

수학 영역(나형)

제 2 교시

1

1. $5 \times 9^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

- ① 5 ② 15 ③ 25 ④ 35 ⑤ 45

2. 두 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{5, 7, 9\}$ 에 대하여
집합 $A \cap B$ 의 원소의 개수는? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + n}{5n^2 - 7}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

4. 함수 $f(x) = x^3 + 3x$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

5. 함수 $f(x) = 3x + 1$ 의 역함수가 $g(x)$ 일 때, $g(4)$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

6. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & (x \neq 3) \\ a & (x = 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

7. 명제

‘ $x = 4$ 이면 $2x^2 - ax + 12 = 0$ 이다.’

가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

8. 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \int 3x^2 dx$$

이고 $f(0) = 1$ 일 때, $f(3)$ 의 값은? [3점]

- ① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

9. 양수 a 에 대하여 $18a + \frac{1}{2a}$ 의 최솟값은? [3점]

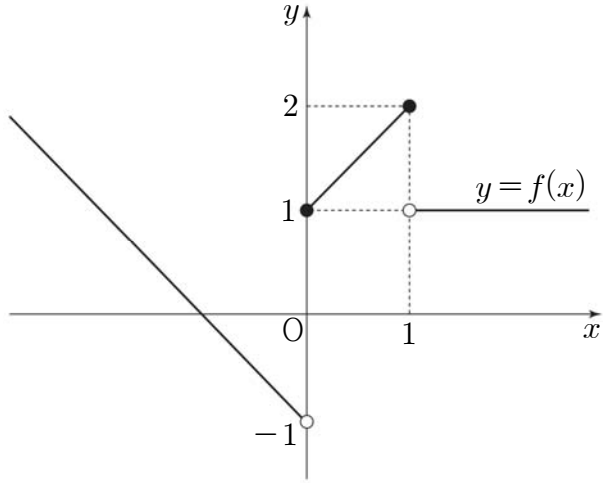
- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

10. 공비가 $\frac{1}{3}$ 이고 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$a_3 a_5 = 1$ 일 때, a_2 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

11. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

12. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 5) = 6$$

일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4a_n}{2a_n - 3}$ 의 값은? (단, $a_n \neq \frac{3}{2}$) [3점]

- ① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

13. 실수 a, b 에 대하여 a 는 2의 세제곱근이고 $\sqrt{2}$ 는 b 의 네제곱근일 때, $\left(\frac{b}{a}\right)^3$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

14. 닫힌 구간 $[0, 5]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + a$ 의 최솟값이 -15 일 때, 최댓값은? (단, a 는 상수이다.) [4점]

- ① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

6

수학 영역(나형)

15. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 10 \text{이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 U 의 부분집합 X 의 개수는? [4점]

(가) $A - X = \emptyset$
 (나) $B \cap X = \emptyset$

- ① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

16. 우물에서 단위 시간당 끌어올리는 물의 양을 양수량이라 한다. 양수량이 일정하면 우물의 수위는 일정한 높이를 유지하게 된다. 우물의 영향권의 반지름의 길이가 R (m)인 어느 지역에 반지름의 길이가 r (m)인 우물의 양수량을 Q ($\text{m}^3/\text{분}$), 원지하수의 두께를 H (m), 양수 중 유지되는 우물의 수심을 h (m)라고 할 때, 다음 관계식이 성립한다고 한다.

$$Q = \frac{k(H^2 - h^2)}{\log\left(\frac{R}{r}\right)} \quad (\text{단, } k \text{는 양의 상수이다.})$$

우물의 영향권의 반지름의 길이가 512m로 일정한 어느 지역에 두 우물 A, B 가 있다. 반지름의 길이가 1m인 우물 A 와 반지름의 길이가 2m인 우물 B 의 양수량을 각각 Q_A ($\text{m}^3/\text{분}$), Q_B ($\text{m}^3/\text{분}$)이라 하자.

우물 A, B 의 원지하수의 두께가 모두 8m일 때, 양수 중 두 우물의 수심이 모두 6m를 유지하였다. $\frac{Q_A}{Q_B}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{6}{7}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

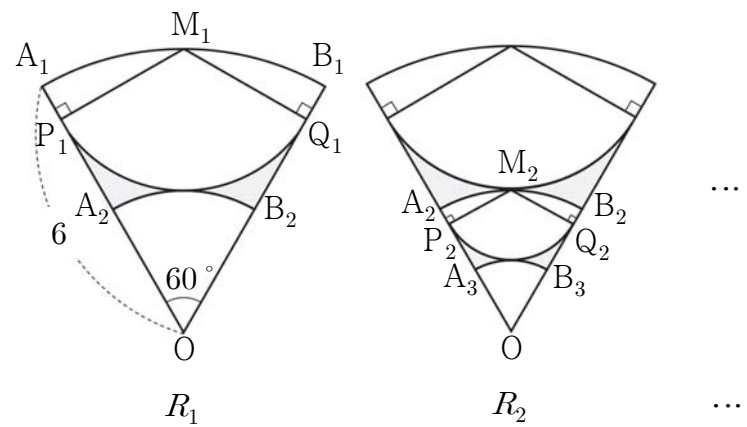
17. 양수 a 에 대하여 함수 $f(x) = \frac{ax}{x+1}$ 의 그래프의 점근선인

