2016학년도 11월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[가 형]

1	⑤	**2**	②	**3**	②	**4**	⑤	**5**	③
6	①	**7**	④	**8**	②	**9**	④	**10**	④
11	①	**12**	④	**13**	⑤	**14**	③	**15**	⑤
16	①	**17**	②	**18**	③	**19**	①	**20**	③
21	⑤	**22**	8	**23**	12	**24**	6	**25**	14
26	20	**27**	10	**28**	43	**29**	16	**30**	130

1. [출제의도] 삼각함수의 값 계산하기

$\cos\frac{13}{6}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. [출제의도] 다항함수의 미분계수 계산하기

$f'(x)=3x^2+3$이므로 $f'(1)=6$

3. [출제의도] 로그함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to0}\frac{4x}{\ln(1+2x)}=2\times\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\ln(1+2x)}=2$

4. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f(x)=x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=C=1$이므로 $f(x)=x^2+x+1$

따라서 $f(2)=7$

5. [출제의도] 미분계수 이해하기

$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(-1+3h)-f(-1)}{h}$

$=3\times\lim\limits_{h\to0}\frac{f(-1+3h)-f(-1)}{3h}$

$=3f'(-1)=4$

따라서 $f'(-1)=\frac{4}{3}$

6. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n-5)=0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{5}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4a_n}{2a_n-3}=\frac{4\times\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{2\times\lim\limits_{n\to\infty}a_n-3}=5$

7. [출제의도] 로그를 포함한 부등식 이해하기

진수의 조건에서 $2x+1>0$, $x-2>0$이므로

$x>2$ …… ㉠

$\log_3(2x+1)\ge\log_3 3(x-2)$

$2x+1\ge3x-6$

$x\le7$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2<x\le7$

따라서 자연수 x는 3, 4, 5, 6, 7이고 합은 25

8. [출제의도] 지수함수의 미분 이해하기

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)=f(0)=1$이므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim\limits_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0-}\frac{(3h+1)e^h-1}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0-}\frac{(3h+1)(e^h-1)+3h}{h}$

$=1+3=4$

$\lim\limits_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0+}\frac{ah+1-1}{h}=a$

따라서 $a=4$

9. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

조건 (나)에서 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=3$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{na_n}=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프 추론하기

$y=\tan x$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3},c\right)$를 지나므로 $c=\sqrt{3}$

$y=a\sin bx$의 주기가 π이므로 $b=2$

$y=a\sin2x$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3},\sqrt{3}\right)$을 지나므로

$a\sin\frac{2}{3}\pi=\sqrt{3}\quad\therefore a=2$

따라서 $abc=4\sqrt{3}$

11. [출제의도] 정적분 이해하기

$\int_0^1(4x-3)dx+\int_1^k(4x-3)dx$

$=\int_0^k(4x-3)dx=\left[2x^2-3x\right]_0^k$

$=2k^2-3k=0$

$k(2k-3)=0$

따라서 $k=\frac{3}{2}$ $(k>0)$

12. [출제의도] 지수함수를 활용하여 문제해결하기

$C_g=2$, $C_d=\frac{1}{4}$, $x=a$, $n=\frac{1}{200}$이므로

$\frac{1}{200}=\frac{1}{4}\times2\times10^{\frac{4}{5}(a-9)}$

$10^{\frac{4}{5}(a-9)}=10^{-2}$

$\frac{4}{5}(a-9)=-2$

따라서 $a=\frac{13}{2}$

13. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-4x+a}{\sqrt{x+1}-2}=b$이고 $\lim\limits_{x\to3}(\sqrt{x+1}-2)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to3}(x^2-4x+a)=0\quad\therefore a=3$

$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x+1}-2}=\lim\limits_{x\to3}\frac{(x-3)(x-1)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\frac{(x-3)(x-1)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}(x-1)(\sqrt{x+1}+2)=8$

$\therefore b=8$

따라서 $a+b=11$

14. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=7$까지 움직인 거리는

$\int_0^7|v(t)|dt$

$=\int_0^3(6t-2t^2)dt+\int_3^7\left(\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}\right)dt$

