2017학년도 3월 고1 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	①	2	②	3	②	4	④	5	③
6	③	7	⑤	8	①	9	⑤	10	③
11	④	12	①	13	②	14	②	15	④
16	⑤	17	④	18	①	19	④	20	③
21	⑤	22	12	23	11	24	7	25	20
26	15	27	110	28	55	29	60	30	21

해 설

1. [출제의도] 제곱근의 성질을 이해하고 식의 값을 계산한다.

$(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=(\sqrt{5})^2-2^2=5-4=1$

2. [출제의도] 일차방정식의 해를 구한다.

$7x+3=5x+1$ 에서
$7x-5x=1-3$
$2x=-2$
따라서 $x=-1$

3. [출제의도] 함수의 뜻을 이해하고 상수의 값을 구한다.

함수 $y=\dfrac{6}{x}$ 의 그래프가 점 $(3, a)$를 지나므로
$x=3,\ y=a$를 대입하면
$a=\dfrac{6}{3}=2$

4. [출제의도] 인수분해 공식을 이용하여 상수의 값을 구한다.

x^2+6x+8을 인수분해하면
$x^2+6x+8=(x+2)(x+4)=(x+2)(x+a)$
따라서 $a=4$

5. [출제의도] 곱셈 공식을 알고 이를 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ 에서
$x+y=6,\ x^2+y^2=22$를 대입하면
$2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)$
$=6^2-22$
$=14$
따라서 $xy=7$

6. [출제의도] 지수의 성질을 이해하고 주어진 식의 값을 구한다.

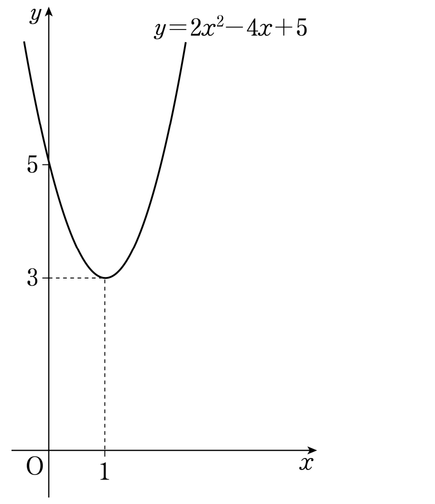
$(7^3\times 9)^3=(7^3\times 3^2)^3$
$=7^{3\times 3}\times 3^{2\times 3}$
$=7^9\times 3^6$
$7^9\times 3^6=7^a\times 3^b$이고 $a,\ b$는 자연수이므로
$a=9,\ b=6$
따라서 $a+b=9+6=15$

7. [출제의도] 일차함수의 그래프의 평행이동을 이해하고 조건을 만족시키는 값을 구한다.

일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 일차함수 $y=2x$의 그래프와 평행하므로 두 직선의 기울기는 서로 같다.
따라서 $a=2$
일차함수 $y=2x+b$의 그래프의 x절편이 3이므로
$x=3,\ y=0$을 대입하면
$0=2\times 3+b,\ b=-6$
따라서 $a+b=2+(-6)=-4$

8. [출제의도] 이차함수의 그래프의 성질을 이해하고 이차함수의 최솟값을 구한다.

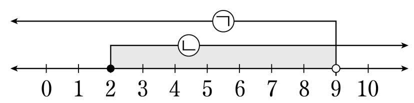
주어진 식을 변형하면
$y=2x^2-4x+5$
$=2(x^2-2x)+5$
$=2(x^2-2x+1-1)+5$
$=2(x^2-2x+1)-2+5$
$=2(x-1)^2+3$
이므로 이차함수 $y=2x^2-4x+5$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 이차함수 $y=2x^2-4x+5$의 최솟값은 $x=1$일 때 3이다.

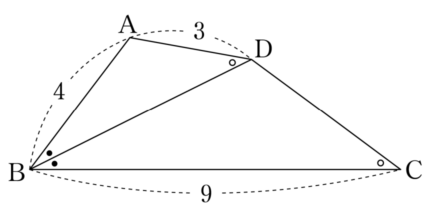
9. [출제의도] 연립부등식의 정수인 해의 개수를 구한다.

주어진 연립부등식
$\begin{cases} 2x<x+9 \\ x+5\le 5x-3 \end{cases}$
에서 부등식 $2x<x+9$를 풀면
$2x-x<9$
$x<9$ …… ㉠
마찬가지로 부등식 $x+5\le 5x-3$을 풀면
$x-5x\le -3-5$
$-4x\le -8$
$x\ge 2$ …… ㉡
두 부등식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위를 수직선에 나타내면 다음과 같다.



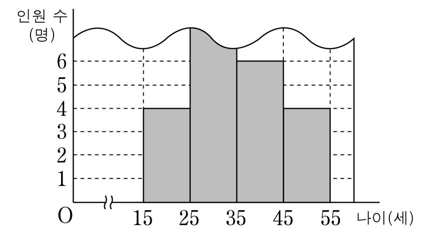
위 그림에서 구하는 x의 값의 범위는
$2\le x<9$
이 부등식을 만족시키는 정수 x는
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이다.
따라서 구하는 정수의 개수는 7이다.

10. [출제의도] 삼각형의 닮음을 이용하여 선분의 길이를 구한다.



두 삼각형 ABD, DBC에 대하여
대각선 BD가 ∠B의 이등분선이므로
$\angle ABD=\angle DBC$ …… ㉠
주어진 조건에서
$\angle BDA=\angle BCD$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의해 $\triangle ABD \backsim \triangle DBC$
$\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{DB}:\overline{CB}$에서
$\overline{DB}^2=\overline{AB}\times\overline{CB}$
$=4\times 9$
$=36$
따라서 $\overline{DB}=6$
$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{DB}:\overline{DC}$에서
$\overline{AB}\times\overline{DC}=\overline{AD}\times\overline{DB}$
$4\times\overline{DC}=3\times 6$
따라서 $\overline{DC}=\dfrac{18}{4}=\dfrac{9}{2}$

11. [출제의도] 히스토그램을 이해하여 자료의 평균을 구한다.



25세 이상 35세 미만인 계급의 도수를 a라 하고 위 히스토그램을 이용하여 도수분포표를 만들면 다음과 같다.

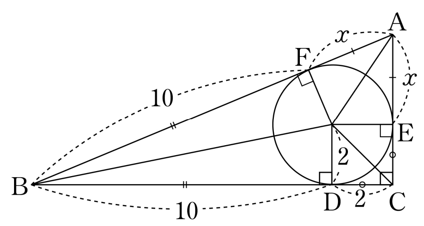
나이(세)	도수(명)
$15^{이상}\sim 25^{미만}$	4
$25^{이상}\sim 35^{미만}$	a
$35^{이상}\sim 45^{미만}$	6
$45^{이상}\sim 55^{미만}$	4
합계	25

도수의 합계가 25이므로
$4+a+6+4=25$에서 $a=11$
도수분포표에서 15세 이상 25세 미만인 계급의 계급값은 20(세)이므로
(계급값)×(도수)$=20\times 4=80$
다른 계급에 대해서도 마찬가지 방법으로 계산하여 표로 나타내면 다음과 같다.

