha$ 일 때
 $\alpha \neq 5$ 이면 $p \neq 5$ 이므로
 $\frac{\alpha}{2} \neq \alpha, \frac{\alpha+p}{2} \neq \alpha$

따라서 이 경우는 존재하지 않는다.

ii-3) $f(5) = \alpha, f(\alpha) = \beta$ 일 때



$f(\beta) = 5$ 또는 $f(\beta) = \alpha$ 또는 $f(\beta) = \beta$ 의
 경우를 생각해 볼 수 있다.

ii-3-a) $f(\beta) = 5$ 일 때,

ii-3-a-1) α 가 짝수이면 $\frac{\alpha}{2} = \beta$

이때 β 가 짝수이면 $\frac{\beta}{2} = 5, \beta = 10$ 이고,
 $\alpha = 20$

$\frac{5+p}{2} = 20$ 이므로 $p = 35$

이때 $X = \{5, 10, 20\}$

β 가 홀수이면

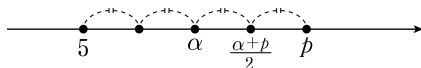
$f(\beta) = f(f(\alpha)) = f(f(f(5)))$ 에서

$\frac{\beta+p}{2} = \frac{\alpha+2p}{4} = \frac{5+5p}{8} = 5$ 이고, $p = 7$

이때 $X = \{3, 5, 6\}$

ii-3-a-2) $p > 5$ 이면 $5, \alpha, p, \frac{\alpha+p}{2}$ 의

대소 관계는 다음 그림과 같다.



α 가 홀수이면 $\frac{\alpha+p}{2} = \beta$

β 가 홀수이면 $\alpha < \beta < \frac{\beta+p}{2} < p$ 이므로

$n(X) \geq 4$ 가 되어 모순이 생긴다.

β 가 짝수이면 $\frac{\beta}{2} = 5$

$f(\beta) = \frac{\beta}{2} = 5$, 즉 $\beta = 10$ 일 때,

$\frac{\alpha+p}{2} = \frac{5+p+p}{2} = 10, p = \frac{35}{3}$ 이므로

모순이다.

따라서 가능한 경우가 없다.

ii-3-b) $f(\beta) = \alpha$ 일 때,

ii-3-b-1) α 가 짝수이고 β 가 짝수이면

$f(\beta) = \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{4} = \alpha$ 이므로

$\alpha = 0$ 이 되어 모순이다.

ii-3-b-2) α 가 짝수이고 β 가 홀수이면

$\alpha = f(\beta) = f(f(f(5)))$ 이므로

$\frac{5+p}{2} = \frac{5+5p}{8}, p = 15$ 이고

$\beta = 5$ 가 되어 모순이다.

ii-3-b-3) α 가 홀수이면 β 는 짝수이고

이 경우 $\frac{\beta}{2} = \alpha$ 가 된다.

$\frac{5+3p}{8} = \frac{5+p}{2}, p < 0$ 이 되어 모순이다.

ii-3-c) $f(\beta) = \beta$ 일 때,

$\beta < p$ 이므로 $\frac{\beta}{2} \neq \beta$ 이고,

$\frac{\beta+p}{2} \neq \beta$ 이므로

$f(\beta) \neq \beta$ 이다.

따라서 가능한 경우가 없다.

i), ii)에서 조건을 만족시키는 모든 자연수 p 의 값의 합은 $5+7+15+35=62$