2016학년도 11월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[나형]

1	②	**2**	③	**3**	④	**4**	②	**5**	④
6	④	**7**	③	**8**	⑤	**9**	①	**10**	④
11	②	**12**	①	**13**	⑤	**14**	③	**15**	③
16	⑤	**17**	①	**18**	①	**19**	⑤	**20**	②
21	③	**22**	2	**23**	5	**24**	100	**25**	15
26	181	**27**	16	**28**	48	**29**	4	**30**	23

1. [출제의도] 지수 계산하기

$5\times 9^{\frac{1}{2}}=5\times(3^2)^{\frac{1}{2}}=5\times 3=15$

2. [출제의도] 집합의 연산 이해하기

$A\cap B=\{5,\ 7,\ 9\}$

$\therefore\ n(A\cap B)=3$

3. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+n}{5n^2-7}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}}{5-\frac{7}{n^2}}=\frac{4}{5}$$

4. [출제의도] 도함수 계산하기

$f'(x)=3x^2+3$이므로 $f'(1)=6$

5. [출제의도] 역함수 이해하기

$g(4)=f^{-1}(4)=a$라 하면 $f(a)=4$

$3a+1=4$

$a=1$

$\therefore\ g(4)=1$

6. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$에서 연속이다. 그러므로 $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+3)=f(3)$

$\lim\limits_{x\to 3}(x^2+3)=12$, $f(3)=a$이므로

$\therefore\ a=12$

7. [출제의도] 명제 추론하기

$p:x=4$, $q:2x^2-ax+12=0$

일 때, 조건 p, q의 진리집합을 P, Q라 하면

$P=\{x|x=4\}$, $Q=\{x|2x^2-ax+12=0\}$이다.

명제 $p\to q$가 참이면 $P\subset Q$이므로

$x=4$는 방정식 $2x^2-ax+12=0$의 근이다.

$\therefore\ a=11$

8. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f(x)=\int 3x^2dx=x^3+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=C=1$이므로 $f(x)=x^3+1$

$\therefore\ f(3)=28$

9. [출제의도] 절대부등식 이해하기

a가 양수이므로

$18a+\frac{1}{2a}\ge 2\sqrt{18a\times\frac{1}{2a}}=2\times\sqrt{9}=6$

(단, 등호는 $18a=\frac{1}{2a}$일 때 성립한다.)

$\therefore$ 최솟값은 6

10. [출제의도] 등비중항 이해하기

a_4는 a_3과 a_5의 등비중항이므로 $a_4^2=a_3a_5=1$

모든 항이 양수이므로 $a_4=1$

$a_4=a_1\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=1$, $a_1=27$

$\therefore\ a_2=27\times\frac{1}{3}=9$

11. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)+\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=-1+1=0$

12. [출제의도] 급수와 일반항의 관계 이해하기

$\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n-5)=0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{5}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n}{2a_n-3}=\frac{4\times\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{2\times\lim\limits_{n\to\infty}a_n-3}=5$$

13. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

a는 2의 세제곱근이므로

$a^3=2$

$\sqrt{2}$는 b의 네제곱근이므로

$(\sqrt{2})^4=b$

$\therefore\ \left(\frac{b}{a}\right)^3=\frac{b^3}{a^3}=\frac{4^3}{2}=32$

14. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$

닫힌 구간 $[0,5]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	a	↗	$a+7$	↘	$a-25$

닫힌 구간 $[0,5]$에서 함수 $f(x)$는 최댓값 $a+7$, 최솟값 $a-25$를 갖는다.