나이(세)	계급값(세)	도수(명)	(계급값)×(도수)
$15^{이상}\sim 25^{미만}$	20	4	$20\times 4=80$
$25^{이상}\sim 35^{미만}$	30	11	$30\times 11=330$
$35^{이상}\sim 45^{미만}$	40	6	$40\times 6=240$
$45^{이상}\sim 55^{미만}$	50	4	$50\times 4=200$
합계		25	850

위의 표를 이용하여 평균을 구하면
$(\text{평균})=\dfrac{\{(\text{계급값})\times(\text{도수})\}\text{의 총합}}{(\text{도수})\text{의 총합}}$
$=\dfrac{80+330+240+200}{25}$
$=\dfrac{850}{25}=34$(세)

12. [출제의도] 삼각형의 내심과 외심의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.



위의 그림과 같이 내접원의 중심에서 삼각형 ABC의 세 변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자.
$\overline{AE}=x$라 놓으면 내접원의 성질에 의해
$\overline{CD}=\overline{CE}=2$
$\overline{BD}=\overline{BF}=10$
$\overline{AF}=\overline{AE}=x$
삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 2이므로
이것을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하면

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2 \times (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA})$

$= \frac{1}{2} \times 2 \times \{(x+10)+12+(2+x)\}$

$= 2x+24$ …… ㉠

다른 방법으로 넓이를 구하면

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AC}$

$= \frac{1}{2} \times 12 \times (x+2)$

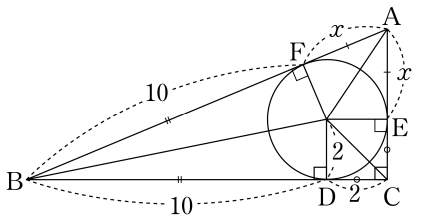
$= 6x+12$ …… ㉡

㉠, ㉡이 서로 같으므로

$2x+24=6x+12$에서 $x=3$

따라서 직각삼각형 ABC의 빗변 AB의 길이는 13이다. 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이므로 빗변 AB는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이다. 그러므로 직각삼각형 ABC의 외접원의 둘레의 길이는 13π이다.

[다른 풀이]



위의 그림과 같이 내접원의 중심에서 삼각형 ABC의 세 변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자.

$\overline{AE}=x$라 놓으면 내접원의 성질에 의해

$\overline{CD}=\overline{CE}=2$, $\overline{BD}=\overline{BF}=10$, $\overline{AF}=\overline{AE}=x$

삼각형 ABC는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$

$(x+10)^2=12^2+(2+x)^2$

$x^2+20x+100=144+4+4x+x^2$

$16x=48$에서 $x=3$

따라서 직각삼각형 ABC의 빗변 AB의 길이는 13이다. 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이므로 빗변 AB는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이다. 그러므로 직각삼각형 ABC의 외접원의 둘레의 길이는 13π이다.

13. [출제의도] 주어진 상황을 이해하여 확률을 구한다.

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$이다. 나오는 눈의 수를 각각 a, b라 하고 이것을 순서쌍 (a, b)으로 나타내면 다음 표와 같다.

b \ a	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

이 중에서 두 눈의 수의 합이 8보다 큰 경우는 다음과 같다.

i) 두 눈의 수의 합이 9인 경우

(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)

ii) 두 눈의 수의 합이 10인 경우

(4, 6), (5, 5), (6, 4)

iii) 두 눈의 수의 합이 11인 경우

(5, 6), (6, 5)

iv) 두 눈의 수의 합이 12인 경우

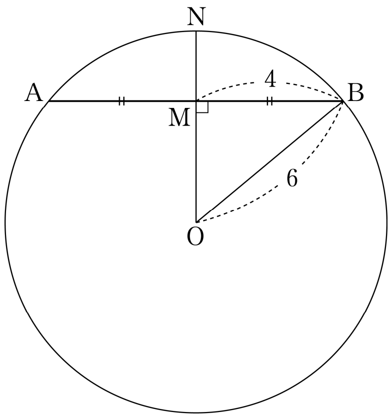
(6, 6)

이상에서 구하는 경우의 수는 10이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$이다.

14. [출제의도] 원의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

호 AB를 포함한 원을 그리면 아래와 같다. 원의 중심을 O라 하면 반지름 ON은 현 AB를 수직이등분하므로 삼각형 OBM은 $\angle BMO = 90°$인 직각삼각형이다.



직각삼각형 OBM에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{OB}^2=\overline{OM}^2+\overline{MB}^2$이므로

$6^2=\overline{OM}^2+4^2$

$\overline{OM}^2=36-16$

$=20$

$\overline{OM}>0$이므로 $\overline{OM}=2\sqrt{5}$

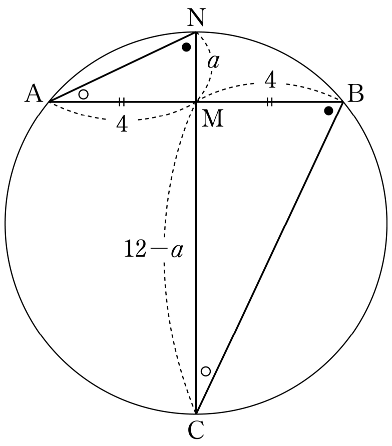
$\overline{MN}=\overline{ON}-\overline{OM}$

$=6-2\sqrt{5}$ (m)

따라서 $a=6-2\sqrt{5}$

[다른 풀이]

호 AB를 포함한 원을 그리면 아래와 같다.



선분 MN의 연장선과 이 원의 교점을 C라 하면 원주각의 성질에 의해

$\angle CNA = \angle CBA$, $\angle NAB = \angle NCB$이므로

$\triangle AMN \backsim \triangle CMB$

따라서 $\overline{AM}:\overline{MN}=\overline{CM}:\overline{MB}$

$\overline{MN} \times \overline{CM} = \overline{AM} \times \overline{MB}$

$a(12-a)=4 \times 4$

$12a-a^2=16$

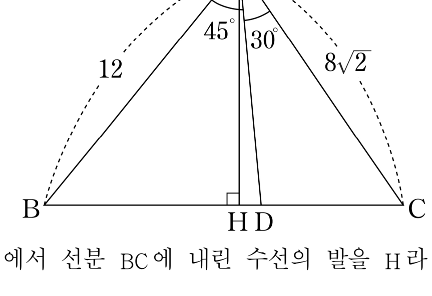
$a^2-12a+16=0$

$a=6 \pm 2\sqrt{5}$

$a<6$이므로 $a=6-2\sqrt{5}$

15. [출제의도] 삼각비를 알고 삼각형의 넓이를 이용하여 선분의 길이의 비를 구한다.

높이가 같은 두 삼각형에서 밑변의 길이의 비는 넓이의 비와 같다.