$=\left[3t^2-\frac{2}{3}t^3\right]_0^3+\left[\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{2}t\right]_3^7$

$=9+4=13$

15. [출제의도] 삼각함수의 미분 이해하기

$\lim\limits_{x\to a}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(a)\}^2}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}\frac{\{f(x)-f(a)\}\{f(x)+f(a)\}}{x-a}$

$=2f'(a)f(a)=1$

$f'(x)=\cos x-\sin x$이므로

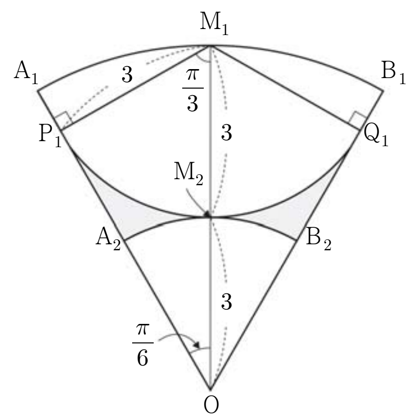
$2(\cos a-\sin a)(\sin a+\cos a)$

$=2(\cos^2a-\sin^2a)=4\cos^2a-2=1$

따라서 $\cos^2a=\frac{3}{4}$

16. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제해결하기

그림 R_1에서



R_1

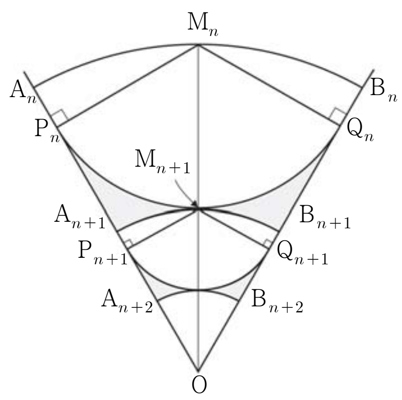
S_1은 직각삼각형 OP_1M_1의 넓이에서 부채꼴 $M_1P_1M_2$의 넓이와 부채꼴 OA_2M_2의 넓이를 뺀 값의 두 배이므로

$S_1=2\times\left\{\left(\frac{1}{2}\times3\times3\sqrt{3}\right)-\frac{1}{2}\times\left(3^2\times\frac{\pi}{3}+3^2\times\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

$=2\times\left\{\frac{9\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{3}{4}\pi\right)\right\}$

$=9\sqrt{3}-\frac{9}{2}\pi$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



R_{n+1}

$\overline{OM_n}=a\,(a\ne0)$라 하면 $\overline{OM_{n+1}}=\frac{a}{2}$

중심각의 크기가 같은 부채꼴 OA_nB_n과

부채꼴 $OA_{n+1}B_{n+1}$은 닮음이고

닮음비는 $\overline{OM_n}:\overline{OM_{n+1}}=a:\frac{a}{2}=1:\frac{1}{2}$이다.

그러므로 그림 R_n과 R_{n+1}에서

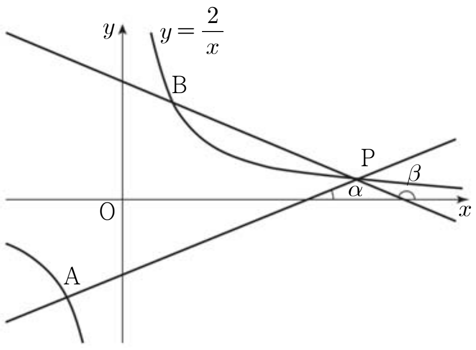
새로 얻어진 모양의 도형도 서로 닮음이고 닮음비가 $1:\frac{1}{2}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{1}{4}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $9\sqrt{3}-\frac{9}{2}\pi$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{9\sqrt{3}-\frac{9}{2}\pi}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left(9\sqrt{3}-\frac{9}{2}\pi\right)$$

$$=12\sqrt{3}-6\pi=6\left(2\sqrt{3}-\pi\right)$$

17. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 문제해결하기



두 점 A, P를 지나는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α라 하면 $\tan\alpha=\frac{\frac{2}{a}-(-2)}{a-(-1)}=\frac{2}{a}$

