2016학년도 11월 고1 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

1	④	**2**	②	**3**	①	**4**	⑤	**5**	③
6	①	**7**	④	**8**	②	**9**	②	**10**	③
11	②	**12**	④	**13**	④	**14**	③	**15**	⑤
16	①	**17**	⑤	**18**	①	**19**	③	**20**	⑤
21	③	**22**	7	**23**	12	**24**	10	**25**	18
26	8	**27**	25	**28**	11	**29**	16	**30**	106

1. [출제의도] 집합의 연산 이해하기

$A \cap B = \{1, 3\}$이므로 모든 원소의 합은 $1+3=4$

2. [출제의도] 다항식 계산하기

$A-B=(2x^2-xy)-(x^2+3xy)=x^2-4xy$

3. [출제의도] 복소수 계산하기

$z=3+i$에서 $\overline{z}=3-i$

$z+\overline{z}=(3+i)+(3-i)=6$

4. [출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기

$y=\sqrt{x+1}+k$의 그래프가 점 $(3, 7)$을 지나므로

$7=\sqrt{3+1}+k$

따라서 $k=5$

5. [출제의도] 이차부등식 이해하기

$x^2-4x-21<0$

$(x+3)(x-7)<0$

$\therefore\ -3<x<7$

따라서 정수 x의 개수는 9

6. [출제의도] 복소수의 성질 이해하기

$z=1+\sqrt{3}i$에서

$$\begin{aligned} z^2-2z+1 &= (z-1)^2 \\ &= \{(1+\sqrt{3}i)-1\}^2 \\ &= (\sqrt{3}i)^2=-3 \end{aligned}$$

따라서 $z^2-2z+1=-3$

7. [출제의도] 등차수열의 합 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2, 공차가 4이므로

$$S_{10}=\frac{10(2\times2+9\times4)}{2}=200$$

8. [출제의도] 유리함수의 그래프 이해하기

$$\begin{aligned} y &= \frac{bx-5}{x+a} \\ &= \frac{b(x+a)-(ab+5)}{x+a} \\ &= \frac{-ab-5}{x+a}+b \end{aligned}$$
의 점근선은

두 직선 $x=-a$, $y=b$

유리함수 $y=\dfrac{bx-5}{x+a}$의 점근선은

두 직선 $x=-1$, $y=2$이므로 $a=1$, $b=2$

따라서 $a+b=3$

9. [출제의도] 무리식 이해하기

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})} \\ &= 2\sqrt{x+1} \end{aligned}$$

따라서 $x=8$일 때 구하는 값은 6

10. [출제의도] 사차방정식 이해하기

$(x^2-3x)^2+5(x^2-3x)+6=0$에서

$x^2-3x=t$라 하면

$t^2+5t+6=0$

$(t+3)(t+2)=0$

$t=x^2-3x$이므로

$(x^2-3x+3)(x^2-3x+2)=0$

$(x^2-3x+3)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x^2-3x+3=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

$x^2-3x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9-12=-3<0$이므로

$x^2-3x+3=0$은 허근을 갖는다.

따라서 모든 실근의 곱은 $1\times2=2$

11. [출제의도] 명제의 충분조건 추론하기

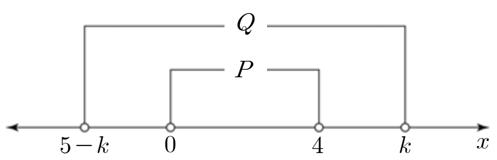
조건 p가 $-2<x-2<2$이므로

조건 p의 진리집합은 $P=\{x|0<x<4\}$

조건 q가 $5-k<x<k$이므로

조건 q의 진리집합은 $Q=\{x|5-k<x<k\}$

조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$



$5-k\le0$이고 $k\ge4$에서 $k\ge5$이고 $k\ge4$

$\therefore\ k\ge5$

따라서 k의 최솟값은 5

12. [출제의도] 선분의 내분점 이해하기

$\mathrm{A}(-1, -2)$, $\mathrm{B}(5, a)$를 잇는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\times5+1\times(-1)}{2+1}, \frac{2\times a+1\times(-2)}{2+1}\right)$$