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\triangle ABD = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{AH}$

$\triangle ADC = \frac{1}{2} \times \overline{DC} \times \overline{AH}$이므로

$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\triangle ABD}{\triangle ADC}$ …… ㉠

$\triangle ABD = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \sin 45°$

$= \frac{1}{2} \times 12 \times \overline{AD} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 3\sqrt{2} \times \overline{AD}$

$\triangle ADC = \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{AC} \times \sin 30°$

$= \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times 8\sqrt{2} \times \frac{1}{2}$

$= 2\sqrt{2} \times \overline{AD}$

따라서 ㉠에 의해

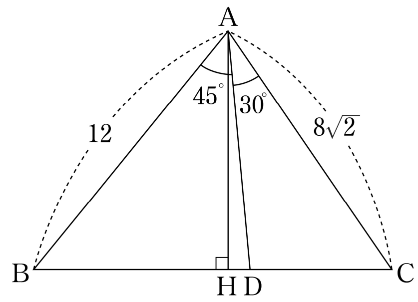
$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\triangle ABD}{\triangle ADC}$

$= \frac{3\sqrt{2} \times \overline{AD}}{2\sqrt{2} \times \overline{AD}}$

$= \frac{3}{2}$

[다른 풀이]

높이가 같은 두 삼각형에서 밑변의 길이의 비는 넓이의 비와 같다.



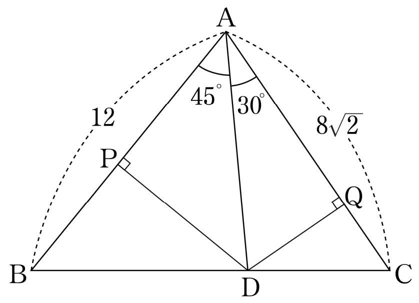
점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\triangle ABD = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{AH}$

$\triangle ADC = \frac{1}{2} \times \overline{DC} \times \overline{AH}$이므로

$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\triangle ABD}{\triangle ADC}$ …… ㉠

점 D에서 두 변 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하자.



$\overline{DQ}=a$라 하면 직각삼각형 ADQ에서

$\sin 30° = \frac{\overline{DQ}}{\overline{AD}} = \frac{a}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$이므로

$\overline{AD}=2a$

직각삼각형 ADP에서

$\sin 45° = \frac{\overline{DP}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DP}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\overline{DP}=\sqrt{2}a$

$\triangle ABD = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{DP}$

$= \frac{1}{2} \times 12 \times \sqrt{2}a$

$= 6\sqrt{2}a$

$\triangle ADC = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{DQ}$

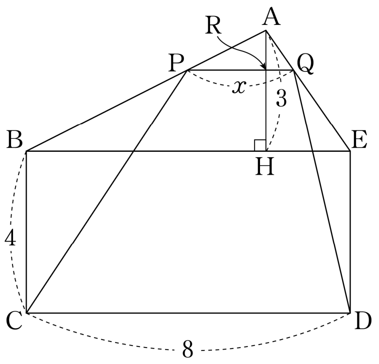
$= \frac{1}{2} \times 8\sqrt{2} \times a$

$= 4\sqrt{2}a$

따라서 ㉠에 의해

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\triangle ABD}{\triangle ADC} = \frac{6\sqrt{2}a}{4\sqrt{2}a} = \frac{3}{2}$$

16. [출제의도] 삼각형의 닮음과 이차방정식을 이용하여 선분의 길이를 구한다.



$\overline{PQ} /\!/ \overline{BE}$ 이므로 $\triangle APQ \backsim \triangle ABE$

두 선분 AH, PQ가 만나는 점을 R, $\overline{PQ} = x$라 하면

$\overline{AR} : \overline{PQ} = \overline{AH} : \overline{BE}$

$\overline{AR} : x = 3 : 8$

$\overline{AR} = \frac{3}{8}x$

따라서 사다리꼴 PCDQ의 높이는

$\left(3 - \frac{3}{8}x\right) + 4 = 7 - \frac{3}{8}x$

사다리꼴 PCDQ의 넓이는 직사각형 BCDE의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}(x+8)\left(7 - \frac{3}{8}x\right) = 32$

$(x+8)(56-3x) = 512$

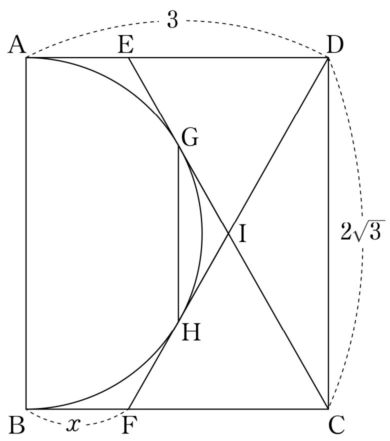
$-3x^2 + 32x + 448 - 512 = 0$

$3x^2 - 32x + 64 = 0$

$(x-8)(3x-8) = 0$

$x < 8$이므로 $x = \frac{8}{3}$

17. [출제의도] 원의 접선의 성질과 삼각형의 닮음을 이용하여 선분의 길이를 구한다.



$\overline{BF} = x$라 하자. 두 점 B, H가 점 F에서 원에 그은 두 접선의 접점과 같으므로 $\overline{BF} = \overline{FH}$

두 점 A, H가 점 D에서 원에 그은 두 접선의 접점과 같으므로 $\overline{AD} = \overline{DH} = 3$

직각삼각형 DFC에서

$\overline{DF} = x + 3$

$\overline{FC} = 3 - x$

$\overline{DC} = 2\sqrt{3}$

이므로 피타고라스 정리에 의해

$\overline{DF}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{DC}^2$

$(x+3)^2 = (3-x)^2 + (2\sqrt{3})^2$

$x^2 + 6x + 9 = 9 - 6x + x^2 + 12$

$12x = 12$

$x = 1$

따라서 $\overline{BF} = \overline{FH} = 1$

같은 방법으로 나머지 변의 길이를 구하면

$\overline{AE} = \overline{EG} = 1$

$\overline{ED} = \overline{FC} = 2$

그러므로 사각형 EFCD는 직사각형이다. 직사각형 EFCD의 대각선의 교점을 I라 하면 직사각형의 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로

$\overline{DF} = \overline{EC} = 4$에서 $\overline{EI} = \overline{FI} = 2$

$\overline{EG} = \overline{FH} = 1$에서

$\overline{IG} = \overline{IH} = 1$

두 삼각형 IGH, IEF에서

$\angle$HIG는 공통인 각 …… ㉠

$\overline{IG} : \overline{IE} = 1 : 2$이고 $\overline{IH} : \overline{IF} = 1 : 2$ …… ㉡

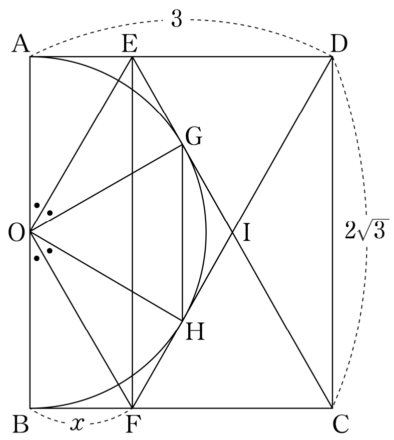
㉠, ㉡에서 두 삼각형 IGH, IEF는 닮음비가 1 : 2인 도형이다.

