2017학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 나형 정답 및 풀이

01. ④	02. ③	03. ②	04. ①	05. ⑤
06. ②	07. ⑤	08. ①	09. ①	10. ③
11. ③	12. ⑤	13. ②	14. ②	15. ④
16. ③	17. ④	18. ①	19. ④	20. ⑤
21. ②	22. 21	23. 24	24. 10	25. 2
26. 16	27. 8	28. 19	29. 43	30. 65

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$6\times 8^{\frac{1}{3}}=6\times(2^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$=6\times 2$$
$$=12$$

정답 ④

2. **출제의도** : 교집합의 원소의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$A\cap B=\{3,4,5\}$ 이므로

$n(A\cap B)=3$

정답 ③

3. **출제의도** : 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+1}{3n^2-2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{2}{n^2}}$$
$$=\frac{8+0}{3-0}$$
$$=\frac{8}{3}$$

정답 ②

4. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 로그값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_3 6-\log_3 2=\log_3\frac{6}{2}$$
$$=\log_3 3=1$$

정답 ①

5. **출제의도** : 합성함수의 정의를 이해하고 합성함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$(g\circ f)(3)=g(f(3))$$
$$=g(2)$$
$$=5$$

정답 ⑤

6. **출제의도** : 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0)$라 하면

$\frac{a_7}{a_5}=r^2=4$

따라서, $r=2$ 이므로

$a_n=2^{n-1}$

즉, $a_4=2^{4-1}=2^3=8$

정답 ②

7. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률 $P(A\cup B)$의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{7}{9}-\frac{2}{9}$

$=\frac{5}{9}$

정답 ⑤

8. **출제의도** : 함수의 그래프를 이용하여 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 0-}f(x)=0$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=-2$ 이므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=0+(-2)=-2$

정답 ①

9. **출제의도** : $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{7}a_k=\sum_{k=1}^{6}(a_k+1)$에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7$

$=(a_1+1)+(a_2+1)+(a_3+1)+\cdots+(a_6+1)$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6)+6$

이므로

$a_7=6$

정답 ①

10. **출제의도** : 연속함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 연속함수이므로

$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$

따라서,

$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}(x+2)f(x)$

$=\lim_{x\to 2}(x+2)\times\lim_{x\to 2}f(x)$

$=4f(2)=12$

이므로

$f(2)=3$

정답 ③

11. **출제의도** : 확률밀도함수의 성질을 이해하고 이를 이용하여 상수 a의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률밀도함수의 성질에 의하여

주어진 확률밀도함수의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1 이므로

$$\frac{1}{2}\times a+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times a$$
$$=\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a$$
$$=\frac{3}{4}a$$
$$=1$$

따라서 $a=\frac{4}{3}$

정답 ③

12. **출제의도** : 조건의 부정에 대한 진리집합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sim p$: $x(x-11)<0$

이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은

$\{x|0<x<11, x\text{는 정수}\}$

이다.

따라서, 진리집합의 원소의 개수는 10이다.

정답 ⑤

13. **출제의도** : 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

학생 20명 중 임의로 택한 한 학생이 남학생일 사건을 A, 과목 B를 선택한 학생일 사건을 B라 하자.

학생 20명 중 임의로 택한 한 학생이 남학생일 때, 이 학생이 과목 B를 선택했을 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{\frac{7}{20}}{\frac{10}{20}}$$
$$=\frac{7}{10}$$

정답 ②

14. **출제의도** : 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_n=4+(n-1)\times 1=n+3$

이므로

$$\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})$$
$$=(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})+\cdots+(\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_{12}})$$
$$=\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_1}$$
$$=\sqrt{16}-\sqrt{4}$$
$$=4-2=2$$

정답 ②

15. **출제의도** : 정규분포를 따르는 확률변수에 대하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
수하물의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(18,\ 2^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-18}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(16 \le X \le 22)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{16-18}{2} \le \frac{X-18}{2} \le \frac{22-18}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 2)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

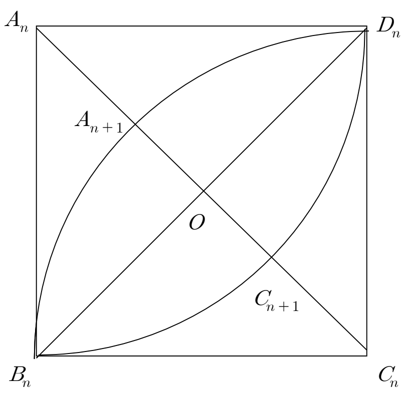
$=0.3413+0.4772$

$=0.8185$

정답 ④

16. **출제의도** : 규칙적으로 무한히 반복되는 도형에서 급수를 이용하여 넓이의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이를 x_n, 두 대각선의 교점을 O라 하면