즉, $\left(3, \dfrac{2a-2}{3}\right)$이므로 $b=3$, $\dfrac{2a-2}{3}=0$

$\therefore\ a=1$, $b=3$

따라서 $a+b=4$

13. [출제의도] 유리식을 이용하여 실생활 문제해결하기

A의 가로의 길이는 2, 세로의 길이는 a,

광원의 높이는 $2a$이고,

B의 가로의 길이는 4, 세로의 길이는 $2a$,

광원의 높이는 a이므로

A의 실지수는 $\dfrac{2a}{2a(2+a)}=\dfrac{1}{2+a}$

B의 실지수는 $\dfrac{8a}{a(4+2a)}=\dfrac{4}{2+a}=4\times\dfrac{1}{2+a}$

따라서 B의 실지수가 A의 실지수의 4배이므로

$k=4$

14. [출제의도] 다항식의 인수분해 이해하기

다항식 $x^4-2x^3+2x^2-x-6$을

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -2 & 2 & -1 & -6 \\ & & -1 & 3 & -5 & 6 \\ \hline 2 & 1 & -3 & 5 & -6 & 0 \\ & & 2 & -2 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & 3 & 0 & \end{array}$$

$x^4-2x^3+2x^2-x-6=(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

$\therefore\ a=-2$, $b=-1$, $c=3$

따라서 $a+b+c=0$

15. [출제의도] 집합의 원소 추론하기

조건 (가)에서

$X\cap\{1, 2, 3\}=\{2\}$이므로 $1\notin X$, $2\in X$, $3\notin X$

조건 (나)에서

집합 X의 모든 원소의 합 $S(X)$가 홀수이므로

집합 X는 집합 A의 원소 중 홀수인 1, 3, 5, 7 중에서 1개 또는 3개를 원소로 가져야 한다.

$1\notin X$, $3\notin X$이므로 집합 X는 5, 7 중 1개만을 원소로 가져야 한다.

두 조건 (가), (나)를 만족시키면서

$S(X)$가 최대가 될 때는 집합 A의 원소 중 짝수인 4, 6을 원소로 갖고, 홀수인 7을 원소로 가질 때이다.

즉, $X=\{2, 4, 6, 7\}$일 때 $S(X)$가 최대가 된다.

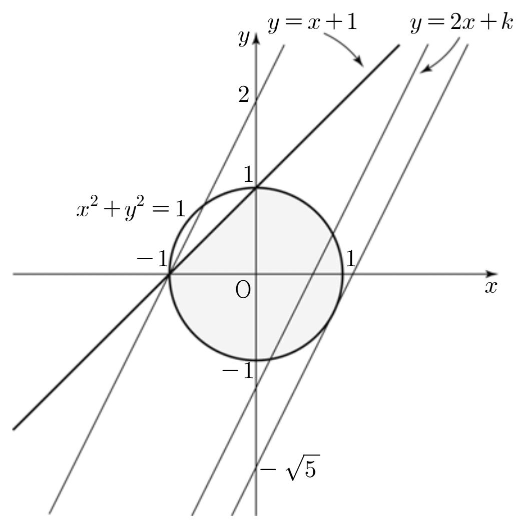
따라서 $S(X)$의 최댓값은

$2+4+6+7=19$

16. [출제의도] 부등식의 영역을 활용하여 문제해결하기

연립부등식 $\begin{cases} x^2+y^2\le1 \\ y\le x+1 \end{cases}$을 만족시키는 영역을

좌표평면 위에 나타내면 그림의 어두운 부분과 같다.



$y-2x=k$라 하면

직선 $y=2x+k$는 기울기가 2이고 y절편이 k이다.

이 직선을 주어진 부등식의 영역과 만나도록 평행이동하면서 k의 값의 변화를 조사하면

직선 $y=2x+k$가 점 $(-1, 0)$을 지날 때 최댓값을 갖고,

직선 $y=2x+k$와 원 $x^2+y^2=1$이 제4사분면에서 접할 때 최솟값을 갖는다.