$\overline{EF} = 2\sqrt{3}$ 이고 $\overline{GH} : \overline{EF} = 1 : 2$이므로

$2\overline{GH} = 2\sqrt{3}$

$\overline{GH} = \sqrt{3}$

[다른 풀이]



$\overline{BF} = x$라 하자. 두 점 B, H가 점 F에서 원에 그은 두 접선의 접점과 같으므로

$\overline{BF} = \overline{FH}$

두 점 A, H가 점 D에서 원에 그은 두 접선의 접점과 같으므로

$\overline{AD} = \overline{DH} = 3$

직각삼각형 DFC에서

$\overline{DF} = x + 3$

$\overline{FC} = 3 - x$

$\overline{CD} = 2\sqrt{3}$

이므로 피타고라스 정리에 의해

$\overline{DF}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{CD}^2$

$(x+3)^2 = (3-x)^2 + (2\sqrt{3})^2$

$x^2 + 6x + 9 = 9 - 6x + x^2 + 12$

$12x = 12$, $x = 1$

따라서 $\overline{BF} = \overline{FH} = 1$

선분 AB를 지름으로 하는 반원의 중심을 O라 하면

$\overline{OB} = \overline{OH} = \sqrt{3}$, $\angle OBF = \angle OHF = 90°$이므로

$\tan(\angle BOF) = \frac{\overline{BF}}{\overline{OB}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$에서 $\angle BOF = 30°$

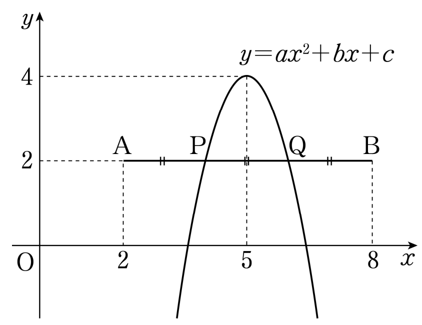
같은 방법으로 나머지 각을 구하면

$\angle HOF = \angle EOG = \angle AOE = 30°$

그러므로 $\angle GOH = 60°$이고 $\overline{OG} = \overline{OH}$이므로 삼각형 GOH는 정삼각형이다.

따라서 $\overline{GH} = \sqrt{3}$

18. [출제의도] 이차함수의 그래프의 성질을 이용하여 식의 값을 구한다.



선분 AB는 x축과 평행하고 $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB} = 2$이므로 두 점 P, Q의 좌표는

P(4, 2), Q(6, 2)

이차함수 $y = ax^2 + bx + c$의 그래프는 축에 대해서 대칭이므로 꼭짓점의 x좌표는 5이다. 조건에서 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 y좌표는 4이므로

$y = a(x-5)^2 + 4$

이차함수 $y = a(x-5)^2 + 4$의 그래프가 점 P(4, 2)를 지나므로

$2 = a(4-5)^2 + 4 = a + 4$, $a = -2$

따라서

$y = -2(x-5)^2 + 4$

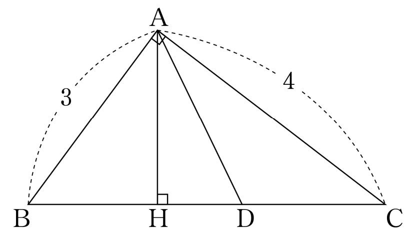
$= -2(x^2 - 10x + 25) + 4$

$= -2x^2 + 20x - 46$

이므로 $a = -2$, $b = 20$, $c = -46$

따라서 $a + b + c = -28$

19. [출제의도] 삼각비와 피타고라스 정리를 이용하여 삼각형에서 성립하는 내용을 추측한다.



직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$이므로

$\overline{BC}^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, $\overline{BC} = 5$

ㄱ. 삼각형 ABC에서

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH}$

$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times \overline{AH}$

$\overline{AH} = \frac{12}{5}$ (참)

ㄴ. $\tan(\angle ADH) = \frac{\overline{AH}}{\overline{DH}} = 2$이므로

$\overline{DH} = \frac{1}{2} \times \overline{AH}$

ㄱ에서 $\overline{AH} = \frac{12}{5}$이므로

$\overline{DH} = \frac{1}{2} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times \frac{12}{5} = \frac{6}{5}$

직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{AB}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2$이므로

$\overline{BH}^2 = 9 - \frac{144}{25} = \frac{81}{25} = \left(\frac{9}{5}\right)^2$

$\overline{BH} = \frac{9}{5}$

따라서 $\overline{BD} = \overline{BH} + \overline{DH} = \frac{9}{5} + \frac{6}{5} = 3$ (거짓)

ㄷ. $\overline{AB} = \overline{BD} = 3$에서 삼각형 ABD는 이등변삼각형이므로 $\angle BAD = \angle ADH$

따라서 $\tan(\angle BAD) = \tan(\angle ADH) = 2$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄴ. $\tan(\angle ADH) = \frac{\overline{AH}}{\overline{DH}} = 2$이므로

$\overline{DH} = \frac{1}{2} \times \overline{AH}$

ㄱ에서 $\overline{AH}=\frac{12}{5}$ 이므로

$\overline{DH}=\frac{1}{2}\times\overline{AH}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}$

$=\frac{6}{5}$

두 삼각형 ABH, CBA에서

$\angle ABH$는 공통인 각,

$\angle AHB=\angle CAB=90°$

따라서 $\triangle ABH \backsim \triangle CBA$ 이므로

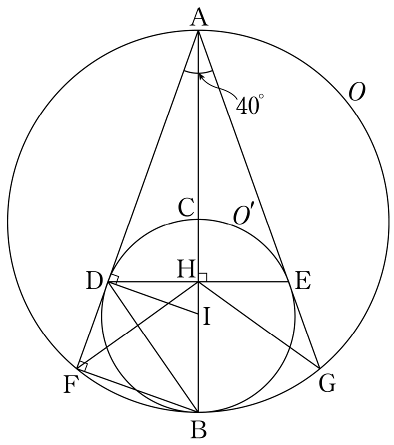
$\overline{AB}:\overline{BH}=\overline{CB}:\overline{BA}$

$3:\overline{BH}=5:3$

$5\times\overline{BH}=9$, $\overline{BH}=\frac{9}{5}$

$\overline{BD}=\overline{BH}+\overline{DH}=\frac{9}{5}+\frac{6}{5}=3$ (거짓)

20. [출제의도] 원의 성질과 삼각형의 닮음을 이용하여 각의 크기를 구하는 과정을 추론한다.



먼저 두 삼각형 DFB, DHB가 합동임을 보이자.