$\overline{OA_n}=\frac{\sqrt{2}}{2}x_n$

따라서, $\overline{A_nC_{n+1}}=x_n$ 이므로

$\overline{OC_{n+1}}=x_n-\frac{\sqrt{2}}{2}x_n=(1-\frac{\sqrt{2}}{2})x_n$

따라서,

$\overline{A_nC_n}:\overline{A_{n+1}C_{n+1}}=\sqrt{2}x_n:2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})x_n$

$=\sqrt{2}:(2-\sqrt{2})$

이므로 닮음비는

$\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$

이다.

또한, $x_1=1$ 이므로

$\overline{A_1A_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}-1$

이므로

$S_1=2\times\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)^2=\frac{1}{2}(3-2\sqrt{2})$

따라서,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{2}(3-2\sqrt{2})}{1-(\sqrt{2}-1)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(3-2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}-2}$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$$

정답 ③

17. **출제의도** : 도형과 관련된 수열을 일반항을 찾고, 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_n=\frac{1}{2}\times\{(n+1)-(n-1)\}\times\frac{3}{n}$

$=\frac{1}{2}\times2\times\frac{3}{n}$

$$=\frac{3}{n}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{9}{a_n a_{n+1}}=\sum_{n=1}^{10}\frac{9}{\frac{3}{n}\times\frac{3}{n+1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{10}(n^2+n)$$

$$=\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}$$

$$=385+55$$

$$=440$$

정답 ④

18. 출제의도 : 이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

자연수 $k(4\le k\le n)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은 1부터 $k-1$까지의 자연수가 적혀 있는 카드 중에서 서로 다른 3장의 카드와 k가 적혀 있는 카드를 선택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나누는 것이므로

$$P(X=k)=\frac{\boxed{{}_{k-1}C_3}}{{}_nC_4}$$

이다. 자연수 $r(1\le r\le k)$에 대하여

$${}_kC_r=\frac{k}{r}\times{}_{k-1}C_{r-1}$$

이므로

$$k\times{}_{k-1}C_3=k\times\frac{k-1}{3}\times{}_{k-2}C_2$$

$$=4\times\frac{k(k-1)}{12}\times{}_{k-2}C_2$$

$$=4\times\frac{k(k-1)}{4\times3}\times\frac{(k-2)!}{(k-4)!2!}$$

$$=4\times\frac{k!}{(k-4)!4!}$$

$$=4\times\boxed{{}_kC_4}$$

이다. 그러므로

$$E(X)=\sum_{k=4}^{n}\{k\times P(X=k)\}$$

$$=\frac{1}{{}_nC_4}\sum_{k=1}^{n}(k\times{}_{k-1}C_3)$$

$$=\frac{4}{{}_nC_4}\sum_{k=4}^{n}{}_kC_4$$

이다.

$$\sum_{k=1}^{n}\boxed{{}_kC_4}={}_{n+1}C_5$$

이므로

$$E(X)=\frac{4}{{}_nC_4}\times{}_{n+1}C_5$$

$$=\frac{4}{\frac{n!}{(n-4)!4!}}\times\frac{(n+1)!}{(n-4)!5!}$$

$$=(n+1)\times\boxed{\frac{4}{5}}$$

즉, $f(k)={}_{k-1}C_3$, $g(k)={}_kC_4$, $a=\frac{4}{5}$이므로

$$a\times f(6)\times g(5)=\frac{4}{5}\times{}_5C_3\times{}_5C_4$$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{5\times4}{2\times1}\times5=40$$

정답 ①

19. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 자연수의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 방정식 $a+b+c+d=7$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)

의 개수와 같다.
이 때, $a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$이라 하면 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 방정식
$a'+1+b'+1+c'+1+d'+1=7$
즉, $a'+b'+c'+d'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수와 같다.
따라서 구하는 자연수의 개수는

$$\begin{aligned}{}_4\mathrm{H}_3 &= {}_6\mathrm{C}_3\\ &= \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\\ &=20\end{aligned}$$

정답 ④

20. 출제의도 : 삼차함수의 그래프의 특징을 이용하여 명제의 참, 거짓을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

