2017학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 가형 정답 및 풀이

01. ⑤	02. ②	03. ①	04. ③	05. ①
06. ③	07. ④	08. ②	09. ④	10. ⑤
11. ②	12. ③	13. ③	14. ①	15. ④
16. ⑤	17. ①	18. ②	19. ⑤	20. ④
21. ③	22. 21	23. 25	24. 16	
25. 136	26. 4	27. 22	28. 196	
29. 12	30. 48			

1. **출제의도** : 성분으로 주어진 벡터의 덧셈을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$\vec{a}+\vec{b}=(2,\ -1)+(1,\ 3)$

$\quad=(3,\ 2)$

따라서, 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은

$3+2=5$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 지수방정식을 근을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$3^{x+1}=3^3$에서

$x+1=3$

따라서 $x=2$

정답 ②

3. **출제의도** : 공간좌표에서 선분의 내분점을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 $\mathrm{A}(1, 3, -6)$, $\mathrm{B}(7, 0, 3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\times7+1\times1}{2+1}, \frac{2\times0+1\times3}{2+1}, \frac{2\times3+1\times(-6)}{2+1}\right)$$

즉, $(5, 1, 0)$

따라서,

$a+b=5+1=6$

정답 ①

4. **출제의도** : 두 사건이 배반사건임을 이용하여 확률의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{1}{6}+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$에서

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

정답 ③

5. **출제의도** : 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{7}$에서

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{5}{7}$

한편, $\cos\alpha\cos\beta=\frac{4}{7}$이므로 위의 식에 대입하면

$\frac{4}{7}-\sin\alpha\sin\beta=\frac{5}{7}$

따라서,

$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{7}$

정답 ①

6. **출제의도** : 정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^3 \frac{2}{2x+1}dx = \int_0^3 \frac{(2x+1)'}{2x+1}dx$$
$$= [\ln|2x+1|]_0^3$$
$$= \ln 7 - \ln 1$$
$$= \ln 7 - 0 = \ln 7$$

정답 ③

7. **출제의도** : 삼각방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$2\sin^2 x + 3\cos x = 3$

$2(1-\cos^2 x) + 3\cos x = 3$

$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

$(\cos x - 1)(2\cos x - 1) = 0$

$\cos x = 1$ 또는 $\cos x = \frac{1}{2}$

이때, $0 \le x < 2\pi$이므로

$x = 0$ 또는 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

따라서, 모든 해의 합은 2π이다.

정답 ④

8. **출제의도** : 두 벡터가 서로 수직임을 이용하여 두 벡터의 내적을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 벡터 $6\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직이므로

$(6\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 0$

$6|\vec{a}|^2 - 5\vec{a}\cdot\vec{b} - |\vec{b}|^2 = 0$

따라서 $6\times 1 - 5\vec{a}\cdot\vec{b} - 9 = 0$에서

$\vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{3}{5}$

정답 ②

9. **출제의도** : 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수전체의 집합에서 미분가능하고

$f(2x+1) = (x^2+1)^2$

이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(2x+1)\times 2 = 2(x^2+1)\times 2x$

$x = 1$을 대입하면

$2f'(3) = 2\times 2\times 2$

따라서,

$f'(3) = 4$

정답 ④

10. **출제의도** : 정규분포를 따르는 실생활 상황에서 표준정규분포표를 이용하여 주어진 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

호르몬의 양의 확률변수 X라 하면

X는 정규분포 $\mathrm{N}(30.2, 0.6^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{X-30.2}{0.6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.
따라서
$\mathrm{P}(29.6 \le X \le 31.4)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{29.6-30.2}{0.6} \le \dfrac{X-30.2}{0.6} \le \dfrac{31.4-30.2}{0.6}\right)$
$=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 2)$
$=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
$=0.3413+0.4772$
$=0.8185$

정답 ⑤

11. **출제의도** : 도함수와 미분계수의 정의를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
함수 $f(x)=\log_3 x$가 $x=3$에서 미분가능하므로
$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3+h)-f(3)-f(3-h)+f(3)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h}$
$=f'(3)+f'(3)$
$=2f'(3)$
한편, $f'(x)=\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{\ln 3}$이므로
$2f'(3)=2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{\ln 3}$
$=\dfrac{2}{3\ln 3}$

