

# 2017학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

## • 수학 영역 •

### 수학 '가'형 정답

1	③	2	⑤	3	②	4	④	5	④
6	⑤	7	①	8	②	9	②	10	⑤
11	①	12	③	13	②	14	①	15	②
16	④	17	①	18	③	19	⑤	20	③
21	④	22	3	23	20	24	60	25	27
26	6	27	8	28	24	29	528	30	90

### 해설

1. [출제의도]  $\pi + \theta$  꼴의 삼각함수의 값을 계산한다.

$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin \left( \pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

2. [출제의도] 조합의 수를 계산한다.

$${}^6C_3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20$$

3. [출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산한다.

$$f'(x) = 2xe^{x^2-1} \text{ 이므로 } f'(1) = 2$$

4. [출제의도] 정적분의 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 계산한다.

$\ln x = t$  로 놓고 양변을  $x$  에 대하여 미분하면  $\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$   
 $x=1$  이면  $t=0$  이고,  $x=e^2$  이면  $t=2$   
 따라서  $\int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \int_0^2 t^3 dt = \left[ \frac{1}{4} t^4 \right]_0^2 = 4$

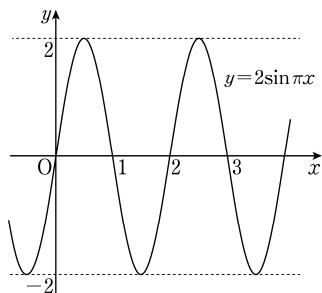
5. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이해하고 역함수를 이용하여 지수함수의 밑을 구한다.

곡선  $y = a^x$  을 직선  $y = x$  에 대하여 대칭이동한 곡선은  $y = \log_a x$  이고 이 곡선이 점  $(2, 3)$  을 지나므로  $x=2, y=3$  을 대입하면  $3 = \log_a 2$   
 따라서  $a = \sqrt[3]{2}$

[다른 풀이]

직선  $y = x$  에 대하여 대칭이동한 곡선은  $y = a^x$  의 역함수의 그래프이므로 지수함수  $y = a^x$  에  $x=3, y=2$  를 대입하면 등식이 성립한다.  
 따라서  $2 = a^3$  에서  $a = \sqrt[3]{2}$

6. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하고 미지수의 값을 구한다.



함수  $y = a \sin \frac{\pi}{2b} x$  의 그래프는  $y = \sin \frac{\pi}{2b} x$  의 그래프를  $y$  축의 방향으로  $a$  배한 것이고  $a > 0$  이므로 최댓값은  $a$  이고 최솟값은  $-a$  이다.

그런데 함수  $y = a \sin \frac{\pi}{2b} x$  의 최댓값이 2이므로  $a = 2$

또한  $a \sin \frac{\pi}{2b} x = a \sin \left( \frac{\pi}{2b} x + 2\pi \right) = a \sin \frac{\pi}{2b} (x + 4b)$  이므로

함수  $y = a \sin \frac{\pi}{2b} x$  의 주기가  $4b$  이다.

그러므로  $4b = 2, b = \frac{1}{2}$

따라서  $a + b = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

7. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이해하여 두 로그함수의 그래프가 만나는 점을 구한다.

두 곡선  $y = \log_2 x, y = \log_2 (2^n - x)$  의 만나는 점의  $x$  좌표는  $\log_2 x = \log_2 (2^n - x)$  에서  $x = 2^n - x$

즉,  $x = 2^{n-1}$  이므로  $a_n = 2^{n-1}$

따라서  $\sum_{n=1}^5 a_n = \sum_{n=1}^5 2^{n-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$

8. [출제의도] 변곡점을 이해하여 접선의 기울기를 구한다.

$y = (\ln x)^2 - x + 1$  에서

$$y' = \frac{2 \ln x}{x} - 1$$

$$y'' = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}$$

$2 - 2 \ln x = 0$  에서  $x = e$  이고

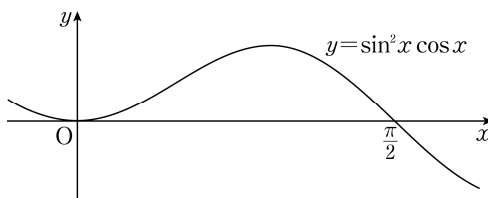
$x = e$  의 좌우에서  $y''$  의 부호가 바뀌므로

곡선  $y = (\ln x)^2 - x + 1$  은  $x = e$  에서 변곡점  $(e, 2 - e)$  를 갖는다.

따라서 변곡점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2 \ln e}{e} - 1 = \frac{2}{e} - 1$$

9. [출제의도] 정적분의 치환적분법을 이해하여 곡선과  $x$  축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.