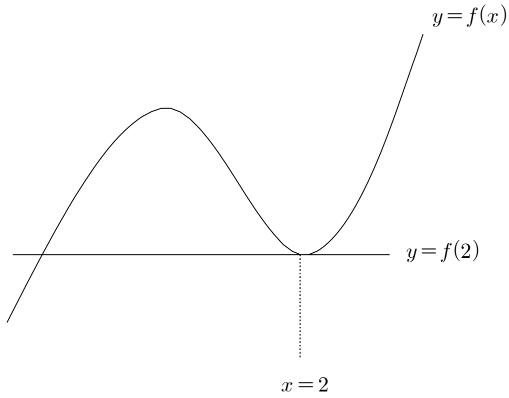
ㄱ. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$라고 하면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 이므로
$f'(-3)=f(3)$ 에서 $b=0$이고
$x=-2$에서 극댓값을 가지므로
$f'(-2)=12a+c=0$ 에서 $c=-12a$이다.
따라서,

$$\begin{aligned}f'(x)&=3ax^2+2bx+c\\ &=3ax^2-12a\ \ (a>0)\end{aligned}$$

이므로 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. $$\begin{aligned}f'(x)&=3ax^2-12a\\ &=3a(x+2)(x-2)\end{aligned}$$

이고 조건 (가)에 의하여 삼차함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
따라서, 그림과 같이 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.



(참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서
$f(x)=ax^3-12ax+d(a>0)$
$f'(x)=3ax^2-12a$
이므로 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선의 방정식은
$y-(11a+d)=-9a(x+1)$
$y=-9ax+2a+d\cdots$㉠
㉠에 점 $(2, f(2))$ 즉, $(2, -16a+d)$를 대입하면 등식이 성립하므로 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선의 방정식은 점 $(2, f(2))$를 지난다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

정답 ⑤

21. 출제의도 : 함수의 그래프, 방정식, 미분가능성 등을 활용하여 함수를 추론하고 이와 관련된 함숫값의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 이하여

$f(x)=ax^2(x-2)(x-3)\ \ (a<0)$

또는

$f(x)=bx(x-2)^2(x-3)\ \ (b<0)$

또는

$f(x)=cx(x-2)(x-3)^2\ \ (c<0)$

이다.

(i) $f(x)=ax^2(x-2)(x-3)\ \ (a<0)$일 때, 조건 (나)를 만족시키는 a의 값이 존재한다고 하면

$f(1)=2a<0$

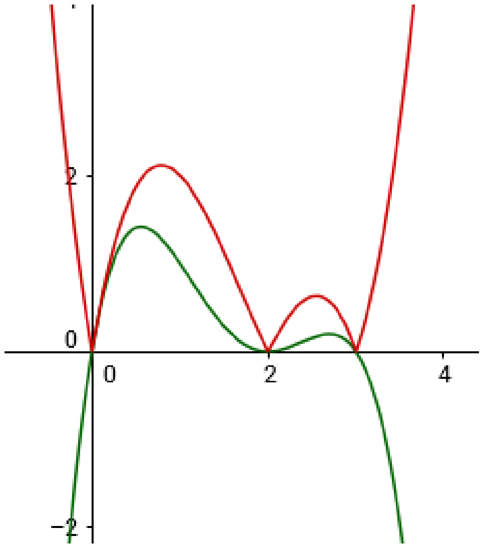
이다.

(ii) $f(x)=bx(x-2)^2(x-3)\ \ (b<0)$일 때, $h(x)=|x(x-2)(x-3)|$라 하면 $h(x)$는 $h(2)=0$ 이고 $x=2$에서 $h(x)$가 미분이 불가능하므로 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$g(x)=f(x)$

이어야 한다.

즉, $f(x)=bx(x-2)^2(x-3)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



이때, $i(x)=x(x-2)(x-3)$이라 하면 $i'(0)=6$, $f'(0)=-12b$ 이므로

$0<-12b\le 6$

에서 $-\dfrac{1}{2}\le b<0$ 이고 $f(1)=-2b$ 이므로

$0<-2b\le 1$

즉, $f(1)$의 최댓값은 1이다.

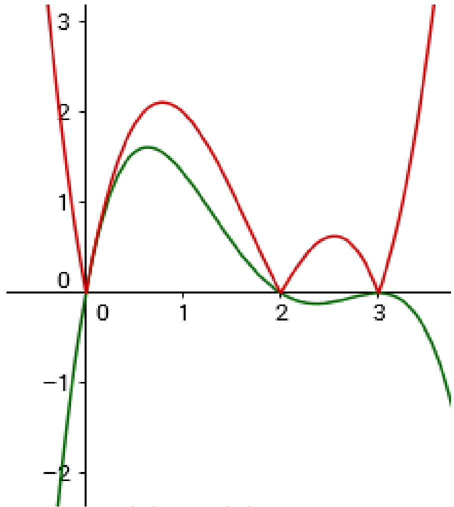
(iii) $f(x)=cx(x-2)(x-3)^2\ \ (c<0)$일 때

$0<x<2$ 에서 두 함수 $y=f(x)$와 $y=h(x)$의 그래프가 교점을 가지면 함수 $g(x)$가 그 점에서 미분이 불가능하게 된다.