정답 ②

12. **출제의도** : 조건부확률을 이용하여 주어진 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
ab가 6의 배수인 사건을 E, $a+b=7$인 사건을 F라 하면
구하는 확률은 $\mathrm{P}(F\,|\,E)=\dfrac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}$이다.
$b=3$인 경우 ab가 6의 배수가 되는 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(2,\ 3)$, $(4,\ 3)$, $(6,\ 3)$
이므로 $a,\ b$ 중 하나가 3인 경우의 수는
$3\times2=6$
$b=6$인 경우 ab가 6의 배수가 되는 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(1,\ 6)$, $(2,\ 6)$, $(4,\ 6)$, $(5,\ 6)$, $(6,\ 6)$
이므로 $a,\ b$ 중 적어도 하나가 6인 경우의 수는
$4\times2+1=9$
즉 $\mathrm{P}(E)=\dfrac{6+9}{36}=\dfrac{5}{12}$
이때 $a+b=7$인 경우는
$(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$, $(1,\ 6)$, $(6,\ 1)$
이므로 $\mathrm{P}(E\cap F)=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$
따라서 $\mathrm{P}(F\,|\,E)=\dfrac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}$
$=\dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{12}}=\dfrac{4}{15}$

정답 ③

13. **출제의도** : 정적분을 활용하여 넓이에 관련된 문제를 풀 수 있는가?

정답풀이 :
주어진 영역의 넓이가 직선 $y=a$에 의하여 이등분되므로 색칠된 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x dx = 2\times\frac{\pi}{12}\times a$$

$$\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{12}} = \frac{a}{6}\pi$$

$$\frac{1}{4}=\frac{a}{6}\pi$$

따라서,

$$a=\frac{3}{2\pi}$$

정답 ③

14. **출제의도** : 매개변수로 나타내어진 함수에서 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\frac{dx}{dt}=1+\frac{2}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=2t-\frac{4}{t^3}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-\frac{4}{t^3}}{1+\frac{2}{t^2}}$$

따라서 $t=1$일 때

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$$

정답 ①

15. **출제의도** : 자연수의 분할과 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

7을 4개의 자연수로 분할하면

$$\begin{aligned}7&=4+1+1+1\\&=3+2+1+1\\&=2+2+2+1\end{aligned}$$

각 경우로 나누어 자연수의 개수를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) 각 자리의 수가 $4, 1, 1, 1$인 경우 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{3!1!}=4$$

(ⅱ) 각 자리의 수가 $3, 2, 1, 1$인 경우 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{2!1!1!}=12$$

(ⅲ) 각 자리의 수가 $2, 2, 2, 1$인 경우 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{3!1!}=4$$

따라서, (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 자연수의 개수는

$4+12+4=20$

정답 ④

[다른 풀이]
각 자리의 수를 a, b, c, d라 하자.
구하는 자연수의 개수는 방정식
$a+b+c+d=3$
을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수와 같으므로

$${}_4H_3={}_6C_3=20$$

16. **출제의도** : 벡터로 주어진 조건을 만족시키는 점의 위치를 정하고, 주어진 명제의 참 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PC}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PC}}$

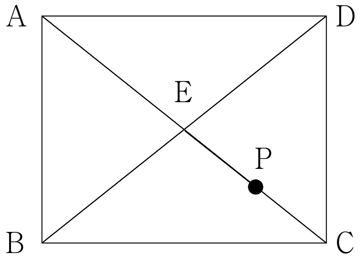
에서 $\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=-2\overrightarrow{\mathrm{PC}}$

ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=-2\overrightarrow{\mathrm{PC}}=2\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ (참)

ㄴ. $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}}{2}=-\overrightarrow{\mathrm{PC}}$

선분 BD의 중점을 E라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{PE}}=-\overrightarrow{\mathrm{PC}}$



그림에서 점 P는 선분 EC의 중점이다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$이다. (참)

ㄷ. 삼각형 ADC의 넓이는 삼각형 ADP의 넓이의 $\dfrac{4}{3}$이므로

삼각형 ADC의 넓이는 $3\times\dfrac{4}{3}=4$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$4\times2=8$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

17. 출제의도 : 이산확률변수의 평균에 관련된 추론문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

자연수 $k(4\le k\le n)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은 1부터 $k-1$가지의 자연수가 적혀 있는 카드 중에서 서로 다른 3장의 카드와 k가 적혀 있는 카드를 선택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나누는 것이므로

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{\boxed{{}_{k-1}\mathrm{C}_3}}{{}_n\mathrm{C}_4}$$