$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  에서  $\sin^2 x \cos x = 0$  의 해를 구하면

$x = 0$  또는  $x = \frac{\pi}{2}$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  일 때  $\sin^2 x \cos x \geq 0$  이므로 구하는 넓이

$$\text{는 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin^2 x \cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$$

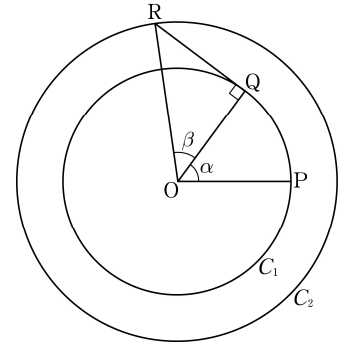
$\sin x = t$  로 놓고 양변을  $x$  에 대하여 미분하면

$$\cos x = \frac{dt}{dx}$$

$x = 0$  이면  $t = 0$  이고,  $x = \frac{\pi}{2}$  이면  $t = 1$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx &= \int_0^1 t^2 dt \\ &= \left[ \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

10. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이해하고 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구한다.



$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  이고

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  이므로  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$

삼각형 ROQ 에 대하여

$\overline{OR} = \sqrt{2}, \overline{OQ} = 1, \angle OQR = \frac{\pi}{2}$  이므로  $\beta = \frac{\pi}{4}$

그러므로  $\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

11. [출제의도] 로그함수의 그래프의 성질을 이해하여 선분의 길이를 구한다.

$y = \log_a x, y = \log_b x$  와 직선  $y = 1$  이 만나는 두 점의  $x$  좌표를 각각 구하면

$\log_a x = 1$  에서  $x = a, \log_b x = 1$  에서  $x = b$

두 점  $A_1, B_1$  의 좌표는 각각  $(a, 1), (b, 1)$

$y = \log_a x, y = \log_b x$  와 직선  $y = 2$  가 만나는 두 점의  $x$  좌표를 각각 구하면

$\log_a x = 2$  에서  $x = a^2, \log_b x = 2$  에서  $x = b^2$

두 점  $A_2, B_2$  의 좌표는 각각  $(a^2, 2), (b^2, 2)$

$\overline{A_1 B_1} = 1 = b - a$

선분  $\overline{A_1 B_1}$  의 중점의 좌표가  $(2, 1)$  이므로

$$\frac{a+b}{2} = 2, a+b=4$$

따라서  $\overline{A_2 B_2} = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) = 1 \times 4 = 4$

12. [출제의도] 조합의 성질을 이해하여 조건을 만족시키는 조합의 수를 구한다.

(i)  $a = 5$  일 때

$c < b < 5$  이므로 1부터 4까지의 자연수 중 2개를 뽑아 큰 수를  $b$ , 작은 수를  $c$  라 하는 경우의 수는  ${}_4C_2 = 6$

(ii)  $a = 6$  일 때,

$c < b < 6$  이므로 1부터 5까지의 자연수 중 2개를 뽑아 큰 수를  $b$ , 작은 수를  $c$  라 하는 경우의 수는  ${}_5C_2 = 10$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수의 개수는

$$6 + 10 = 16$$

13. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 로그함수의 극한에 관한 문제를 해결한다.

$A(t, \ln t), B(t, -\ln t)$  이므로  $\overline{AB} = 2 \ln t$

선분 PQ의 길이가  $f(t)$  이고 삼각형 AQB의 넓이가

$$1 \text{ 이므로 } \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PQ} = 1 \text{ 에서 } \frac{1}{2} \times 2 \ln t \times f(t) = 1$$

$$\text{즉, } f(t) = \frac{1}{\ln t}$$

$t-1 = s$  로 놓으면  $t = s+1$  이고

$t \rightarrow 1+$  일 때  $s \rightarrow 0+$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1+} \{(t-1)f(t)\} &= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{t-1}{\ln t} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{s}{\ln(s+1)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

14. [출제의도] 극댓값과 극솟값의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구한다.

$a = -1$ 일 때 구간  $[0, 2)$ 에서  $f(x) = x+1$ 이므로  $x=0$ 에서 극댓값을 갖지 않는다.  
이것은 모순이므로  $a \neq -1$   
구간  $[0, 2)$ 에서  $f(x)$ 가 극솟값을 갖도록 하는  $a$ 의 값의 범위를 구하면

$$f(x) = \frac{(x-a)^2}{x+1} \text{에서 } f'(x) = \frac{(x-a)(x+2+a)}{(x+1)^2}$$

$f'(x)=0$ 에서  $x=a$  또는  $x=-a-2$

(i)  $a < -a-2$ 일 때

$a < -a-2$ 에서  $a < -1$ 이고,

$x = -a-2$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로  $x = -a-2$ 에서  $f(x)$ 는 극솟값을 갖는다. 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 극댓값을 가지므로 구간  $(0, 2)$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\text{즉 } 0 < -a-2 < 2, -4 < a < -2$$

$a$ 는 정수이므로  $a = -3$

(ii)  $a > -a-2$ 일 때

$a > -a-2$ 에서  $a > -1$ 이고,

$x = a$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로  $x = a$ 에서  $f(x)$ 는 극솟값을 갖는다. 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 극댓값을 가지므로 구간  $(0, 2)$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\text{즉 } 0 < a < 2$$