$a-25=-15$, $a=10$

$\therefore$ 최댓값은 $a+7=17$

15. [출제의도] 집합 사이의 포함 관계 추론하기

(가)에서 집합 A의 원소 1, 2, 3은 모두 집합 X의 원소이므로 $A\subset X$

(나)에서 집합 X는 집합 B의 원소 4, 5, 6을 원소로 갖지 않으므로 $X\subset B^C$

그러므로 전체집합 U의 부분집합 X는

$\{1,\ 2,\ 3\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

$\therefore$ X의 개수는 $2^{7-3}=2^4=16$

16. [출제의도] 로그를 활용하여 문제해결하기

$R=512$, $H=8$, $h=6$, 우물의 반지름의 길이가 1m인 우물 A의 양수량 Q_A는

$$Q_A=\frac{k(8^2-6^2)}{\log\left(\frac{512}{1}\right)}=\frac{28k}{9\log 2}$$

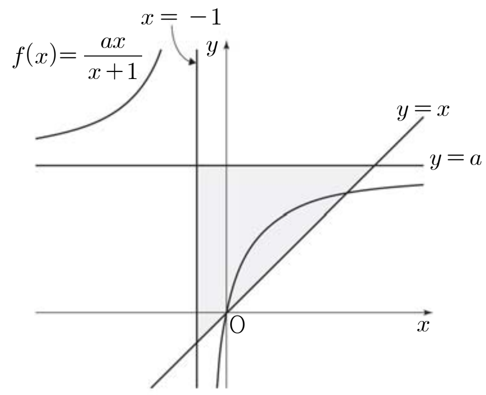
$R=512$, $H=8$, $h=6$, 우물의 반지름의 길이가 2m인 우물 B의 양수량 Q_B는

$$Q_B=\frac{k(8^2-6^2)}{\log\left(\frac{512}{2}\right)}=\frac{28k}{8\log 2}$$

$\therefore\ \frac{Q_A}{Q_B}=\frac{8}{9}$

17. [출제의도] 유리함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x)=\frac{ax}{x+1}=-\frac{a}{x+1}+a$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=a$

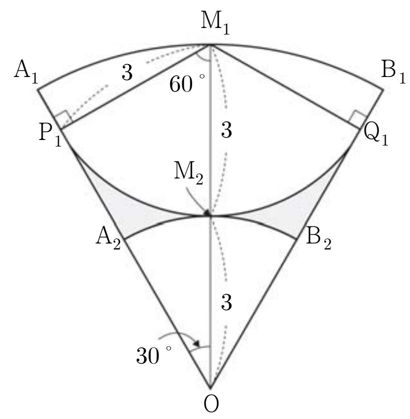


두 직선 $x=-1$, $y=a$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}(a+1)^2=18$

$\therefore\ a=5$

18. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제해결하기

그림 R_1에서



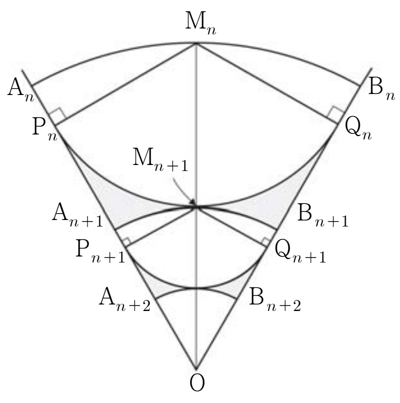
R_1

S_1은 직각삼각형 $\mathrm{OP_1M_1}$에서 부채꼴 $\mathrm{M_1P_1M_2}$와 부채꼴 $\mathrm{OA_2M_2}$를 뺀 넓이의 두 배이므로

$$S_1=2\times\left\{\left(\frac{1}{2}\times 3\times 3\sqrt{3}\right)-\left(\pi\times 3^2\times\frac{60}{360}\right)-\left(\pi\times 3^2\times\frac{30}{360}\right)\right\}$$

$$=2\times\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}-\frac{9}{4}\pi\right)=9\sqrt{3}-\frac{9}{2}\pi$$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



R_{n+1}

$\overline{\mathrm{OM}_n}=a(a\neq 0)$라 하면 $\overline{\mathrm{OM}_{n+1}}=\dfrac{a}{2}$

중심각의 크기가 같은 부채꼴 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$과

부채꼴 $\mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$은 서로 닮음이고

닮음비는 $\overline{\mathrm{OM}_n}:\overline{\mathrm{OM}_{n+1}}=a:\dfrac{a}{2}=1:\dfrac{1}{2}$이다.

그러므로 그림 R_n과 R_{n+1}에서

새로 얻어진  모양의 도형도 서로 닮음이고

닮음비가 $1:\dfrac{1}{2}$이므로 넓이비는 $1:\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $9\sqrt{3}-\dfrac{9}{2}\pi$이고 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{9\sqrt{3}-\frac{9}{2}\pi}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{4}{3}\left(9\sqrt{3}-\frac{9}{2}\pi\right)$$
$$=12\sqrt{3}-6\pi$$
$$=6(2\sqrt{3}-\pi)$$

19. [출제의도] 수학적 귀납법 추론하기

(1) $n=1$일 때,

(좌변)$=(2\times1-1)\times2^0=1$,

(우변)$=(2\times1-3)\times2^1+3=1$이므로

$(*)$이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(2k-1)2^{k-1}=(2m-3)2^m+3$이다.