이때, 자연수 $r(1\le r\le k)$에 대하여

$${}_k\mathrm{C}_r=\frac{k}{r}\times{}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

이 성립하므로 $r=4$를 대입하면

$${}_k\mathrm{C}_4=\frac{k}{4}\times{}_{k-1}\mathrm{C}_3$$

$$k\times\boxed{{}_{k-1}\mathrm{C}_3}=4\times\boxed{{}_k\mathrm{C}_4}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{k=4}^{n}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}\\&=\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_4}\sum_{k=4}^{n}\left(k\times\boxed{{}_{k-1}\mathrm{C}_3}\right)\\&=\frac{4}{{}_n\mathrm{C}_4}\sum_{k=4}^{n}\boxed{{}_k\mathrm{C}_4}\end{aligned}$$

이다.

$$\sum_{k=4}^{n}\boxed{{}_k\mathrm{C}_4}={}_{n+1}\mathrm{C}_5$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\frac{4}{{}_n\mathrm{C}_4}\times{}_{n+1}\mathrm{C}_5\\&=4\times\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_5}{{}_n\mathrm{C}_4}\end{aligned}$$

$$=4\times\frac{\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5!}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}}$$

$$=(n+1)\times\boxed{\frac{4}{5}}$$

따라서 $f(k)={}_{k-1}\mathrm{C}_3$, $g(k)={}_k\mathrm{C}_4$, $a=\dfrac{4}{5}$

이므로

$a\times f(6)\times g(5)$

$=\frac{4}{5}\times{}_5C_3\times{}_5C_4$

$=\frac{4}{5}\times{}_5C_2\times{}_5C_1$

$=\frac{4}{5}\times 10\times 5$

$=40$

정답 ①

18. **출제의도** : 평면의 법선벡터를 이용하여 두 점의 위치를 정하고, 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$A(a, b, 0)$로 놓으면

$a^2+b^2=4$ …… ㉠

좌표공간의 원점을 O라 하면

$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}$

$\quad=(a, b, 0)-(0, 0, 4)$

$\quad=(a, b, -4)$

두 벡터 $\overrightarrow{PA}$, $\vec{n}$가 서로 수직이므로

$2a-2b-4=0$

에서 $a-b=2$

㉠에서 $a^2+(a-2)^2=4$

정리하면 $a(a-2)=0$

즉 $A(0, -2, 0)$ 또는 $A(2, 0, 0)$

점 B도 마찬가지이므로

두 점 A, B의 좌표는

$(0, -2, 0)$, $(2, 0, 0)$이다.

따라서

$\overline{AB}=\sqrt{4+4+0}=2\sqrt{2}$

정답 ②

19. **출제의도** : 조합과 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

서로 다른 과일 5개 중 그릇 A에 2개를 담는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

이 각각에 대하여 나머지 3개의 과일을 두 개의 그릇 B, C에 담는 경우의 수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

따라서, 구하는 경우의 수는

$10\times 8=80$

정답 ⑤

20. **출제의도** : 도형의 성질을 이용하여 반지름의 길이를 함수로 나타내고, 주어진 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle EBC=\theta$이므로

$\angle BEC=\angle DEF=\frac{\pi}{2}-\theta$

삼각형 DEF에서 $\angle DFE=\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle EDF=\theta$

한편, $\overline{EC}=\tan\theta$이므로

$\overline{DE}=1-\tan\theta$이고,

선분 DE의 중점을 M이라 하면

$\overline{DM}=\frac{1-\tan\theta}{2}$

직선 DF가 작은 원과 접하는 점을 N이라 하면

직각삼각형 DMN에서

$\overline{MN}=\left(\frac{1-\tan\theta}{2}\right)\times\sin\theta$

$r(\theta)=\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1-\tan\theta}{2}-\left(\frac{1-\tan\theta}{2}\right)\times\sin\theta\right\}$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1-\tan\theta}{2}\right)\times(1-\sin\theta)$$

$$=\frac{(1-\tan\theta)(1-\sin\theta)}{4}$$

한편, $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}$에서

$\frac{\pi}{4}-\theta=t$로 놓으면 $\theta\to\frac{\pi}{4}-$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{1-\frac{1-\tan t}{1+\tan t}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{2\tan t}{t(1+\tan t)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\tan t}{t}\times\lim_{t\to0+}\frac{2}{(1+\tan t)}$$