두 직선과 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 18일 때,
 a 의 값은? [4점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

18. 중심이 O , 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 60° 인
부채꼴 OA_1B_1 이 있다.

그림과 같이 호 A_1B_1 을 이등분하는 점 M_1 에서 두 선분 OA_1, OB_1 에
내린 수선의 발을 각각 P_1, Q_1 이라 하고, 중심이 M_1 , 반지름의
길이가 $\overline{M_1P_1}$ 인 부채꼴 $M_1P_1Q_1$ 을 그린다. 점 O 를 중심으로 하고
호 P_1Q_1 에 접하는 원이 두 선분 OA_1, OB_1 과 만나는 점을 각각
 A_2, B_2 라 할 때, 호 P_1Q_1 , 호 A_2B_2 , 선분 P_1A_2 , 선분 Q_1B_2 로
둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.
그림 R_1 에 호 A_2B_2 를 이등분하는 점 M_2 에서 두 선분 OA_2, OB_2 에
내린 수선의 발을 각각 P_2, Q_2 라 하고, 중심이 M_2 , 반지름의
길이가 $\overline{M_2P_2}$ 인 부채꼴 $M_2P_2Q_2$ 를 그린다. 점 O 를 중심으로 하고
호 P_2Q_2 에 접하는 원이 두 선분 OA_2, OB_2 와 만나는 점을 각각
 A_3, B_3 이라 할 때, 호 P_2Q_2 , 호 A_3B_3 , 선분 P_2A_3 , 선분 Q_2B_3 으로
둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는
부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $6(2\sqrt{3}-\pi)$ ② $7(2\sqrt{3}-\pi)$ ③ $8(2\sqrt{3}-\pi)$
④ $9(2\sqrt{3}-\pi)$ ⑤ $10(2\sqrt{3}-\pi)$

19. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)2^{k-1} = (2n-3)2^n + 3 \dots\dots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = (2 \times 1 - 1) \times 2^0 = 1,$$

$$(\text{우변}) = (2 \times 1 - 3) \times 2^1 + 3 = 1 \text{ 이므로 } (*) \text{이 성립한다.}$$

(2) $n=m$ 일 때, $(*)$ 이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m (2k-1)2^{k-1} = (2m-3)2^m + 3 \text{이다.}$$

$n=m+1$ 일 때, $(*)$ 이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} (2k-1)2^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^m (2k-1)2^{k-1} + (\boxed{\text{가}}) \times 2^m$$

$$= (2m-3)2^m + 3 + (\boxed{\text{가}}) \times 2^m$$

$$= (\boxed{\text{나}}) \times 2^{m+1} + 3$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 $(*)$ 이 성립한다.

(1), (2)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $(*)$ 이 성립한다.

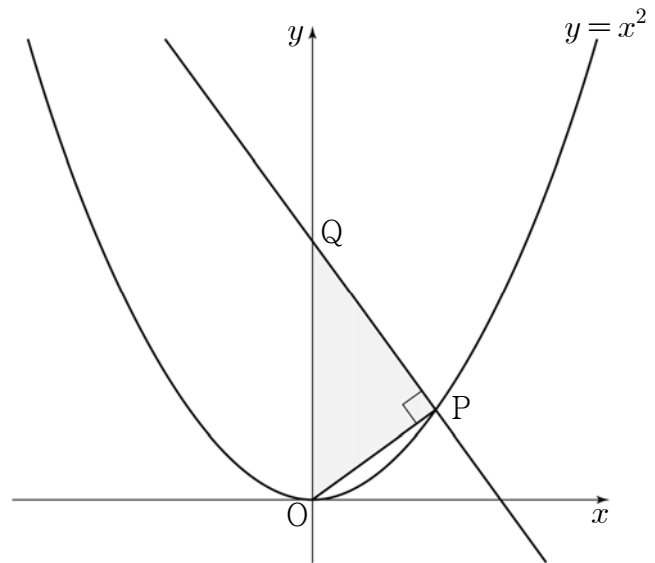
위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$ 이라 할 때,
 $f(4) \times g(2)$ 의 값은? [4점]

- ① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

20. 그림과 같이 양수 t 에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P(t, t^2)$ 을 지나고 선분 OP 에 수직인 직선이 y 축과 만나는 점을 Q 라 하자.