두 점 B, P를 지나는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 β라 하면 $\tan\beta=\frac{\frac{2}{a}-2}{a-1}=-\frac{2}{a}$

$\beta-\alpha=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$이므로

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$=\frac{-\frac{4}{a}}{1-\frac{4}{a^2}}=-\frac{4a}{a^2-4}=-1$$

$a^2-4a-4=0$

따라서 $a=2+2\sqrt{2}\ \ (a>1)$

18. [출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기

$h(x)=x^{n+2}-3\left(3^{n+1}-1\right)-3^{n+1}(n+2)(x-3)$

$h(x)$는 $(n+2)$차 다항함수이다.

$h'(x)=(n+2)x^{n+1}-(n+2)3^{n+1}$

$=(n+2)\times\left(\boxed{x^{n+1}-3^{n+1}}\right)$

$x>3$에서 $h'(x)>0$이므로 $h(x)$는 증가한다.

$x\geq 3$에서 $h(x)$의 최솟값은 $h(3)$

$h(3)=3^{n+2}-3\left(3^{n+1}-1\right)=3$

$h(x)$의 최솟값은 $\boxed{3}$

$x\geq 3$에서 $h(x)\geq\boxed{3}>0$이므로

$f(x)-g(x)>0$

$x\geq 3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$

$\therefore A(x)=x^{n+1}-3^{n+1},\ p=3$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p\times A(4)}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(4^{n+1}-3^{n+1}\right)}{4^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{12-9\times\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}=12$$

19. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 문제해결하기

점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

삼각형 PAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{PH}}$이고 선분 PH의 길이는 직선 PH가 원의 중심 O를 지날 때 최대이다.

직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

점 P는 직선 $y=-2x$와 원 $x^2+y^2=n$이 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점이다.

점 $\mathrm{P}\left(a_n,\ -2a_n\right)$이라 하면

$a_n^2+4a_n^2=n$

$\therefore a_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{5}}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(a_{n+1}-a_n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{5}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$

20. [출제의도] 정적분을 활용하여 추론하기

ㄱ. $f(x)=a(x+1)(x-1)(x-2)\ \ (a<0)$라 하자.

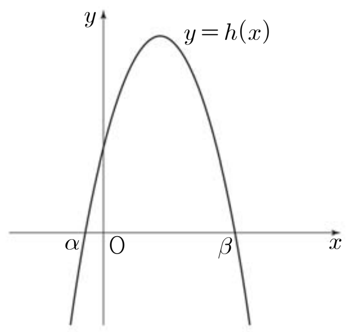
$1<x<2$일 때, $f(x)>0$

$\int_1^2 f(x)dx>0\quad\therefore$ (참)

ㄴ. $h(x)=f'(x)=a\left(3x^2-4x-1\right)$

$h(0)=-a>0\quad\therefore$ (거짓)

ㄷ. 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라 하자.



$\int_m^n h(x)dx$의 값이 최대가 되려면

닫힌 구간 $[m,n]$이 $h(x)\geq 0$을 만족시키는 구간과 일치하여야 하므로 $m=\alpha,\ n=\beta$

$\therefore m+n=\alpha+\beta=\frac{4}{3}\quad\therefore$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

21. [출제의도] 함수의 연속성 추론하기

$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하자.

조건 (가)에서 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1,\ x=-1$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

$a+b+c=-1$

$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$

$a-b+c=1$

$\therefore b=-1,\ c=-a$

$g(x)=x^3+ax^2-x-a=(x-1)(x+1)(x+a)$

조건 (나)에서 $f(x)g(x+k)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 k가 존재하므로 $x=1,\ x=-1$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x+k)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x+k)=f(1)g(1+k)$

$k(k+2)(k+a+1)=0$

$k=-2$ 또는 $k=-a-1\ \ (k\neq0)$ …… ㉠

$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x+k)=\lim_{x\to-1-}f(x)g(x+k)$