$0=2\times(-1)+k$에서 $k=2$

$\therefore\ M=2$

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=2x+k$ 사이의 거리가 1이므로

$\dfrac{|k|}{\sqrt{4+1}}=1$, $|k|=\sqrt{5}$

$\therefore\ m=-\sqrt{5}$

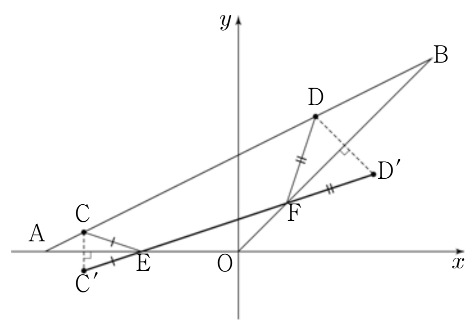
따라서 $M-m=2+\sqrt{5}$

17. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계 추론하기

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가
두 점 A, B에서 만나므로
방정식 $f(x)-g(x)=0$의 해는 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$
$f(x)-g(x)=x^2+(a-b)x+b-a$이므로
$b-a=t(t>0)$라 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=b-a=t$, $\alpha\beta=b-a=t$
$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=t^2-\boxed{4t}$
$|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$이므로 $t^2-4t-5=0$
$(t-5)(t+1)=0$
$t=5$ 또는 $t=-1$
$t>0$이므로 $t=\boxed{5}$
$f(-1)=1-a+b=1+t=\boxed{6}$
$\therefore$ $h(t)=4t$, $p=5$, $q=6$
따라서 $p+q+h(1)=5+6+4=15$

18. [출제의도] 대칭이동 활용하여 문제해결하기

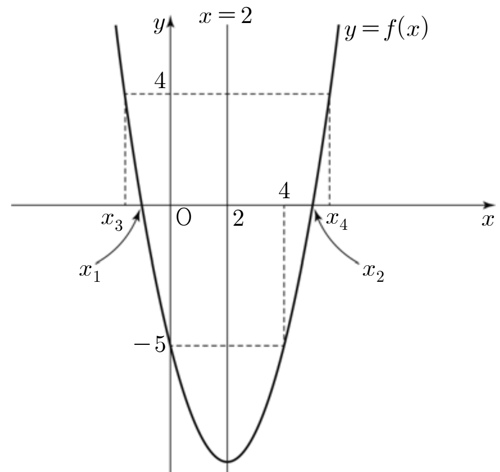
점 C$(-8,1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점은
C$'(-8,-1)$이고, 점 D$(4,7)$을 직선 $y=x$에
대하여 대칭이동한 점은 D$'(7,4)$
$\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{C'E}}$, $\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{FD'}}$이므로
$\overline{\mathrm{CE}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{C'E}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD'}}\ge\overline{\mathrm{C'D'}}$
$\overline{\mathrm{CE}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD}}$의 값이 최소일 때는
점 E, F가 두 점 C$'$, D$'$을 지나는 직선 위에
있을 때이다.



두 점 C$'(-8,-1)$, D$'(7,4)$를 지나는
직선의 방정식은 $y-4=\frac{1}{3}(x-7)$
$\therefore$ $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$
따라서 $\overline{\mathrm{CE}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD}}$의 값이 최소가 되도록 하는
점 E의 x좌표는 -5

19. [출제의도] 함수의 합성 이용하여 그래프 추론하기

$f(f(x))=-5$이고
$y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여
대칭이므로 $f(0)=f(4)=-5$
$\therefore$ $f(x)=0$ 또는 $f(x)=4$



$f(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 x_1, x_2라 하고
$f(x)=4$를 만족시키는 x의 값을 x_3, x_4라 하면
x_1과 x_2, x_3과 x_4는 각각 직선 $x=2$에 대하여
대칭이므로
$x_1+x_2=4$, $x_3+x_4=4$
따라서 $x_1+x_2+x_3+x_4=4+4=8$

20. [출제의도] 이차함수와 직선의 관계 추론하기

ㄱ. 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이므로
$x^2-ax+b>ax+2b$
$x^2-2ax-b>0$ (참)

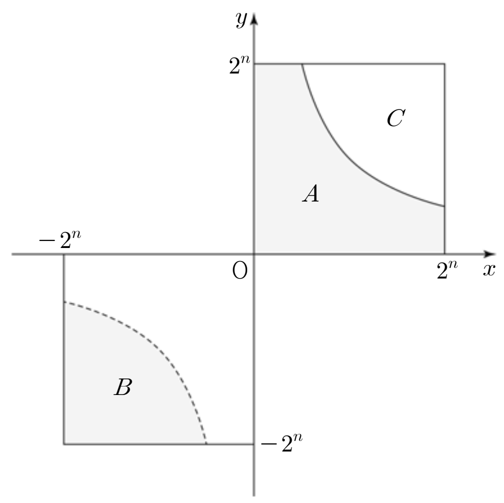
ㄴ. $x^2-2ax-b>0$이 모든 실수 x에 대하여
성립하므로 $x^2-2ax-b=0$의 판별식을 D라
하면 $\frac{D}{4}=a^2+b<0$
$b<-a^2\le 0$
$\therefore$ $b<0$ (참)