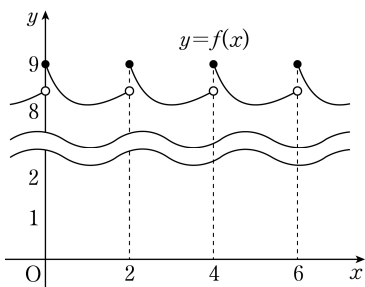
$a$ 는 정수이므로  $a = 1$

(i), (ii)에 의해서 조건을 만족하는 정수  $a$ 의 값은  $-3$  또는  $1$

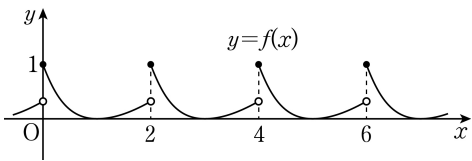
따라서 모든 정수  $a$ 의 값의 곱은  $(-3) \times 1 = -3$

[보충 설명]

(i)  $a = -3$ 일 때, 함수  $y = f(x)$ 의 그래프를 그려 보면 다음과 같이  $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.



(ii)  $a = 1$ 일 때, 함수  $y = f(x)$ 의 그래프를 그려 보면 다음과 같이  $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.



15. [출제의도] 순열의 성질과 원순열이 활용된 실생활 문제를 해결한다.

여학생 3명이 원탁에 둘러앉은 경우의 수는

$$(3-1)! = 2!$$

각 경우에 대하여 여학생과 여학생 사이 세 곳에 앉는 남학생의 수는 모두 달라야 하므로 각각 1명, 2명, 3명이고 이를 정하는 경우의 수는  $3!$

남학생을 일렬로 나열하는 경우의 수는  $6!$

그러므로 구하는 경우의 수는

$$2! \times 3! \times 6! = 12 \times 6!$$

따라서  $n = 12$

[다른 풀이]

여학생 3명이 원탁에 둘러앉은 경우의 수는

$$(3-1)! = 2!$$

각 경우에 대하여 여학생과 여학생 사이 세 곳에 앉는 남학생의 수는 모두 다르므로 남학생 6명이 3명, 2명, 1명의 세 조로 나뉘어 여학생과 여학생 사이에 앉아야 한다.

이와 같이 남학생을 세 조로 나누는 경우의 수는

$${}^6C_3 \times {}^3C_2 \times {}_1C_1 = \frac{6!}{3!2!}$$

각 경우에 대하여 세 조를 여학생과 여학생 사이의 세 곳에 배열하는 경우의 수는  $3!$

각 경우에 대하여 남학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는  $3! \times 2! \times 1!$

이므로 구하는 경우의 수는

$$2! \times \frac{6!}{3!2!} \times 3! \times 3! \times 2! \times 1! = 12 \times 6!$$

따라서  $n = 12$

16. [출제의도] 부분적분법을 이용하여 일반적인 함수의 정적분의 값을 추론한다.

$$\int_{-1}^x f(t) dt = F(x) \text{이므로 } F'(x) = f(x), F(-1) = 0$$

$$\int_0^1 xf(x) dx = \int_0^{-1} xf(x) dx \text{이므로}$$

$$\int_0^1 xf(x) dx - \int_0^{-1} xf(x) dx = 0$$

$$\int_0^1 xf(x) dx + \int_{-1}^0 xf(x) dx = 0$$

$$\int_{-1}^1 xf(x) dx = 0$$

정적분의 부분적분법에 의하여,

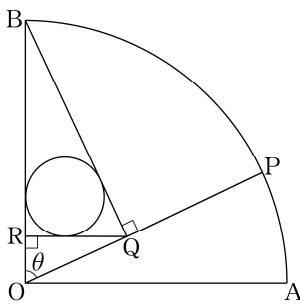
$$\int_{-1}^1 F(x) dx = \left[ xF(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 xf(x) dx$$

$$= F(1) + F(-1) - 0$$

$$= F(1) + 0$$

$$= \int_{-1}^1 f(x) dx = 12$$

17. [출제의도] 도형의 성질과 삼각함수의 극한을 이용하여 문제를 해결한다.



$\angle BOQ = \theta$ ,  $\overline{OB} = 1$ 이고  $\angle OQB = \frac{\pi}{2}$ 이므로  $\overline{BQ} = \sin \theta$

$$\text{또, } \angle RQB = \frac{\pi}{2} - \angle QBR = \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \theta,$$

$\overline{BQ} = \sin \theta$ 이고  $\angle BRQ = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\overline{BR} = \sin^2 \theta, \overline{RQ} = \sin \theta \cos \theta$$

삼각형 BRQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BR} \times \overline{RQ} = \frac{1}{2} \times \sin^2 \theta \times \sin \theta \cos \theta \dots\dots \textcircled{A}$$

삼각형 BRQ에 내접하는 원의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하면

$$\frac{1}{2} \times r(\theta) \times (\sin \theta + \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta) \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②에 의해서

$$r(\theta) = \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta + \cos \theta}$$

따라서

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{r(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\theta^2 (1 + \sin \theta + \cos \theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta + \cos \theta}$$

$$= 1 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

18. [출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 그래프와 직선이 만나는 점의 개수를 추론한다.