즉, $0<x<2$에서 $f(x)\ge h(x)$ 또는 $f(x)\le h(x)$ 이다.

그런데, $f(x)\ge h(x)$ 이면 $g(x)$는 $x=0$에서 미분이 불가능하게 된다.

즉, $f(x)=cx(x-2)(x-3)^2$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



따라서, $f(x)\le h(x)$일 때,

$f'(0)=-18c$, $i'(0)=6$ 이므로

$0<-18c\le 6$

에서 $-\dfrac{1}{3}\le c<0$ 이고 $f(1)=-4c$ 이므로

$0<-4c\le\dfrac{4}{3}$

즉, $f(1)$의 최댓값은 $\dfrac{4}{3}$이다.

(i), (ii)에 의하여 $f(1)$의 최댓값은 $\dfrac{4}{3}$ 이다.

다.

정답 ②

22. **출제의도** : 조합의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

정답 21

23. **출제의도** : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int_0^3(x^2-4x+11)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+11x\right]_0^3$

$=9-18+33$

$=24$

정답 24

24. **출제의도** : 역함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f^{-1}(7)=a$라 하면 $f(a)=7$ 이므로

$f(a)=2a-13=7,\ 2a=20$

따라서 $a=10$ 이다.

정답 10

25. **출제의도** : 구간별로 정의된 함수가 구간의 경계에서 미분가능할 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$

즉, $a+1=1+a$

또한, $f(x)=\begin{cases}ax^2+1 & (x<1)\\ x^4+a & (x\geq1)\end{cases}$에서

미분계수 $f'(1)$가 존재해야 하므로

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{ax^2+1-(a+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{a(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}a(x+1)$

$=2a$

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{x^4+a-(1+a)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\{(x^2+1)(x+1)\}$

$=4$

이므로

$2a=4,\ a=2$

정답 2

26. **출제의도** : 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

흰 공 2개, 빨간 공 4개가 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 경우의 수는

$_2C_2=1$

따라서 구하고자 하는 확률은

$\dfrac{1}{15}$

이므로 $p=15$, $q=1$ 이다.

즉, $p+q=15+1=16$ 이다.

정답 16

27. 출제의도 : 집합의 연산법칙을 이용하여 부분집합의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$X\cup A=X$에서 $A\subset X$

$X\cap B^C=X$에서 $X\subset B^C$

이므로

$A\subset X\subset B^C$

$A=\{1,\ 2\}$이고

$B^C=U-B$

$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}-\{3,\ 4,\ 5\}$

$=\{1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8\}$

따라서 집합 X는 원소 1, 2를 반드시 포함하는 집합 $\{1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3$

$=8$

정답 8

28. 출제의도 : 급수와 정적분의 관계를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}f(\dfrac{k}{n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k}{n}f(\dfrac{k}{n})\dfrac{1}{n}$

$=\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$

$=\displaystyle\int_0^1 x(4x^2+6x+32)dx$

$=\displaystyle\int_0^1 (4x^3+6x^2+32x)dx$

$=[x^4+2x^3+16x^2]_0^1$

$=1+2+16=19$

정답 19

29. 출제의도 : 정적분과 관련된 함수의 최솟값 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0\le a\le 4$에서

$g(a)=\displaystyle\int_a^{a+4} f(x)dx$라 하자

(i)$a=0$일 때,

$g(0)=\displaystyle\int_0^4 f(x)dx$

$=\displaystyle\int_0^4 \{-x(x-4)\}dx$

$=\displaystyle\int_0^4 (-x^2+4x)dx$

$=\left[-\dfrac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4$

$=-\dfrac{64}{3}+32=\dfrac{32}{3}$

(ii) $0<a<4$일 때,

$g(a)=\displaystyle\int_a^4 f(x)dx+\int_4^{a+4} f(x)dx$

$$= \int_a^4 \{-x(x-4)\}dx + \int_4^{a+4}(x-4)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_a^4 + \left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_4^{a+4}$$

$$= \frac{32}{3}+\frac{1}{3}a^3-2a^2$$

$$+\frac{1}{2}(a+4)^2-4(a+4)-(8-16)$$

$$= \frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$$

(iii) $a=4$ 일 때,

$$g(a)=\int_4^8 f(x)dx$$

$$= \int_4^8 (x-4)dx = \left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_4^8$$

$$=32-32-(8-16)$$

$$=8$$

$0<a<4$ 에서

$$g(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$$

이므로

$g'(a)=a^2-3a=a(a-3)$

$g'(a)=0$ 에서

$0<a<4$ 이므로 $a=3$

함수 $g(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	(4)
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$	$\frac{32}{3}$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	8