삼각형 OPQ 의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)}{t}$ 의 값은?

(단, O 는 원점이다.) [4점]



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

21. 실수 t 에 대하여 두 함수

$$f(x) = (x-t)^2 - 1, \quad g(x) = \begin{cases} -x & (x \leq 1) \\ x+2 & (x > 1) \end{cases}$$

의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$ 라 할 때,
<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보기 >

- ㄱ. $\lim_{t \rightarrow -1^+} h(t) = 3$
 ㄴ. 함수 $h(t)$ 는 $t=1$ 에서 연속이다.
 ㄷ. 함수 $h(t)$ 가 $t=a$ 에서 불연속이 되는 모든 a 의 값의 합은 $\frac{15}{4}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 - a_3 = 4$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 구하시오. [3점]

23. 두 함수 $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = x - 1$ 에 대하여 $(g \circ f)(3)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$, $\sum_{k=1}^{10} (b_k - 4) = 50$ 일 때,

$\sum_{k=1}^{10} (2a_k + b_k)$ 의 값을 구하시오. [3점]

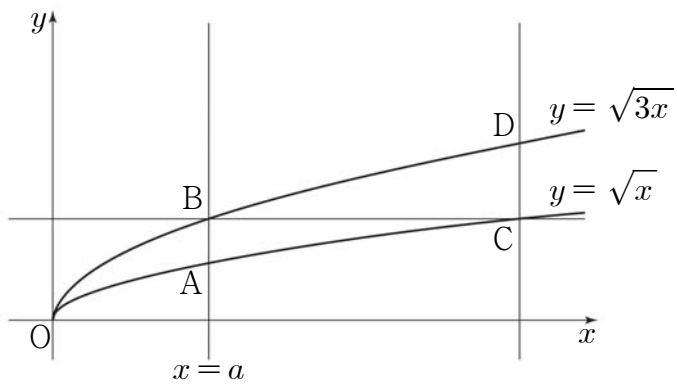
26. 함수 $f(x) = 3x^2 + ax + b$ 가 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 4}{h} = 3$ 을

만족시킬 때, 두 상수 a , b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

[4점]

25. 1보다 큰 실수 a 에 대하여 $\log_a 8 = 2$ 일 때, $10 \times \log_2 a$ 의 값을 구하시오. [3점]

27. 그림과 같이 양수 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{3x}$ 가 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 B를 지나고 x 축과 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{x}$ 와 만나는 점을 C라 하고, 점 C를 지나고 y 축과 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 와 만나는 점을 D라 하자. 두 점 A, D를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하시오. [4점]

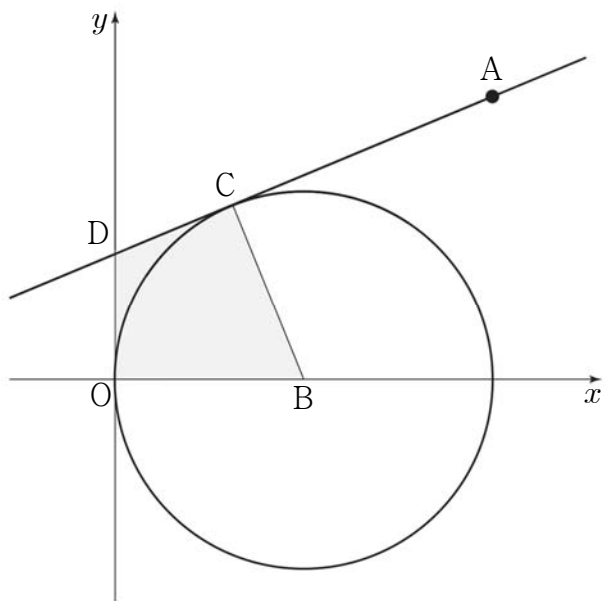


28. 함수 $f(x)=x^3-ax$ 에 대하여 점 $(0, 16)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 기울기가 8일 때, $f(a)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [4점]

29. 그림과 같이 자연수 n 에 대하여

점 $A(2n, n+3)$ 을 지나는 기울기가 양수인 직선이
 점 $B(n, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 n 인 원에 접할 때,
 이 직선이 원과 만나는 점을 C , y 축과 만나는 점을 D 라 하자.
 사각형 $OBCD$ 의 둘레의 길이와 넓이를 각각 l_n, S_n 이라 할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n \times S_n}{n^3}$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.) [4점]



30. 좌표평면에서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와
 원점을 지나는 직선 $y=g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 27을 갖는다.
 (나) 함수 $|f(x)-g(x)|$ 는 $x=-3$ 에서만 미분가능하지 않다.
 (다) 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 는 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수 $f(x)$ 의 극솟값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.