점 A에서 원 O'에 그은 두 접선에 대해 $\overline{AD}=\overline{AE}$

점 I는 원 O'의 중심이므로 $\overline{DI}=\overline{EI}$

선분 AI는 공통인 변이므로

$\triangle ADI\equiv\triangle AEI$ (SSS 합동)

따라서 $\angle IAD=\angle IAE$ 이고 선분 AH는 공통인 변

$\triangle ADH\equiv\triangle AEH$ (SAS 합동)

따라서 $\angle DHA=90°$ 이므로

$\angle DFB=\angle DHB=90°$ …… ㉠

선분 DB는 공통인 변 …… ㉡

삼각형 IDB는 이등변삼각형이므로

$\angle IDB=\angle IBD$

삼각형의 외각의 성질에 의해

$\angle IDB+\angle IBD=\angle DIH$

따라서 $\angle DIH=\boxed{2}\times\angle DBH$ 이고

원의 접선의 성질에 의해

$\angle ADI=90°$

선분 AB가 지름이므로

$\angle AFB=90°$

따라서 $\overline{DI}\,/\!/\,\overline{FB}$ 에서 $\angle IDB=\angle DBF$ (엇각)

$\angle DBF=\angle DBH$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의해 $\triangle DFB\equiv\triangle DHB$ 이다.

한편, $\overline{AD}=\overline{AE}$ 이므로 $\angle ADH=\angle AEH$

$\triangle ADE$ 에서 삼각형의 내각의 합은 $180°$ 이므로

$\angle DAE+\angle ADH+\angle AEH=180°$

$40°+2\angle ADH=180°$

$2\angle ADH=140°$

따라서 $\angle ADH=\boxed{70}°$

위에서 $\triangle DFB\equiv\triangle DHB$ 이므로 $\overline{DF}=\overline{DH}$ 에서 삼각형 DFH는 이등변삼각형이다. 두 밑각의 크기는 같으므로

$\angle DFH=\angle DHF$ 에서

$\angle DFH+\angle DHF=\angle ADH=70°$

$2\angle DHF=70°$

$\angle DHF=\frac{1}{2}\times\boxed{70}°=35°$

$\angle DHB=90°$ 이고

$\angle DHB=\angle DHF+\angle FHB$ 에서

$90°=35°+\angle FHB$

$\angle FHB=55°$

같은 방법으로 $\angle GHB$를 구하면

$\angle GHB=55°$

$\angle FHG=\angle FHB+\angle GHB$

$=55°+55°$

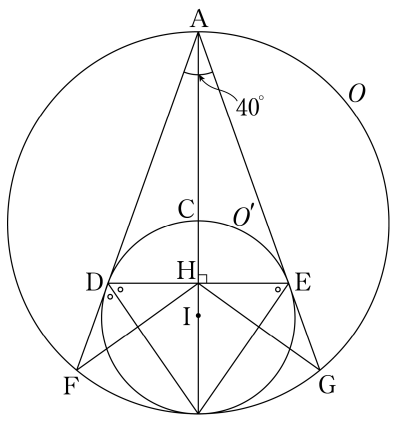
$=110°$

따라서 $\angle FHG=\boxed{110}°$ 이다.

그러므로 $a=2$, $b=70$, $c=110$ 에서

$\frac{ac}{b}=\frac{2\times110}{70}=\frac{22}{7}$

[다른 풀이]



$\overline{ID}=\overline{IB}$ 에서 삼각형 IDB는 이등변삼각형이므로

$\angle IDB=\angle IBD$

$\angle IDB+\angle IBD=\angle DIH$

따라서 $\angle DIH=\boxed{2}\times\angle DBH$

두 삼각형 DFB, DHB가 합동임을 보이자.

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 현과 그 각의 안에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같으므로

$\angle BDF=\angle BED$

삼각형 BED는 이등변삼각형이므로

$\angle BDE=\angle BED$

그러므로 $\angle BDF=\angle BDH$

선분 BD는 공통인 변, $\angle DFB=\angle DHB=90°$ 이므로

$\triangle DFB\equiv\triangle DHB$

따라서 $\overline{DF}=\overline{DH}$ 이므로 삼각형 DFH는 이등변삼각형이다.

$\angle DFH=\angle DHF$ 이고

$\angle DFH+\angle DHF=\angle ADH=\boxed{70}°$

$2\angle DHF=70°$ 이므로

$\angle DHF=\frac{1}{2}\times\boxed{70}°=35°$

$\angle DHB=90°$ 이고

$\angle DHB=\angle DHF+\angle FHB$ 이므로

$90°=35°+\angle FHB$, $\angle FHB=55°$

같은 방법으로 구하면 $\angle GHB=55°$

$\angle FHG=\angle FHB+\angle GHB$

$=55°+55°=110°$

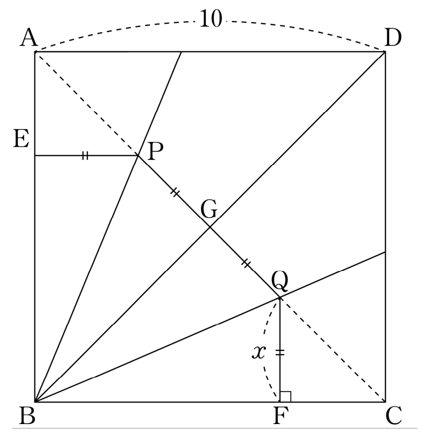
따라서 $\angle FHG=\boxed{110}°$ 이다.

그러므로 $a=2$, $b=70$, $c=110$ 에서

$\frac{ac}{b}=\frac{2\times110}{70}=\frac{22}{7}$

21. [출제의도] 피타고라스 정리를 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

그림은 접은 종이를 다시 펼쳐 접힌 부분을 실선으로 나타낸 것이다.



종이가 접혀진 모양에서

$\triangle BPE\equiv\triangle BPG$

$\triangle BQG\equiv\triangle BQF$

두 점 B, D에 일치하도록 접어서 만들어진 선이 선분 PQ이므로 선분 PQ는 대각선 AC의 일부이고, 정사각형의 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.

두 삼각형 BPG, BQG에서

선분 BG는 공통인 변이고 $\angle PGB=\angle QGB=90°$,

$\angle PBG=\angle QBG=22.5°$ 이므로

$\triangle BPG\equiv\triangle BQG$ (ASA 합동)

따라서 $\triangle BPE\equiv\triangle BPG\equiv\triangle BQG\equiv\triangle BQF$

$\overline{EP}=\overline{PG}=\overline{GQ}=\overline{QF}=x$ 라 하자.

점 Q는 대각선 AC 위의 점이므로

$\angle QCF=45°$

따라서 삼각형 QFC가 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AP}=\overline{CQ}=\sqrt{2}\times\overline{QF}=\sqrt{2}x$

선분 AC는 정사각형 ABCD의 대각선이므로

$\overline{AC}=10\sqrt{2}$

$\overline{AC}=\overline{AP}+\overline{PG}+\overline{GQ}+\overline{QC}$

$10\sqrt{2}=\sqrt{2}x+x+x+\sqrt{2}x$

$(\sqrt{2}+1)x=5\sqrt{2}$

$x=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

$=5\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$

$=10-5\sqrt{2}$

$\overline{PQ}=2x=20-10\sqrt{2}$

따라서 $a=20$, $b=-10$ 에서 $a+b=10$

22. [출제의도] 두 수의 최대공약수를 구한다.

두 수 $2^2\times3^3$, $2^3\times3\times5^4$ 의 최대공약수는 두 수의 공통인 소인수 2^2 과 3을 곱한 수 $2^2\times3$ 이므로 최대공약수는 12이다.