$f(x) = x^2 e^{-x+2}$ 에서

$$f'(x) = (-x^2 + 2x)e^{-x+2}$$

$f'(x) = 0$ 에서  $x = 0$  또는  $x = 2$

$$y = (f \circ f)(x) \text{에서 } \frac{dy}{dx} = f'(f(x))f'(x)$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ 인  $x$ 의 값을 구하면

(i)  $f'(x) = 0$ 에서  $x = 0$  또는  $x = 2$

(ii)  $f'(f(x)) = 0$ 에서

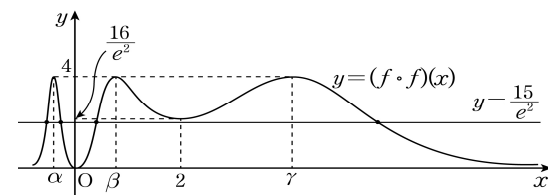
$f(x) = 0$ 일 때,  $x = 0$

$f(x) = 2$ 일 때,

$x = \alpha$  또는  $x = \beta$  또는  $x = \gamma$  ( $\alpha < \beta < \gamma$ )로 놓으면 함수  $y = (f \circ f)(x)$ 의 증가와 감소를 나타낸 표는 다음과 같다.

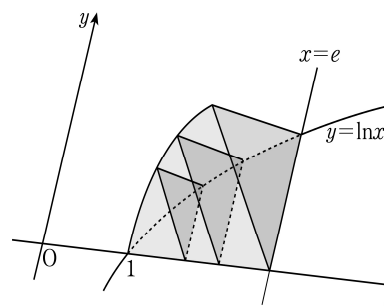
$x$	$\dots$	$\alpha$	$\dots$	$0$	$\dots$	$\beta$	$\dots$	$2$	$\dots$	$\gamma$	$\dots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$	$-$
$f'(f(x))$	$-$	$0$	$+$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$-$	$0$	$+$
$\frac{dy}{dx}$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$y$	$\nearrow$	$4$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$	$4$	$\searrow$	$\frac{16}{e^2}$	$\nearrow$	$4$	$\searrow$

위의 표를 이용하여 함수  $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프를 나타내면 다음과 같다.



따라서 함수  $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선  $y = \frac{15}{e^2}$ 가 만나는 점의 개수는 4이다.

19. [출제의도] 정적분을 활용하여 입체도형의 부피 구하는 문제를 해결한다.



$y = e^x$ 의 역함수는  $y = \ln x$ 이므로

점  $(0, 1)$ 은 점  $(1, 0)$ 으로, 점  $(0, e)$ 는 점  $(e, 0)$ 으로 이동한다.

그런데  $x = t$  ( $1 \leq t \leq e$ )일 때 정삼각형의 한 변의 길이는  $\ln t$ 이므로 정삼각형의 넓이를  $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\ln t)^2$$

따라서 구하는 부피는

$$\begin{aligned} \int_1^e S(t) dt &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_1^e (\ln t)^2 dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \left[ t(\ln t)^2 \right]_1^e - \int_1^e t \left( 2 \times \frac{1}{t} \times \ln t \right) dt \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \left[ t(\ln t)^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln t dt \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \left[ t(\ln t)^2 \right]_1^e - 2 \left[ t \ln t - t \right]_1^e \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (e-2) \end{aligned}$$

[다른 풀이]

$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$  (단,  $C$ 는 적분상수)이므로

$$\int_1^e S(t) dt = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_1^e (\ln t)^2 dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \left[ \ln t (t \ln t - t) \right]_1^e - \int_1^e (\ln t - 1) dt \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \left[ \ln t (t \ln t - t) \right]_1^e - \left[ t \ln t - 2t \right]_1^e \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} (e-2)
\end{aligned}$$

**[다른 풀이]**

함수  $f(x)=e^x$  의 역함수를  $f^{-1}(x)$  라 하고, 입체도형의 부피를  $V$  라 하면

$$V = \int_1^e \frac{\sqrt{3}}{4} \{f^{-1}(y)\}^2 dy$$

이다.  $y=f(x)$  에서  $f^{-1}(y)=x$  이고  $y=f(x)$  의 양변을  $x$  에 대하여 미분하면  $\frac{dy}{dx}=f'(x)=e^x$  이므로

$$\begin{aligned}
V &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^1 x^2 f'(x) dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^1 x^2 e^x dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \left[ x^2 e^x \right]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \left[ x^2 e^x \right]_0^1 - 2 \left( \left[ x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \left[ x^2 e^x \right]_0^1 - 2 \left( \left[ x e^x \right]_0^1 - \left[ e^x \right]_0^1 \right) \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} (e-2)
\end{aligned}$$

**20. [출제의도] 중복조합에 관한 증명 문제를 해결한다.**

(i)  $k=0$  일 때

둘째 줄에 있는  $n$  개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 3 개를 고르는 경우의 수는 다음과 같다.