$n=m+1$일 때, $(*)$이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1}(2k-1)2^{k-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)2^{k-1}+\left(\boxed{2m+1}\right)\times2^m$$
$$=(2m-3)2^m+3+\left(\boxed{2m+1}\right)\times2^m$$
$$=(4m-2)2^m+3$$
$$=\left(\boxed{2m-1}\right)\times2^{m+1}+3$$

따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

$\therefore\ f(m)=2m+1,\ g(m)=2m-1$

$f(4)\times g(2)=9\times3=27$

20. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

선분 OP에 수직이고 점 P를 지나는 직선 PQ의 기울기는 $-\dfrac{1}{t}$이므로

직선 PQ의 방정식은 $y-t^2=-\dfrac{1}{t}(x-t)$

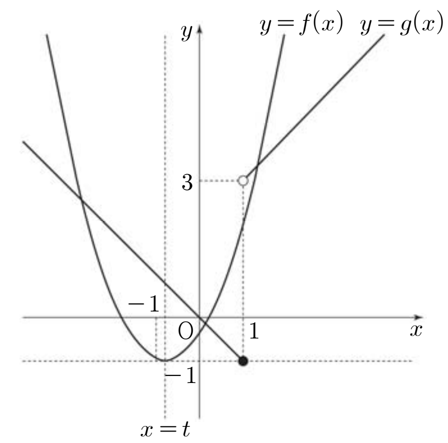
따라서 y축과 만나는 점 $\mathrm{Q}(0,1+t^2)$

삼각형 OPQ의 넓이 $S(t)=\dfrac{1}{2}\times t\times(1+t^2)$

$$\therefore\ \lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{2}\times t\times(1+t^2)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{1}{2}\times(1+t^2)=\frac{1}{2}$$

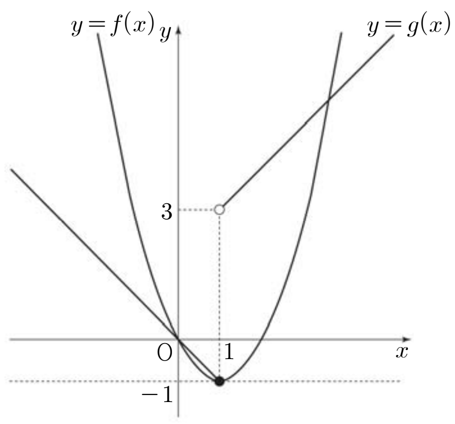
21. [출제의도] 함수의 연속을 활용하여 추론하기

ㄱ.



$\displaystyle\lim_{t\to-1+}h(t)=3$ (참)

ㄴ.

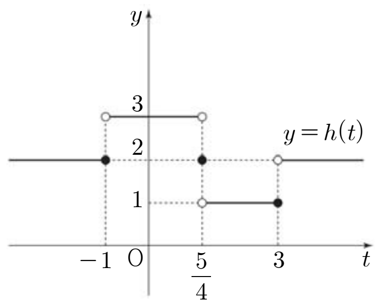


$\displaystyle\lim_{t\to1-}h(t)=3,\ \lim_{t\to1+}h(t)=3,\ h(1)=3$이므로

함수 $h(t)$는 $t=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프가 $t=\dfrac{5}{4}$에서 접하므로 함수 $h(t)$는

$$h(t)=\begin{cases}2 & (t\leq-1)\\ 3 & \left(-1<t<\frac{5}{4}\right)\\ 2 & \left(t=\frac{5}{4}\right)\\ 1 & \left(\frac{5}{4}<t\leq3\right)\\ 2 & (t>3)\end{cases}$$



함수 $h(t)$가 $t=-1,\ t=\dfrac{5}{4},\ t=3$에서 불연속이므로 모든 a의 값의 합은

$-1+\dfrac{5}{4}+3=\dfrac{13}{4}$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

22. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1, 공차를 d라 하면

$a_5-a_3=(a_1+4d)-(a_1+2d)=2d=4$

$\therefore\ d=2$

23. [출제의도] 합성함수 이해하기

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(6)=5$

24. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=5$$
$$\sum_{k=1}^{10}(b_k-4)=\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}4=\sum_{k=1}^{10}b_k-40=50$$
$$\sum_{k=1}^{10}b_k=90$$
$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}(2a_k+b_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k=10+90=100$$

25. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_a8=\log_a2^3=3\log_a2=2$

$\log_a2=\dfrac{2}{3},\ \log_2a=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ 10\times\log_2a=10\times\dfrac{3}{2}=15$

26. [출제의도] 미분계수 이해하기

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-4}{h}=3$에서

$\displaystyle\lim_{h\to0}h=0$이므로 $\displaystyle\lim_{h\to0}\{f(2+h)-4\}=0$이다.