23. [출제의도] 이차함수의 그래프의 성질을 이해하여 상수의 값을 구한다.

이차함수 $y=(x-4)^2+k$ 의 그래프는 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 이차함수 $y=(x-4)^2+k$ 의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(4, k)$ 이다.

이때 꼭짓점 $(4, k)$ 는 일차함수 $y=3x-1$ 의 그래프 위에 있으므로 $x=4$, $y=k$ 를 대입하면

$k=3\times4-1=11$

24. [출제의도] 제곱근과 부등식의 성질을 이해하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구한다.

부등식 $2<\sqrt{3x}<\sqrt{26}$ 에서

$\sqrt{4}<\sqrt{3x}<\sqrt{26}$ 이므로 제곱근의 대소 관계에 의해

$4<3x<26$

이 부등식의 양변을 3으로 나누면

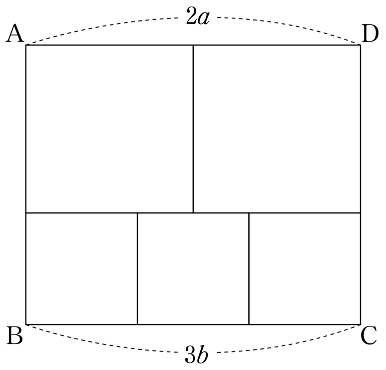
$\frac{4}{3}<x<\frac{26}{3}$

이 부등식을 만족시키는 자연수 x는

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이다.

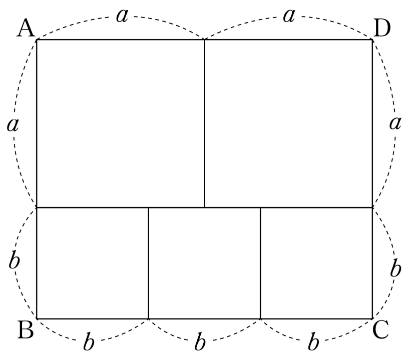
따라서 구하는 자연수 x의 개수는 7이다.

25. [출제의도] 주어진 상황에 맞는 연립방정식을 세워 식의 값을 구한다.



직사각형 ABCD에서 한 변의 길이가 a인 정사각형 2개를 연결하여 만든 변 AD의 길이와 한 변의 길이가 b인 정사각형 3개를 연결하여 만든 변 BC의 길이가 같다.

따라서 $2a=3b$ …… ㉠



또 직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 88이다.

따라서 $4a+5b=88$ …… ㉡

㉠에서 $4a=6b$를 ㉡에 대입하면

$6b+5b=88$

$11b=88$

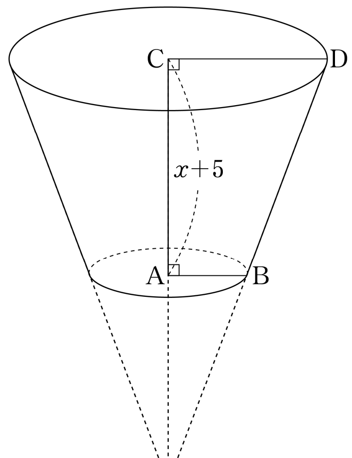
$b=8$

$b=8$을 ㉠에 대입하면

$a=12$

따라서 $a+b=12+8=20$

26. [출제의도] 삼각형의 닮음과 이차방정식을 이용하여 원뿔대의 높이를 구한다.



주어진 원뿔대의 두 밑면의 넓이가 각각 $4x$, x이므로 넓이의 비는 $4:1$이다. 그러므로

$\overline{CD}^2:\overline{AB}^2=4:1$에서

$\overline{CD}:\overline{AB}=2:1$

$\overline{CD}:\overline{AB}=\overline{PC}:\overline{PA}$이므로

$\overline{PC}:\overline{PA}=2:1$

따라서 $\overline{PA}=\overline{AC}=x+5$

(원뿔의 부피)$=\frac{1}{3}\times$(밑면의 넓이)$\times$(높이)이고 원뿔대의 부피는 원뿔의 부피에서 원뿔을 밑면에 평행한 평면으로 잘라서 생기는 두 입체도형 중에서 원뿔의 부피를 빼면 되므로

$\frac{1}{3}\times4x\times(2x+10)-\frac{1}{3}\times x\times(x+5)=700$

$\frac{4}{3}x(2x+10)-\frac{1}{3}x(x+5)=700$

양변에 3을 곱하면

$4x(2x+10)-x(x+5)=2100$

$8x^2+40x-x^2-5x=2100$

$7x^2+35x-2100=0$

$x^2+5x-300=0$

$(x+20)(x-15)=0$

$x=-20$ 또는 $x=15$

$x>0$이므로 $x=15$

27. [출제의도] 연립방정식을 이용하여 조건을 만족시키는 자료를 완성하고 그 분산을 구한다.

받은 점수(점)	학생 수(명)
2	1
4	a
6	b
8	1
합계	6

모두 6명의 학생이 15번의 시합에서 받은 점수의 총합은 $15\times2=30$이므로

$(평균)=\frac{(받은 점수)의 총합}{(도수)의 총합}$

$=\frac{30}{6}=5$(점)

학생 수는 모두 6명이므로

$1+a+b+1=6$

$a+b=4$ …… ㉠

학생들이 받은 점수를 모두 더하면

$(2\times1)+(4\times a)+(6\times b)+(8\times1)=30$

$2a+3b=10$ …… ㉡

㉠에서 $b=4-a$를 ㉡에 대입하면

$2a+3(4-a)=10$

$a=2$, $b=2$

받은 점수에 대한 편차와 편차의 제곱을 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

받은 점수(점)	도수(명)	편차	(편차)$^2\times$(도수)
2	1	-3	$(-3)^2\times1=9$
4	2	-1	$(-1)^2\times2=2$
6	2	1	$1^2\times2=2$
8	1	3	$3^2\times1=9$
합계	6	0	22

분산 V는

$V=\frac{\{(편차)^2\times(도수)\}의 총합}{(도수)의 총합}$

$=\frac{9+2+2+9}{6}$

$=\frac{11}{3}$

따라서 $30V=110$

28. [출제의도] 제곱근의 값을 추측하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구한다.

a와 b는 두 자리 자연수이므로

$10\le a\le99$, $10\le b\le99$가 되어

$20\le a+b\le198$

조건 (가)에서 $a+b$는 24의 배수이므로

$a+b=24k$(k는 자연수)라 하면

$\sqrt{a+b}=\sqrt{24k}=\sqrt{2^3\times3\times k}$

이 값이 자연수가 되려면 근호 안의 수 $2^3\times3\times k$가 어떤 자연수의 제곱이 되어야 한다. 2^3과 3은 지수가 홀수이므로 $k=6n^2$(n은 자연수)이다.

i) $n=1$일 때

$a+b=24\times6=144$이고 a, b는 두 자리의 자연수이므로

$a=99$일 때, $b=45$

$a=98$일 때, $b=46$

…

$a=45$일 때, $b=99$

ii) $n=2$일 때

$a+b=24\times24=576$이므로 가능한 a, b의 값은 없다.