검은색으로 칠할 타일 사이에는 검은색으로 칠하지 않을 타일이 각각 1 개 이상씩 있어야 한다.

즉, 검은색으로 칠하지 않을 타일이 있을 수 있는 곳은 많아야 4 곳이므로 타일의 개수를 결정하는 경우의 수는  ${}_4H_{n-5}$  이다.

(ii)  $k=1$  일 때

둘째 줄에 있는  $n$  개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 2 개를 고르는 경우의 수는  ${}_3H_{n-3}$  이다.

첫째 줄에서 검은색으로 칠할 타일 1 개를 고르는 경우의 수는 둘째 줄에서 검은색으로 칠할 타일의 바로 위쪽에 있는 타일을 제외한 나머지  $n-2$  개의 타일 중 1 개의 타일을 고르는 경우의 수와 같으므로  ${}_{n-2}C_1$  이다. 그러므로 검은색으로 칠할 타일 3 개를 고르는 경우의 수는  ${}_3H_{n-3} \times {}_{n-2}C_1$  이다.

(가)에 알맞은 식은  ${}_4H_{n-5}$  이므로  $f(n)={}_4H_{n-5}$

(나)에 알맞은 식은  ${}_{n-2}C_1$  이므로  $g(n)={}_{n-2}C_1$

따라서  $f(10)+g(8)={}_4H_5 \times {}_6C_1=56+6=62$

**21. [출제의도] 정적분의 적분법을 이용하여 정적분의 값을 추론한다.**

ㄱ. (가)의  $F(x)=f(x)-x$  를 (나)의  $F(x)$  에 대입하면

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F(x) dx &= \int_0^1 \{f(x)-x\} dx \\
&= \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x dx \\
&= \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2} \\
&= F(1) - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

이므로  $F(1)=e-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=e-2$  (거짓)

ㄴ. (가)의  $F(x)=f(x)-x$  를  $\int_0^1 xF(x)dx$  의  $F(x)$  에 대입하면

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xF(x)dx &= \int_0^1 x\{f(x)-x\} dx \\
&= \int_0^1 \{xf(x)-x^2\} dx \\
&= \int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 x^2 dx \\
&= \left[ xF(x) \right]_0^1 - \int_0^1 F(x) dx - \frac{1}{3} \\
&= F(1) - \left( e - \frac{5}{2} \right) - \frac{1}{3} \\
&= e-2-e+\frac{5}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \text{ (참)}
\end{aligned}$$

ㄷ.  $F(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$  이고,  $F(x)=\int_0^x f(t)dt$  의 양변을  $x$  에 대하여 미분하면  $F'(x)=f(x)$

(가)에 의해서

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \{F(x)\}^2 dx &= \int_0^1 F(x)\{f(x)-x\} dx \\
&= \int_0^1 F(x)f(x) dx - \int_0^1 xF(x) dx \\
&= \int_0^1 F(x)F'(x) dx - \int_0^1 xF(x) dx \\
&= \left[ \frac{1}{2} \{F(x)\}^2 \right]_0^1 - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{2} \{F(1)\}^2 - \frac{1}{2} \{F(0)\}^2 - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{2} (e-2)^2 - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{2} e^2 - 2e + \frac{11}{6} \text{ (참)}
\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**[다른 풀이]**

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$  의 양변을  $x$  에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

조건 (가)의  $F(x)=f(x)-x$  의 양변을  $x$  에 대하여 두 번 미분하면  $f'(x)=f''(x)$

$\frac{f''(x)}{f'(x)}=1$  이므로 양변을  $x$  에 대하여 적분하면

$\ln|f'(x)|=x+C_1$  (단,  $C_1$  는 적분상수)

$f'(x)=C_2e^x$  (단,  $C_2$  는 상수) 이므로 양변을  $x$  에 대하여 적분하면  $f(x)=C_2e^x+C_3$  (단,  $C_3$  은 적분상수)

$0=F(0)=f(0)-0$ ,  $f(0)=0$

$f(x)=f'(x)-1$  이므로  $f'(0)=1$

$f'(x)=C_2e^x$ ,  $f(x)=C_2e^x+C_3$  에  $x=0$  을 대입하면

$f'(0)=C_2=1$ ,  $f(0)=C_2+C_3=0$ ,  $C_3=-1$

$f(x)=e^x-1$

이를 조건 (가)에 대입하면

$F(x)=e^x-x-1$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F(x) dx &= \int_0^1 (e^x-x-1) dx \\
&= \left[ e^x - \frac{1}{2}x^2 - x \right]_0^1 \\
&= (e-1) - \frac{1}{2} - 1 \\
&= e - \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

이므로 함수  $F(x)=e^x-x-1$  은 조건 (나)를 만족시킨다.