$=f(-1)g(-1+k)$

$k(k-2)(k+a-1)=0$

$k=2$ 또는 $k=-a+1\ \ (k\neq0)$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해

$k=-2$일 때, $a=3$

$k=2$일 때, $a=-3$

$g(0)=-a<0$이므로 $a=3$

따라서 $g(x)=x^3+3x^2-x-3$이고 $g(2)=15$

22. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+5}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=8$$

23. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=1$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to1}(2x+10)=f(1)$

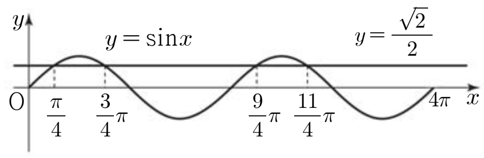
따라서 $a=12$

24. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

방정식 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는

함수 $y=\sin x\,(0\leq x\leq 4\pi)$의 그래프와

직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$가 만나는 점의 x좌표와 같다.



구하는 해는 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{9}{4}\pi$

또는 $x=\frac{11}{4}\pi$

따라서 모든 실근의 합은 6π이고 $k=6$

25. [출제의도] 정적분과 미분의 관계 이해하기

$f(x)=\frac{d}{dx}\int_1^x\left(t^3+2t+5\right)dt=x^3+2x+5$

$f'(x)=3x^2+2$

따라서 $f'(2)=14$

26. [출제의도] 정적분을 활용하여 추론하기

$y=\frac{1}{2}x^2$과 $y=kx$가 만나는 점의 x좌표는 0 또는 $2k$이므로

$A=\int_0^{2k}\left(kx-\frac{1}{2}x^2\right)dx,\ B=\int_{2k}^2\left(\frac{1}{2}x^2-kx\right)dx$

$A=B$이므로

$\int_0^{2k}\left(kx-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\int_{2k}^2\left(\frac{1}{2}x^2-kx\right)dx$

$\int_0^{2k}\left(kx-\frac{1}{2}x^2\right)dx-\int_{2k}^2\left(\frac{1}{2}x^2-kx\right)dx=0$

$\int_0^{2k}\left(kx-\frac{1}{2}x^2\right)dx+\int_{2k}^2\left(kx-\frac{1}{2}x^2\right)dx=0$

$\int_0^2\left(kx-\frac{1}{2}x^2\right)dx=0$

$\left[\frac{k}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3\right]_0^2=2k-\frac{4}{3}=0$

따라서 $k=\frac{2}{3}$이고 $30k=20$

27. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

조건 (가)에서 부등식의 각 변을 x^2으로 나누면

$$\frac{2x^2-5x}{x^2} \le \frac{f(x)}{x^2} \le \frac{2x^2+2}{x^2}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2}{x^2}=2$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$$

$f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

조건 (나)에서 $f(1)=0$

$f(x)=2(x-1)(x+a)$라 하자.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x+a)}{(x-1)(x+3)}$$

$$=\frac{2(1+a)}{4}=\frac{1}{4}$$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$, $f(x)=2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

따라서 $f(3)=10$

28. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 문제해결하기

정사각형 ACDB의 한 변의 길이가 4이므로

두 점 A, C의 x좌표를 t라 하면 두 점 B, D의 x좌표는 $t+4$이다.

네 점 A, B, C, D의 y좌표가 각각

a^t, b^{t+4}, b^t, c^{t+4}이므로

$a^t=8$, $b^{t+4}=8$, $b^t=4$, $c^{t+4}=4$이다.

$b^{t+4}=8$, $b^t=4$에서 $4b^4=8$ $\therefore b=2^{\frac{1}{4}}$

$b^t=4$에서 $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^t=4$ $\therefore t=8$

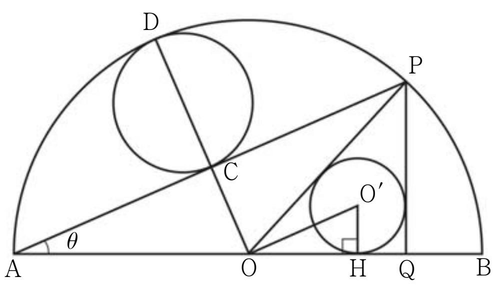
$a^t=8$에서 $a^8=8$ $\therefore a=2^{\frac{3}{8}}$