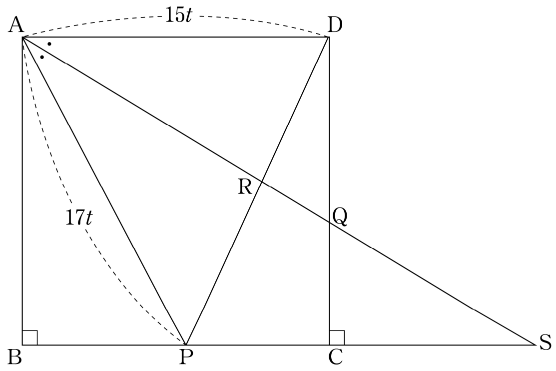
마찬가지 방법으로 $n\ge3$일 때 가능한 a, b의 값은 없다. 따라서 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b)는

$(99, 45)$, $(98, 46)$, $\cdots$, $(45, 99)$

이므로 55개다.

29. [출제의도] 삼각형의 닮음과 피타고라스 정리를 이용하여 선분의 길이를 구한다.

두 반직선 AQ, BC이 만나는 점을 S라 하자.



선분 AR는 $\angle$DAP의 이등분선이므로

$\overline{AP}:\overline{AD}=\overline{PR}:\overline{RD}$에서 $\overline{AP}:\overline{AD}=17:15$

$\overline{AP}=17t$, $\overline{AD}=15t$(t는 양수)라 하자.

사각형 ABCD는 정사각형이므로 $\overline{AB}=\overline{AD}=15t$

직각삼각형 ABP에서

$\overline{BP}^2=\overline{AP}^2-\overline{AB}^2$

$=(17t)^2-(15t)^2$

$=64t^2$

$=(8t)^2$

$\overline{BP}>0$이므로 $\overline{BP}=8t$

$\overline{PC}=\overline{AD}-\overline{BP}=7t$

$\overline{PC}=1$이므로 $t=\frac{1}{7}$

$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{PS}$이므로 $\angle DAS=\angle PSA$(엇각)

따라서 삼각형 APS는 이등변삼각형이다.

그러므로 $\overline{PS}=\overline{PA}=17t=17\times\frac{1}{7}=\frac{17}{7}$

$\overline{CS}=\overline{PS}-\overline{PC}=\frac{17}{7}-1=\frac{10}{7}$

두 삼각형 ABS, QCS에서

$\angle$S는 공통인 각, $\angle ABS=\angle QCS=90°$이므로

$\triangle ABS\backsim\triangle QCS$

$\overline{BS}=\overline{BC}+\overline{CS}=\frac{15}{7}+\frac{10}{7}=\frac{25}{7}$

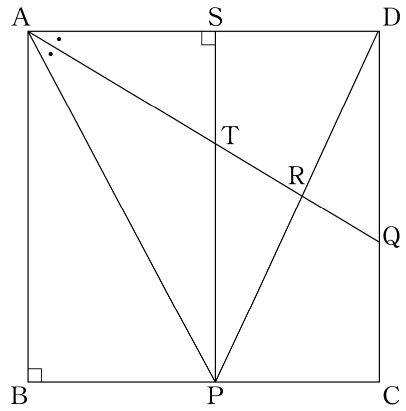
$\overline{AB}:\overline{QC}=\overline{BS}:\overline{CS}$

$\frac{15}{7}:l=\frac{25}{7}:\frac{10}{7}$

$\frac{25}{7}l=\frac{150}{49}$, $l=\frac{6}{7}$

그러므로 $70l=70\times\frac{6}{7}=60$

[다른 풀이]



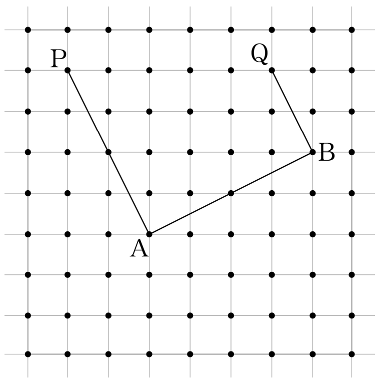
점 P에서 변 AD에 내린 수선의 발을 점 S, 두 선분 SP, AQ가 만나는 점을 T라 하자.
선분 AR는 $\angle DAP$의 이등분선이므로
$\overline{AP}:\overline{AD}=\overline{PR}:\overline{RD}$에서 $\overline{AP}:\overline{AD}=17:15$
$\overline{AP}=17t$, $\overline{AD}=15t$ (t는 양수)라 하자.
사각형 ABCD는 정사각형이므로 $\overline{AB}=\overline{AD}=15t$
직각삼각형 ABP에서 피타고라스 정리에 의해

$$\begin{aligned}\overline{BP}^2&=\overline{AP}^2-\overline{AB}^2\\&=(17t)^2-(15t)^2\\&=64t^2\\&=(8t)^2\end{aligned}$$

$\overline{BP}>0$이므로 $\overline{BP}=8t$
$\overline{PC}=\overline{AD}-\overline{BP}=7t$
$\overline{PC}=1$이므로 $t=\frac{1}{7}$
$\overline{AS}=\overline{BP}=8t=\frac{8}{7}$, $\overline{AP}=\frac{17}{7}$
선분 AT는 $\angle SAP$의 이등분선이므로
$\overline{ST}:\overline{TP}=\overline{AS}:\overline{AP}$에서
$\overline{ST}:\overline{TP}=8:17$
따라서 $\overline{ST}=\frac{8}{25}\times\overline{SP}=\frac{8}{25}\times\frac{15}{7}=\frac{24}{35}$
$\overline{ST}\,/\!/\,\overline{DQ}$이므로 $\triangle AST \backsim \triangle ADQ$
$\overline{AS}:\overline{ST}=\overline{AD}:\overline{DQ}$
$\frac{8}{7}:\frac{24}{35}=\frac{15}{7}:\overline{DQ}$
$\frac{8}{7}\times\overline{DQ}=\frac{24}{35}\times\frac{15}{7}$, $\overline{DQ}=\frac{9}{7}$이므로
$l=\overline{DC}-\overline{DQ}=\frac{15}{7}-\frac{9}{7}=\frac{6}{7}$
따라서 $70l=70\times\frac{6}{7}=60$

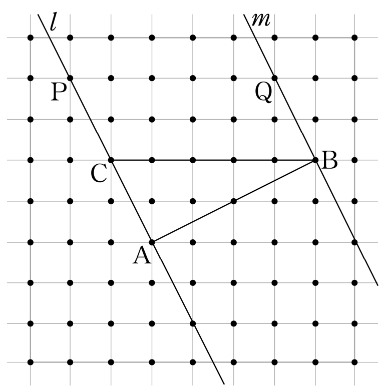
30. [출제의도] 원의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 삼각형을 추측하고 그 개수를 구한다.

세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 예각삼각형이 되려면 세 내각이 모두 $90°$보다 작아야 한다.
[그림 1]과 같이 $\angle PAB=90°$, $\angle QBA=90°$인 모눈종이 위의 두 점 P, Q를 생각한다.