$=1\times2=2$

따라서

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\frac{(1-\tan\theta)(1-\sin\theta)}{4}}{\frac{\pi}{4}-\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}\times\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\sin\theta}{4}$$

$$=2\times\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{4}$$

$$=\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$$

정답 ④

21. **출제의도** : 부분적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=x^2e^{-x^2}$이고

$f(1)=\frac{1}{e}$이므로 조건 (나)에서

$$g(x)=\frac{4}{e^4}\int_1^x e^{t^2}f(t)dt$$

$$=\frac{2}{e^4}\int_1^x\left(2te^{t^2}\times\frac{f(t)}{t}\right)dt$$

$$=\frac{2}{e^4}\int_1^x\left\{(e^{t^2})'\times\frac{f(t)}{t}\right\}dt$$

$$=\frac{2}{e^4}\left\{\left[e^{t^2}\times\frac{f(t)}{t}\right]_1^x-\int_1^x e^{t^2}\times\left(\frac{f(t)}{t}\right)'dt\right\}$$

$$=\frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\times\frac{f(x)}{x}-ef(1)-\int_1^x e^{t^2}\times(t^2e^{-t^2})dt\right\}$$

$$=\frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\times\frac{f(x)}{x}-1-\int_1^x t^2\,dt\right\}$$

$$=\frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\times\frac{f(x)}{x}-1-\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^x\right\}$$

$$=\frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\times\frac{f(x)}{x}-1-\frac{1}{3}(x^3-1)\right\}$$

$x=2$를 대입하면

$$g(2)=\frac{2}{e^4}\left(e^4\times\frac{f(2)}{2}-1-\frac{7}{3}\right)$$

$$g(2)=f(2)-\frac{20}{3e^4}$$

따라서,

$$f(2)-g(2)=\frac{20}{3e^4}$$

정답 ③

22. **출제의도** : 조합의 기호를 알고, 그 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$${}_7\mathrm{C}_2 = \frac{7\times6}{2\times1} = 21$$

정답 21

23. **출제의도** : 로그함수의 점근선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=\log_2(x+5)$은 곡선 $y=\log_2 x$을 x축이 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

이때, 곡선 $y=\log_2 x$의 점근선은 $x=0$이므로 곡선 $y=\log_2(x+5)$의 점근선은 $x=-5$이다.

따라서, $k=-5$이므로

$k^2=25$

정답 25

24. **출제의도** : 경우의 수를 구하여 확률을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

6개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_2=15$

2개 모두 흰 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_2=1$

따라서 구하는 확률이

$$\frac{1}{15}$$

이므로 $p+q=15+1=16$

정답 16

25. **출제의도** : 포물선의 정의를 이용하여 y좌표를 구하고 두 점사이의 거리를 구할 수 있는가?

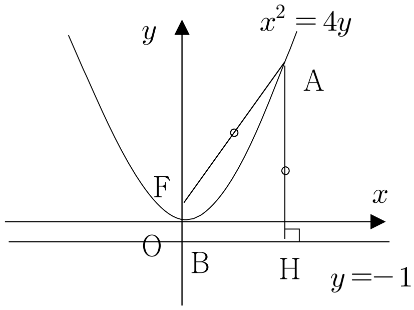
정답풀이 :

포물선 $x^2=4y$의 초점은 $\mathrm{F}(0,1)$이다.

이때, 점 A에서 준선 $y=-1$에 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AH}}$

이다.



이때, $\overline{\mathrm{AF}}=10$이므로 점 A의 y좌표를 k라 하면

$10=k+1$

$k=9$

이때, 점 A의 x좌표는 $x^2=4y$에 대입하면

$x^2=4\times9$

$x=6$ 또는 $x=-6$

이때, 점 $\mathrm{A}(6,9)$ 또는 $\mathrm{A}(-6,9)$이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{6^2+\{9-(-1)\}^2}=\sqrt{136}$$

따라서, $a=\sqrt{136}$이므로

$a^2=136$

정답 136

26. 출제의도 : 역함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$f(g(x))=x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$