$\therefore\ f(2)=4$

$f(2)=12+2a+b=4$에서

$2a+b=-8$ …… ㉠

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-4}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=3$

$f'(x)=6x+a$이므로

$f'(2)=12+a=3,\ a=-9$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-9,\ b=10$

$\therefore\ a^2+b^2=81+100=181$

27. [출제의도] 무리함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

$\mathrm{A}(a, \sqrt{a})$, $\mathrm{B}(a, \sqrt{3a})$

점 C의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로

$\sqrt{x}=\sqrt{3a}$, $x=3a$

따라서 $\mathrm{C}(3a, \sqrt{3a})$, $\mathrm{D}(3a, 3\sqrt{a})$

두 점 A, D를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{3\sqrt{a}-\sqrt{a}}{3a-a}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ ($\because$ $a>0$)

$\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{1}{4}$이므로 $\sqrt{a}=4$

$\therefore$ $a=16$

28. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

곡선 $y=f(x)$위의 점 (t, t^3-at)에서

접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-a$이므로

접선의 방정식은

$y-(t^3-at)=(3t^2-a)(x-t)$이고

점 $(0, 16)$을 지나므로

$2t^3=-16$

$t^3=-8$

$t=-2$ ($\because$ t는 실수)

접선의 기울기는 8이므로

$f'(-2)=3\times(-2)^2-a=12-a=8$

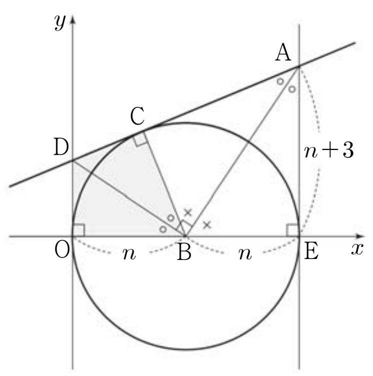
$a=4$

그러므로 $f(x)=x^3-4x$

$\therefore$ $f(a)=f(4)=4^3-4\times4=48$

29. [출제의도] 수열의 극한을 활용하여 문제해결하기

그림과 같이 점 A에서 원에 그은 두 접선의 접점 중 점 C가 아닌 점을 $\mathrm{E}(2n, 0)$이라 하자.



$\triangle\mathrm{AEB}$와 $\triangle\mathrm{BOD}$는 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{EB}}=\overline{\mathrm{BO}}:\overline{\mathrm{OD}}$

$n+3:n=n:\overline{\mathrm{OD}}$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{OD}}=\dfrac{n^2}{n+3}$

$\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{BO}}=\overline{\mathrm{BC}}$

$l_n=2\times\left(\dfrac{n^2}{n+3}+n\right)=\dfrac{4n^2+6n}{n+3}$

$S_n=2\times(\triangle\mathrm{BOD}$의 넓이$)$

$=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times n\times\dfrac{n^2}{n+3}\right)=\dfrac{n^3}{n+3}$

$\therefore$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{l_n\times S_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\times\frac{4n^2+6n}{n+3}\times\frac{n^3}{n+3}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n}{(n+3)^2}=4$

30. [출제의도] 도함수를 활용하여 그래프 추론하기

조건 (가)에서 $f(0)=27$, $f'(0)=0$

함수 $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때,

조건 (나), (다)에서

함수 $h(x)$의 그래프는 점 $(-3, 0)$을 지나고

$x=a\,(a\neq-3)$에서 x축과 접한다.

따라서 $h(x)=(x+3)(x-a)^2$

$f(0)=27$, $g(0)=0$이므로

$h(0)=f(0)-g(0)$

$3a^2=27$, $a=3$ ($\because$ $a\neq-3$)

$\therefore$ $h(x)=f(x)-g(x)=(x+3)(x-3)^2$

$=x^3-3x^2-9x+27$

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=3x^2-6x-9$

$f'(0)=0$이므로 $f'(0)-g'(0)=-9$

$\therefore$ $g'(0)=9$

$y=g(x)$는 원점을 지나는 직선이므로 $g(x)=9x$

$f(x)-g(x)=x^3-3x^2-9x+27$에서

$f(x)=x^3-3x^2+27$

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	27	↘	23	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 23을 갖는다.

[참고]