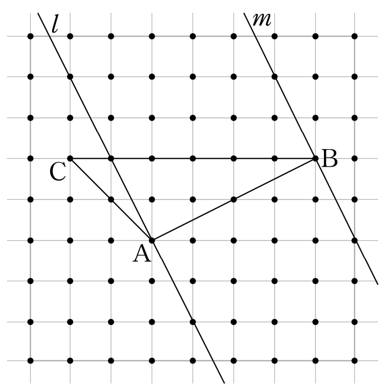
[그림 1]

[그림 2]와 같이 두 점 P, A를 지나는 직선을 l, 두 점 Q, B를 지나는 직선을 m이라 하자. 두 직선 l, m 위의 점 C에 대하여 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형은 직각삼각형이다.



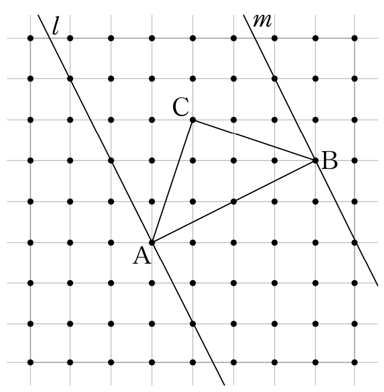
[그림 2]

[그림 3]과 같이 두 직선 l, m 사이에 있지 않은 점 C에 대하여 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형은 둔각삼각형이다.



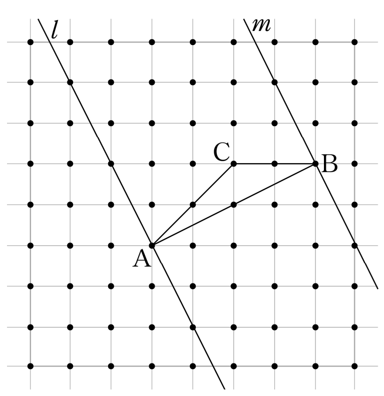
[그림 3]

따라서 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 예각삼각형이 되려면 점 C가 두 직선 l, m 사이에 있어야 한다.
[그림 4]는 두 직선 l, m 사이에 있는 점 C에 대하여 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 직각삼각형이 되는 경우를 나타낸 것이다.



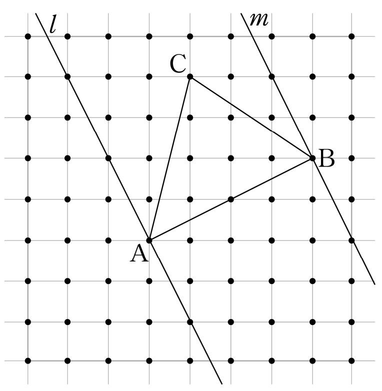
[그림 4]

[그림 5]는 두 직선 l, m 사이에 있는 점 C에 대하여 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 둔각삼각형이 되는 경우를 나타낸 것이다.



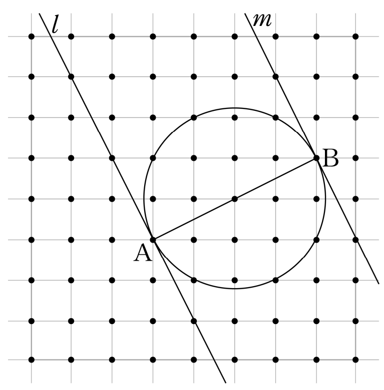
[그림 5]

[그림 6]은 두 직선 l, m 사이에 있는 점 C에 대하여 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 예각삼각형이 되는 경우를 나타낸 것이다.



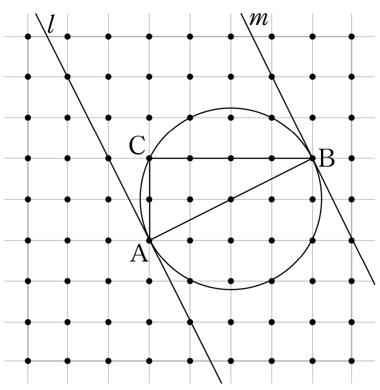
[그림 6]

[그림 4]와 같이 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 직각삼각형이면 반원에 대한 원주각이 $90°$이므로 세 점 A, B, C는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 있다.
따라서 [그림 7]과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원을 그리고 점 C가 원의 안에 있는 경우, 점 C가 원 위에 있는 경우, 점 C가 원의 밖에 있는 경우로 나누어 생각해 보자.



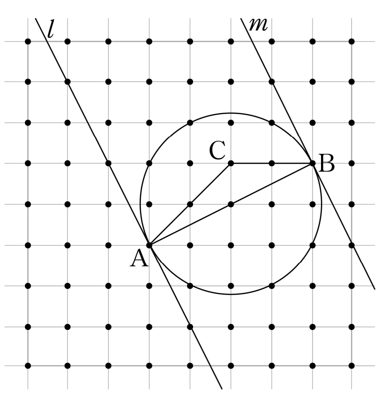
[그림 7]

[그림 8]과 같이 점 C가 원 위에 있는 경우에는 반원에 대한 원주각이 $90°$이므로 $\angle ACB=90°$이다. 따라서 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형은 직각삼각형이다.



[그림 8]

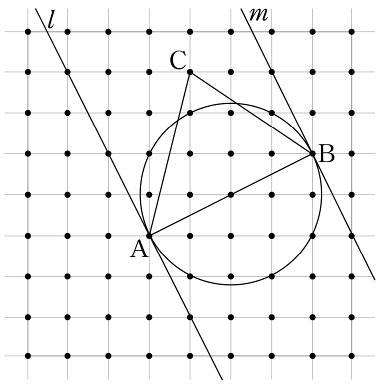
[그림 9]와 같이 점 C가 원의 안에 있는 경우에는 $\angle ACB$가 반원에 대한 원주각보다 크다. 따라서 $\angle ACB>90°$이므로 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형은 둔각삼각형이다.



[그림 9]

[그림 10]과 같이 점 C가 원의 밖에 있는 경우에는 $\angle ACB$가 반원에 대한 원주각보다 작다. 따라서 $\angle ACB<90°$이므로 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하

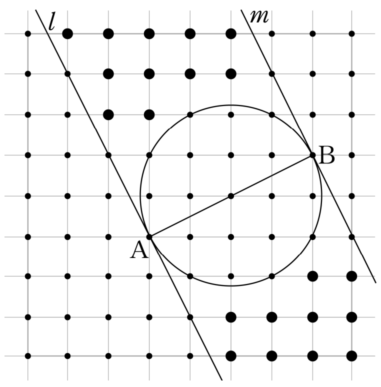
는 삼각형은 예각삼각형이다.



[그림 10]

그러므로 [그림 8], [그림 9], [그림 10]으로부터 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 중에서 예각삼각형이 되려면 점 C가 선분 AB를 지름으로 하는 원의 밖에 있어야 한다는 것을 알 수 있다.

[그림 11]은 두 직선 l, m 사이에 있고 선분 AB를 지름으로 하는 원의 밖에 있는 점 C의 위치를 표시한 것이다.



[그림 11]

따라서 구하는 점 C의 개수는 21이다.