ㄱ.  $F(1)=e^1-1-1=e-2$  (거짓)

ㄴ.  $\int_0^1 xF(x)dx = \int_0^1 x(e^x-x-1)dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 xe^x dx - \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x dx \\
&= \left[ xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx - \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 - \left[ \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\
&= \left[ xe^x \right]_0^1 - \left[ e^x \right]_0^1 - \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 - \left[ \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\
&= e - (e-1) - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ (참)}
\end{aligned}$$

ㄷ.  $\int_0^1 \{F(x)\}^2 dx = \int_0^1 (e^x-x-1)^2 dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \{e^{2x} + x^2 + 1 - 2xe^x + 2x - 2e^x\} dx \\
&= \int_0^1 e^{2x} dx + \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 1 dx \\
&\quad - 2 \int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 2x dx - 2 \int_0^1 e^x dx \\
&= \left[ \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 + \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 + \left[ x \right]_0^1 \\
&\quad - 2 \left[ xe^x \right]_0^1 + 2 \left[ e^x \right]_0^1 + \left[ x^2 \right]_0^1 - 2 \left[ e^x \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(e^2-1) + \frac{1}{3} + 1 - 2 \times 1 + 1 - 2(e-1) \\
&= \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{11}{6} \text{ (참)}
\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**22. [출제의도] 지수를 포함한 부등식의 근을 구하여 그 합을 계산한다.**

$3^{x-4} \leq \frac{1}{9}$  이므로  $3^{x-4} \leq 3^{-2}$

밑이 1 보다 크므로

$x-4 \leq -2$ ,  $x \leq 2$

그러므로 부등식  $3^{x-4} \leq \frac{1}{9}$  을 만족시키는 자연수  $x$

는 1 과 2 뿐이다.

따라서  $1+2=3$

**23. [출제의도] 삼각함수의 극한값을 이해하여 주어진 식의 극한값을 구한다.**

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= 1 - \frac{1}{1+2\sin\theta} \\
&= \frac{1+2\sin\theta-1}{1+2\sin\theta} \\
&= \frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}
\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{10f(\theta)}{\theta} &= 10 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta} \\
&= 10 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\sin\theta}{\theta(1+2\sin\theta)} \\
&= 10 \times 2 = 20
\end{aligned}$$

**24. [출제의도] 역함수의 미분법을 이해하여 주어진 함수의 미분계수를 구한다.**

$g(e)=a$  라 하면,  $f(a)=e$

$f(a)=ae^a+e=e$

그러므로  $a=0$

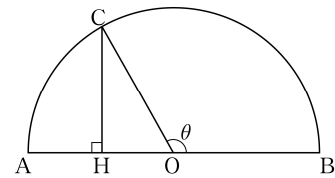
$f'(x)=(x+1)e^x$

$f'(0)=(0+1)e^0=1$

$g'(e)=\frac{1}{f'(g(e))}=\frac{1}{f'(0)}=1$

따라서  $60g'(e)=60 \times 1=60$

**25. [출제의도] 호도법을 이해하여 주어진 도형에서 선분의 길이를 구한다.**



반원의 중심을  $O$  라 하면 반원의 지름의 길이가 12 이므로  $\overline{OB}=6$  이다.

$\angle COB=\theta$  라 하면 호  $BC$  의 길이가  $4\pi$  이므로

$$6 \times \theta = 4\pi, \theta = \frac{2}{3}\pi$$

점  $C$  에서 선분  $AB$  에 내린 수선의 발을  $H$  라 하면

$$\angle COH = \pi - \theta = \frac{\pi}{3}$$

삼각형  $CHO$  는 직각삼각형이고  $\overline{OC}=6$  이므로

$$\overline{CH} = \overline{OC} \times \sin \frac{\pi}{3} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } \overline{CH}^2 = (3\sqrt{3})^2 = 27$$

26. [출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

네 자연수의 합이 6인 경우는 1+1+1+3 또는 1+1+2+2의 두 가지이다.

(i) 1+1+1+3인 경우

$1 \times 1 \times 1 \times 3 = 3$ 이므로 곱이 4의 배수가 아니다.

(ii) 1+1+2+2인 경우

$1 \times 1 \times 2 \times 2 = 4$ 이므로 곱이 4의 배수이다.

(i), (ii)에 의해서 조건을 만족시키는 네 자연수는 1, 1, 2, 2이다.

따라서 가능한 순서쌍  $(a, b, c, d)$ 의 개수는  $\frac{4!}{2!2!} = 6$

27. [출제의도] 지수함수 그래프의 성질을 활용하여 두 점 사이의 거리를 구하는 문제를 해결한다.

곡선  $y=2^x$ 을  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 곡선은  $y=2^{-x}$ 이고 곡선  $y=2^{-x}$ 은 직선  $y=x+1$ 과 점  $(0, 1)$ 에서 만난다.