ㄷ. $f(x)=x^2-ax+b$
$=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 y좌표는
$-\frac{a^2}{4}+b$이고,
직선 $y=g(x)$의 y절편은 $2b$이므로
$\left(-\frac{a^2}{4}+b\right)-2b=-\frac{a^2}{4}-b$
$>-\frac{a^2}{4}+a^2$ ($\because$ $b<-a^2$)
$=\frac{3}{4}a^2\ge 0$
$-\frac{a^2}{4}+b>2b$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 y좌표는
직선 $y=g(x)$의 y절편보다 크다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 등비수열의 합을 이용하여 문제해결하기

구하는 순서쌍 (x,y)의 개수는 조건 (가), (나)를
만족시키는 좌표평면 위의 점 (x,y)의 개수와 같다.
$xy>0$이므로 점 (x,y)는 제1사분면 또는
제3사분면 위의 점이다.
조건 (가)에서 $-2^n\le x\le 2^n$, $-2^n\le y\le 2^n$
조건 (나)에서 점 (x,y)가 제1사분면 위에 있을 때
$xy\le 2^n$이므로 $y\le\frac{2^n}{x}$을 만족시키는 점이고,
점 (x,y)가 제3사분면 위에 있을 때
$xy>2^n$이므로 $y<\frac{2^n}{x}$ ($\because$ $x<0$)을 만족시키는
점이다.



그림과 같이 점 (x,y)는 A부분과 B부분에 있는
점이다. (단, 점선과 x축, y축은 제외한다.)
B부분과 C부분의 x좌표와 y좌표가
모두 정수인 점의 개수는 서로 같으므로 조건
(가), (나)를 만족시키는 점 (x,y)의 개수는
A와 C로 이루어진 부분의 x좌표와 y좌표가
모두 정수인 점의 개수와 같다.
$x=k(1\le k\le 2^n$, k는 정수$)$일 때 y좌표가
정수인 점은 $(k,1)$, $(k,2)$, $(k,3)$, $\cdots$, $(k,2^n)$
이므로 2^n개이다.
$k=1$, 2, 3, $\cdots$, 2^n이므로 구하는 순서쌍의 개수는
$a_n=2^n\times 2^n=4^n$
따라서 $S_4=\frac{4(4^4-1)}{4-1}=\frac{4}{3}(4^4-1)=340$

22. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_4=3+3d=24$
$3d=21$
따라서 $d=7$

23. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리 이해하기

점 $(0,1)$과 직선 $\sqrt{3}x+y+23=0$ 사이의 거리는
$\frac{|\sqrt{3}\times 0+1+23|}{\sqrt{3+1}}=\frac{24}{2}=12$

24. [출제의도] 절대부등식 이해하기

$a>0$이므로
$5a+\frac{5}{a}\ge 2\sqrt{5a\times\frac{5}{a}}=10$
(단, 등호는 $a=1$일 때 성립한다.)
따라서 최솟값은 10

25. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계 이해하기

직선 $y=x+2$와 평행하고

y절편이 k인 직선의 방정식은 $y=x+k$

직선 $y=x+k$가 원 $x^2+y^2=9$에 접하므로

원의 방정식 $x^2+y^2=9$에 $y=x+k$를 대입하면

$x^2+(x+k)^2=9$

$2x^2+2kx+k^2-9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-2k^2+18=0$

따라서 $k^2=18$

26. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기

$\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3y^2=28 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠, ㉡에서 $(y+2)^2+3y^2=28$

$y^2+y-6=0$

$(y+3)(y-2)=0$

$\therefore\ y=-3$ 또는 $y=2$

㉠에서 $y=-3$일 때 $x=-1$,

$y=2$일 때 $x=4$

$\therefore\ \alpha=4,\ \beta=2$ ($\because\ \alpha>0,\ \beta>0$)

따라서 $\alpha\times\beta=8$

27. [출제의도] 등비수열 추론하기

공비를 r라 하면 $b=ar,\ c=ar^2$

$\frac{b-c}{a}=\frac{ar-ar^2}{a}=-r^2+r=-\left(r-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