$x=4\pi$를 대입하면

$$g'(4\pi)=\frac{1}{f'(g(4\pi))}=\frac{1}{f'(2\pi)}$$

한편, $f'(x)=2+\cos x$에서

$f'(2\pi)=2+1=3$

따라서 $g'(4\pi)=\frac{1}{3}$이므로

$p+q=3+1=4$

정답 4

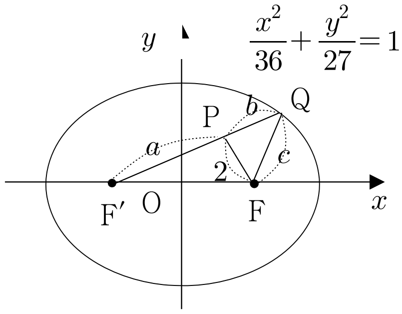
27. 출제의도 : 타원의 정의를 이용하여 삼각형의 둘레의 길이의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$의 두 초점은

$\mathrm{F}(\sqrt{36-27},\,0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{36-27},\,0)$ 즉, $\mathrm{F}(3,0)$, $\mathrm{F}'(-3,\,0)$이다.

이때, 그림과 같이 $\overline{\mathrm{PF}'}=a$, $\overline{\mathrm{PQ}}=b$, $\overline{\mathrm{QF}}=c$라 하자.



이때, 삼각형 PFQ의 둘레의 길이와 삼각형 PF′F의 둘레의 길이의 합은

$(a+2+\overline{\mathrm{FF}'})+(b+c+2)$

$=(a+2+6)+(b+c+2)$

$=a+b+c+10$ ----㉠

한편, 타원의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF}'}=2\times 6$

이므로

$a+b+c=12$

이 값을 ㉠에 대입하면 구하는 둘레의 길이의 합은 22이다.

정답 22

28. 출제의도 : 표본비율을 이용하여 모비율에 대한 신뢰구간을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

n명을 임의추출하여 얻은 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면

$\hat{p}=\frac{1}{2}$

모비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이

$$\frac{1}{2}-1.96\times\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}}\le p$$

$$\le \frac{1}{2}+1.96\times\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}}$$

이므로 $b-a=2\times1.96\times\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}}$

$$=\frac{1.96}{\sqrt{n}}$$

따라서 $\frac{1.96}{\sqrt{n}}=0.14$에서 $\sqrt{n}=14$이므로

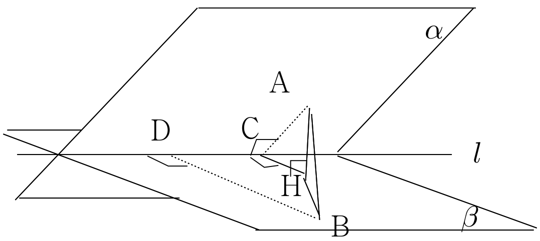
$n=196$

정답 196

29. 출제의도 : 직선과 평면, 평면과 평면이 이루는 각의 크기를 이용하여 사면체의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

아래 그림과 같이 점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 하자.



이때, $\overline{AB}=2$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{AH}=\overline{AB}\sin\frac{\pi}{6}$

$=2\times\frac{1}{2}$

$=1$ -------㉠

또,

$\overline{BH}=\overline{AB}\cos\frac{\pi}{6}$

$=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}$

한편, $\overline{AH}\perp\beta$이고 $\overline{AC}\perp l$이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{HC}\perp l$

이때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\angle ACH=\frac{\pi}{4}$

그러므로 직각삼각형 AHC에서

$\overline{CH}=\overline{AH}=1$

$\overline{AC}=\sqrt{2}$

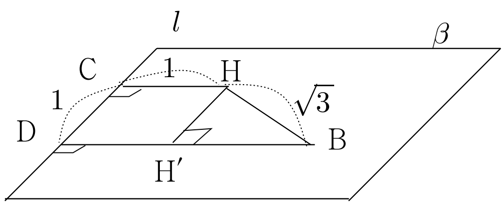
또, 직각삼각형 ACD에서 $\overline{AD}=\sqrt{3}$이므로

$\overline{CD}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AC}^2}$

$=\sqrt{3-2}$

$=1$ -----㉡

한편, 평면 β위의 점 H에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 $\overline{BH}=\sqrt{3}$, $\overline{CH}=1$, $\overline{CD}=1$이므로 다음 그림과 같다.