곡선  $y=2^{-x}$ 을  $x$ 축의 방향으로  $\frac{1}{4}$ 만큼,

$y$ 축의 방향으로  $\frac{1}{4}$ 만큼 평행이동한 곡선  $y=f(x)$ 는

곡선  $y=2^{-x+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}$ 과 일치한다. 직선  $y=x+1$ 은  $x$

축의 방향으로  $\frac{1}{4}$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $\frac{1}{4}$ 만큼 평행 이동하여도 직선  $y=x+1$ 이 된다.

그러므로 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=x+1$ 이 만나는 점 A는  $y=2^{-x}$ 과 직선  $y=x+1$ 이 만나는 점인  $(0, 1)$

이  $x$ 축의 방향으로  $\frac{1}{4}$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $\frac{1}{4}$ 만큼

평행이동한 점  $(\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$ 이다.

따라서  $k = \sqrt{(\frac{1}{4})^2 + (\frac{5}{4}-1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 이므로  $\frac{1}{k^2} = 8$

[다른 풀이]

곡선  $y=2^x$ 을  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 후,  $x$ 축의 방향으로  $\frac{1}{4}$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $\frac{1}{4}$ 만큼 평행이동

한 곡선은  $y=f(x)$ 이므로  $f(x) = 2^{-x+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}$ 이다.

그러므로 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=x+1$ 이 만나는 점의  $x$ 좌표는

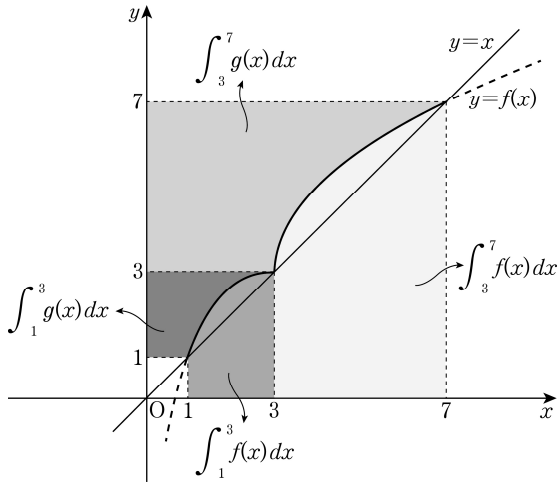
$$x+1 = 2^{-x+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}$$

$$2^{-x+\frac{1}{4}} = x + \frac{3}{4} \text{에서 } x = \frac{1}{4}$$

즉, 점 A의 좌표는  $(\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$ 이다.

따라서  $k = \sqrt{(\frac{1}{4})^2 + (\frac{5}{4}-1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 이므로  $\frac{1}{k^2} = 8$

28. [출제의도] 이계도함수를 활용하여 주어진 정적분 문제를 해결한다.



함수  $f(x)$ 가  $f(1) < f(3)$ 이고 일대일대응이므로 함수  $f(x)$ 는 구간  $[1, 3]$ 에서 증가한다.

$$\text{그러므로 } \int_1^3 f(x) dx = 3 \times 3 - 1 \times 1 - \int_1^3 g(x) dx$$

조건 (다)에 의해서  $\int_1^3 g(x) dx = 3$ 이므로

$$\int_1^3 f(x) dx = 8 - 3 = 5$$

$$\int_3^7 f(x) dx = \int_1^7 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx = 27 - 5 = 22$$

조건 (나)에 의해서 함수  $f(x)$ 의 그래프는 구간  $(3, 7)$ 에서 위로 볼록하다. 조건 (가)에 의해서  $f(3) = 3$ ,  $f(7) = 7$ 이므로 구간  $[3, 7]$ 에서  $f(x) - x \geq 0$ 이다.

$$\begin{aligned} 12 \int_3^7 |f(x) - x| dx &= 12 \int_3^7 \{f(x) - x\} dx \\ &= 12 \left\{ \int_3^7 f(x) dx - \int_3^7 x dx \right\} \\ &= 12 \times (22 - 20) = 24 \end{aligned}$$

29. [출제의도] 경우를 나누어 학생들에게 사물함을 배정하는 실생활 문제를 해결한다.

(i) 2층 또는 3층 중 한 층의 사물함만을 여학생에게 배정하는 경우

여	여

2층의 두 사물함을 두 여학생에게 배정하는 경우의 수는 2!이고 나머지 사물함을 남학생 3명에게 배정하는 경우의 수는  ${}_5P_3$ 이다. 3층의 두 사물함을 두 여학생에게 배정하는 경우의 수는 2!이고 나머지 사물함을 남학생 3명에게 배정하는 경우의 수는  ${}_5P_3$ 이다.

이와 같이 배정하는 경우의 수는

$$2 \times 2! \times {}_5P_3 = 240$$

(ii) 1층의 사물함만을 여학생에게 배정하는 경우

여	여

1층의 사물함만을 여학생에게 배정하는 경우의 수는  ${}_3P_2$ 이고 1층의 사물함을 남학생에게 배정할 수는 없으므로 나머지 사물함을 남학생 3명에게 배정하는 경우의 수는  ${}_4P_3$ 이다.