$\therefore\ k=\frac{1}{4}$

따라서 $100k=25$

28. [출제의도] 나머지정리를 활용하여 문제해결하기

$ax^3+b=(ax+b)Q_1(x)+R_1$ ⋯⋯ ㉠

$ax^4+b=(ax+b)Q_2(x)+R_2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에 $x=-\frac{b}{a}$를 각각 대입하면

$R_1=-\frac{b^3}{a^2}+b,\ R_2=\frac{b^4}{a^3}+b$

$R_1=R_2$이므로

$-\frac{b^3}{a^2}+b=\frac{b^4}{a^3}+b$

$\therefore\ b=-a$ ($\because\ ab\neq 0$)

그러므로 $R_1=R_2=0$

$ax^3-a=a(x-1)(x^2+x+1)$이므로

$a(x-1)(x^2+x+1)=a(x-1)Q_1(x)$

$\therefore\ Q_1(x)=x^2+x+1$

$ax^4-a=a(x-1)(x+1)(x^2+1)$이므로

$a(x-1)(x+1)(x^2+1)=a(x-1)Q_2(x)$

$\therefore\ Q_2(x)=(x+1)(x^2+1)$

따라서 $Q_1(2)+Q_2(1)=7+4=11$

29. [출제의도] 역함수를 활용하여 문제해결하기

$f(n)$은

$f(9)=f(72)=2$

$f(18)=f(81)=4$

$f(27)=f(90)=6$

$f(36)=f(99)=1$

$f(45)=3,\ f(54)=5,\ f(63)=0$

함수 $f(n)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로

$f^{-1}(0)=63,\ f^{-1}(3)=45,\ f^{-1}(5)=54$이고

$f^{-1}(1)=36$ 또는 $f^{-1}(1)=99$,

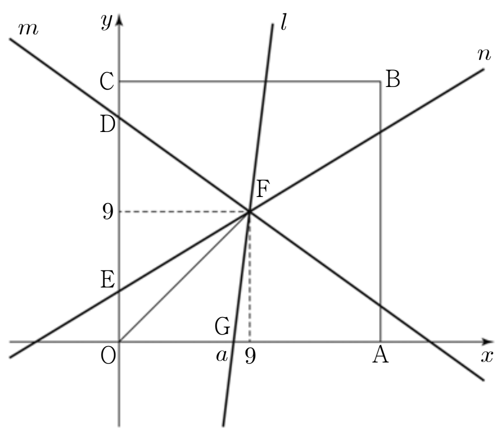
$f^{-1}(2)=9$ 또는 $f^{-1}(2)=72$,

$f^{-1}(4)=18$ 또는 $f^{-1}(4)=81$,

$f^{-1}(6)=27$ 또는 $f^{-1}(6)=90$이다.

따라서 집합 X의 개수는 $2\times2\times2\times2=16$

30. [출제의도] 직선의 방정식을 활용하여 문제해결하기



직선 m, n이 y축과 만나는 점을 각각 D, E라 하고 점 $(9, 9)$를 F라 하자. 정사각형 OABC의 넓이가 324이므로 삼각형 DEF의 넓이는 54

$\therefore\ \overline{\mathrm{DE}}=12$

직선 l이 x축과 만나는 점을 G라 하면

사각형 OGFE의 넓이 54는 삼각형 OGF와 삼각형 OEF의 넓이의 합과 같으므로

$\overline{\mathrm{OE}}+\overline{\mathrm{OG}}=12$이다.

$\overline{\mathrm{OG}}=a$이므로 $\overline{\mathrm{OE}}=12-a,\ \overline{\mathrm{OD}}=24-a$

$\therefore\ \mathrm{D}(0, 24-a),\ \mathrm{E}(0, 12-a)$

직선 m은 두 점 D, F를 지나므로

직선 m의 기울기는 $\frac{a-15}{9}$

직선 n은 두 점 E, F를 지나므로

직선 n의 기울기는 $\frac{a-3}{9}$

두 직선 m과 n의 기울기의 곱은

$\frac{a-15}{9}\times\frac{a-3}{9}$이므로

$\frac{1}{81}(a^2-18a+45)=\frac{1}{81}(a-9)^2-\frac{4}{9}$

$6\le a\le 10$이므로 $a=6$일 때 최댓값 $-\frac{1}{3}$

$a=9$일 때 최솟값 $-\frac{4}{9}$를 갖는다.

$\therefore\ \alpha=-\frac{1}{3},\ \beta=-\frac{4}{9}$

따라서 $\alpha^2+\beta^2=\frac{25}{81}$이므로 $p+q=106$