따라서 $g(a)$는 $a=3$ 에서 최솟값

$$g(3)=\frac{1}{3}\times 3^3-\frac{3}{2}\times 3^2+\frac{32}{3}$$

$$=9-\frac{27}{2}+\frac{32}{3}$$

$$=\frac{54-81+64}{6}$$

$$=\frac{37}{6}$$

을 가지므로

$p=6,\ q=37$

$p+q=43$

정답 43

30\. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

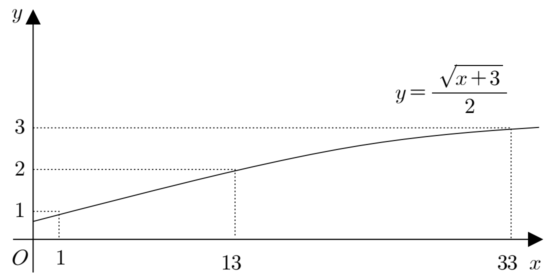
$y=m$(m은 자연수)라 하면

$$\frac{\sqrt{x+3}}{2}=m,\quad \sqrt{x+3}=2m$$

에서

$x=4m^2-3$

이므로 $x \geq 0$에서 곡선 $y=\frac{\sqrt{x+3}}{2}$은 그림과 같다.



(i) $n=1$일 때

주어진 조건을 만족시키는 정사각형은 존재하지 않는다.

$f(1)=0$

(ii) $n=k$($1<k\leq 13$인 자연수)일 때

주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는 $k-1$이므로

$f(13)=12$

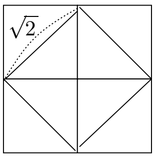
(iii) $n=k$ ($13<k\leq 33$인 자연수)일 때

① 주어진 조건을 만족시키는 한 변의

길이가 1인 정사각형의 개수는

$(k-1)+(k-13)=2k-14$

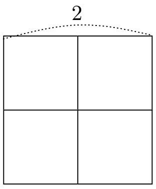
② 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형은 그림과 같다.



따라서 정사각형의 개수는

$k-13$ ($13<k\le 33$인 자연수)

③ 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 2인 정사각형은 그림과 같다.



따라서 정사각형의 개수는

$k-14$ ($13<k\le 33$인 자연수)

이다.

①, ②, ③에 의하여

$f(33)=52+20+19=91$

(iv) $n=k$($33<k\le 61$인 자연수)일 때

① 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는

$(k-1)+(k-13)+(k-33)=3k-47$

② 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형의 개수는

$(k-13)+(k-33)=2k-46$

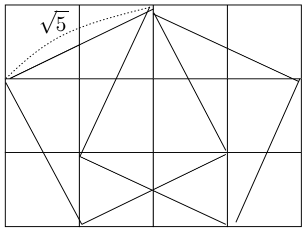
($33<k\le 61$인 자연수)

③ 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는

$(k-14)+(k-34)=2k-48$

($33<k\le 61$인 자연수)

④ 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형은 그림과 같다.



따라서 정사각형의 개수는

$2(k-34)+1=2k-67$

①, ②, ③, ④에 의하여

$f(61)=136+76+74+55=341$

(v) $n=k$($61<k\le 97$인 자연수)일 때

① 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는

$(k-1)+(k-13)+(k-33)+(k-61)$

$=4k-108$

② 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형의 개수는

$(k-13)+(k-33)+(k-61)$

$=3k-107$ ($61<k\le 97$인 자연수)

③ 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는

$(k-14)+(k-34)+(k-62)$

$=3k-110$ ($61<k\le 97$인 자연수)

④ 주어진 조건을 만족시키는 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형의 개수는

$2(k-34)+1+2(k-62)+1=4k-190$

따라서,

$f(64)=148+85+82+66=381$

$f(65)=152+88+85+70=395$

$f(66)=156+91+88+74=409$

이므로 $f(n)\le 400$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은 65이다.

정답 65