이와 같이 배정하는 경우의 수는

$${}_3P_2 \times {}_4P_3 = 144$$

(iii) 2층, 3층의 사물함을 각각 1개씩 여학생에게 배정하는 경우

여	
여	

2층, 3층의 사물함을 각각 1개씩 선택하여 여학생에게 배정하는 경우의 수는  ${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times 2!$ 이고 2층과 3층의 사물함을 남학생에게 배정할 수는 없으므로 1층의 사물함을 남학생 3명에게 배정해야 하고 그 경우의 수는 3!이다.

이와 같이 배정하는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times 2! \times 3! = 48$$

(iv) 1층의 사물함을 한 여학생에게 배정하고 2층 또는 3층의 사물함을 다른 여학생에게 배정하는 경우

여	
여	

1층의 가운데에 있는 사물함을 여학생에게 배정하면 3명의 남학생에게 사물함을 배정할 수 없다. 그러므로 1층의 사물함 중 가운데 사물함을 제외한 2개의 사물함 중 한 사물함을 여학생에게 배정한다. 1층의 사물함을 한 여학생에게 배정하고 2층 또는 3층의 사물함을 다른 여학생에게 배정하는 경우의 수는  ${}_2C_1 \times {}_4C_1 \times 2!$ 이고 남학생에게 3개의 사물함을 배정하는 경우의 수는 3!이다.

이와 같이 배정하는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_4C_1 \times 2! \times 3! = 96$$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에 의해서 구하는 경우의 수는  $240 + 144 + 48 + 96 = 528$

30. [출제의도] 뮈의 미분법을 이용하여 두 점선과 한 선분으로 이루어진 도형 문제를 해결한다.

$A(\alpha, -\frac{2}{\alpha})$ ,  $B(\beta, -\frac{2}{\beta})$ 라 하자.

$y = -\frac{2}{x}$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면  $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^2}$

점 A를 지나는 접선의 방정식은  $y = \frac{2}{\alpha^2}(x - \alpha) - \frac{2}{\alpha}$

$$\text{즉, } y = \frac{2}{\alpha^2}x - \frac{4}{\alpha} \dots \textcircled{A}$$

같은 방법으로 점 B를 지나는 접선의 방정식은

$$y = \frac{2}{\beta^2}x - \frac{4}{\beta} \dots \textcircled{B}$$

①, ②이 모두  $P(a, 2a)$ 를 지나므로

$$2a = \frac{2a}{\alpha^2} - \frac{4}{\alpha}, \quad 2a = \frac{2a}{\beta^2} - \frac{4}{\beta}$$

즉,  $a\alpha^2 + 2\alpha - a = 0$ ,  $a\beta^2 + 2\beta - a = 0$ 이므로

$\alpha$ ,  $\beta$ 는 이차방정식  $ax^2 + 2x - a = 0$ 의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해서

$$\alpha + \beta = -\frac{2}{a}, \quad \alpha\beta = -1$$

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$$

$$= (a - \alpha)^2 + \left(2a + \frac{2}{\alpha}\right)^2 + (a - \beta)^2 + \left(2a + \frac{2}{\beta}\right)^2$$

$$= 10a^2 - 2a(\alpha + \beta) + (\alpha^2 + \beta^2) + 8a\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + 4\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)$$

$$= 10a^2 + 4 + \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}$$

$$+ 8a \times \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 4 \times \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= 10a^2 + \frac{20}{a^2} + 30,$$

$$\overline{AB}^2 = (\alpha - \beta)^2 + \left(-\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= 5(\alpha - \beta)^2 \\
&= 5\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\} \\
&= 5\left(\frac{4}{a^2} + 4\right) \\
&= \frac{20}{a^2} + 20
\end{aligned}$$

그러므로  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{AB}^2 = 10a^2 + \frac{40}{a^2} + 50$

$a^2 = t (t > 0)$  으로 놓고  $f(t) = 10t + \frac{40}{t} + 50$  이라 하면

$$f'(t) = 10 - \frac{40}{t^2} = \frac{10(t^2 - 4)}{t^2}$$

함수  $f(t)$  의 증가와 감소를 나타낸 표는 다음과 같다.

$t$	(0)	...	2	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		↘	90	↗

함수  $f(t)$  는  $t = 2$  에서 최솟값 90 을 갖는다.

$a^2 = 2$  이므로  $a = \sqrt{2}$  에서 점 P 의 좌표는  $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$  이다.

따라서  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{AB}^2$  의 최솟값은 90 이다.

**[다른 풀이]**

절대부등식을 이용하면

$$\begin{aligned}
\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{AB}^2 &= 10a^2 + \frac{40}{a^2} + 50 \\
&\geq 2\sqrt{10a^2 \times \frac{40}{a^2}} + 50 \\
&= 2 \times 20 + 50 \\
&= 90
\end{aligned}$$

(단, 등호는  $10a^2 = \frac{40}{a^2}$  즉,  $a = \sqrt{2}$  일 때 성립한다.)