$c^{t+4}=4$에서 $c^{12}=4$ $\therefore c=2^{\frac{1}{6}}$

$abc=2^{\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=2^{\frac{19}{24}}$

따라서 $p=24$, $q=19$이고 $p+q=43$

29. [출제의도] 삼각함수 극한을 활용하여 문제해결하기



선분 AP와 호 AP에 동시에 접하는 가장 큰 원이 선분 AP와 접하는 점을 C, 호 AP와 접하는 점을 D라 하자.

$\overline{\mathrm{CO}}=\sin\theta$, $\overline{\mathrm{CD}}=1-\overline{\mathrm{CO}}=1-\sin\theta$이므로

선분 AP와 호 AP에 동시에 접하는 가장 큰 원의 반지름의 길이는 $\frac{1-\sin\theta}{2}$

$\therefore S(\theta)=\frac{\pi}{4}(1-\sin\theta)^2$

삼각형 POQ의 내접원의 중심을 O′, 점 O′에서 선분 OQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle\mathrm{POQ}=2\theta$, $\angle\mathrm{O'OH}=\theta$

삼각형 POQ의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{r}{\tan\theta}$, $\overline{\mathrm{HQ}}=r$

$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OH}}+\overline{\mathrm{HQ}}=\frac{r}{\tan\theta}+r=\cos 2\theta$

$$r=\frac{\cos 2\theta\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

$$\therefore T(\theta)=\pi\left(\frac{\cos 2\theta\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)^2$$

$$S\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{4}\left\{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}^2=\frac{\pi}{4}(1-\cos\theta)^2$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^2\times T(\theta)}{S\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^2\times\frac{\pi\cos^2 2\theta\tan^2\theta}{(1+\tan\theta)^2}}{\frac{\pi}{4}(1-\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{4\theta^2\cos^2 2\theta\tan^2\theta}{(1+\tan\theta)^2(1-\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{4\theta^2\cos^2 2\theta\tan^2\theta(1+\cos\theta)^2}{(1+\tan\theta)^2\sin^4\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{4\cos^2 2\theta(1+\cos\theta)^2}{(1+\tan\theta)^2}\times\frac{\theta^4}{\sin^4\theta}\times\frac{\tan^2\theta}{\theta^2}\right\}$$

$$=16$$

30. [출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기

조건 (가)에서 $y=f(x)-g(x)$는 x좌표가 2인 점에서 x축에 접하므로

$f(2)-g(2)=0$, $f'(2)-g'(2)=0$

$f(x)-g(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖는다. …… (∗)

$f(x)-g(x)=(x-2)^2(x^2+ax+b)$라 하자.

조건 (나)에서 $y=|f(x)-g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $y=f(x)-g(x)\ge 0$

$(x-2)^2\ge 0$이므로

모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+b\ge 0$

판별식 $D=a^2-4b\le 0$ …… ㉠

$f(x)=(x-2)^2(x^2+ax+b)+g(x)$

$f'(x)=2(x-2)(x^2+ax+b)+(x-2)^2(2x+a)+g'(x)$

$g'(x)=4x-1$이므로

$f'(0)=-4b+4a-1=2$

$b=a-\frac{3}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2-4a+3\le 0$

$\therefore 1\le a\le 3$

$f(1)=(1+a+b)+g(1)=a+b-2=2a-\frac{11}{4}$

$f(1)$은 $a=3$일 때 최댓값 $\frac{13}{4}$을 갖는다.

따라서 $\alpha=\frac{13}{4}$이고 $40\alpha=130$

[참고]

(∗)에서 $f(2)-g(2)=0$이므로

$f(x)-g(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

$f(x)-g(x)=(x-2)Q(x)$라 하면

$f'(x)-g'(x)=Q(x)+(x-2)Q'(x)$

$f'(2)-g'(2)=Q(2)=0$

$\therefore Q(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)-g(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖는다.