이때, $\overline{HH'}=1$이므로 직각삼각형 HH′B에서

$\overline{BH'}=\sqrt{\overline{BH}^2-\overline{HH'}^2}$

$=\sqrt{3-1}$

$=\sqrt{2}$

그러므로

$\overline{BD}=\overline{BH'}+\overline{H'D}$

$=\sqrt{2}+1$ ----㉢

따라서, 사면체 ABCD의 부피는 ㉠, ㉡, ㉢에 의해

$\frac{1}{3}\times\overline{AH}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{BD}\right)$

$=\frac{1}{3}\times1\times\left\{\frac{1}{2}\times1\times(1+\sqrt{2})\right\}$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{2}$

이므로

$36(a+b)=36\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=12$

정답 12

30. **출제의도** : 함수의 연속과 함수의 미분가능을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=\begin{cases}|2\sin 3x+1| & (x\geq 0)\\ |-2\sin x+1| & (x<0)\end{cases}$이므로

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, $x=0$과 $g(x)=0$을 만족시키는 x의 값에서 미분가능하지 않다.

또, $\lim_{x\to0+}g'(x)=6$, $\lim_{x\to0-}g'(x)=-2$이다.

(i) 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to0+}h'(x)=\lim_{x\to0-}h'(x)$가 성립해야 한다.

$\lim_{x\to0+}h'(x)=\lim_{x\to0+}f'(g(x))g'(x)$

$=\lim_{x\to0+}f'(g(x))\times\lim_{x\to0+}g'(x)$

$=f'(1)\times6$

$\lim_{x\to0-}h'(x)=\lim_{x\to0-}f'(g(x))g'(x)$

$=\lim_{x\to0-}f'(g(x))\times\lim_{x\to0-}g'(x)$

$=f'(1)\times(-2)$

즉 $6f'(1)=-2f'(1)$에서

$f'(1)=0$ …… ㉠

(ii) $g(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 α라 하자.

함수 $h(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to\alpha+}h'(x)=\lim_{x\to\alpha-}h'(x)$가 성립해야 한다.

$\lim_{x\to\alpha+}h'(x)=\lim_{x\to\alpha+}f'(g(x))g'(x)$

$=\lim_{x\to\alpha+}f'(g(x))\times\lim_{x\to\alpha+}g'(x)$

$=f'(0)\times k$ (단, k는 양의 상수)

$\lim_{x\to\alpha-}h'(x)=\lim_{x\to\alpha-}f'(g(x))g'(x)$

$=\lim_{x\to\alpha-}f'(g(x))\times\lim_{x\to\alpha-}g'(x)$

$=f'(0)\times(-k)$

즉 $kf'(0)=-kf'(0)$에서

$f'(0)=0$ …… ㉡

(iii) 함수 $h'(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to0+}h''(x)=\lim_{x\to0-}h''(x)$가 성립해야 한다.

$\lim_{x\to0+}h''(x)$

$=\lim_{x\to0+}\left[f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)\right]$

$=\lim_{x\to0+}f''(g(x))\{g'(x)\}^2+\lim_{x\to0+}f'(g(x))g''(x)$

$=\lim_{x\to0+}f''(g(x))\times\lim_{x\to0+}\{g'(x)\}^2+0$

$=f''(1)\times6^2$

$$\lim_{x\to 0-} h''(x)$$
$$= \lim_{x\to 0-} [f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + f'(g(x))g''(x)]$$
$$= \lim_{x\to 0-} f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + \lim_{x\to 0-} f'(g(x))g''(x)$$
$$= \lim_{x\to 0-} f''(g(x)) \times \lim_{x\to 0-} \{g'(x)\}^2 + 0$$
$$= f''(1)\times(-2)^2$$

즉 $36f''(1) = 4f''(1)$에서

$f''(1) = 0$ …… ㉢

(i), (ii), (iii)에서

함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이고,

㉠, ㉡에서 $f'(1)=0$, $f'(0)=0$이므로

$f'(x) = 4x(x-1)(x-a)$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

$f'(x) = (4x^2-4x)(x-a)$에서

$f''(x) = (8x-4)(x-a) + (4x^2-4x)$

㉢에서 $f''(1)=0$이므로

$4(1-a)+0=0$에서 $a=1$

따라서 $f'(x) = 4x(x-1)^2$이므로

$f'(3) = 4\times3\times2^2 = 48$

정답 48

[참고]

함수 $h'(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능한지 확인해보자

$$\lim_{x\to \alpha+} h''(x)$$
$$= \lim_{x\to \alpha+} [f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + f'(g(x))g''(x)]$$
$$= \lim_{x\to \alpha+} f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + \lim_{x\to \alpha+} f'(g(x))g''(x)$$
$$= \lim_{x\to \alpha+} f''(g(x)) \times \lim_{x\to \alpha+} \{g'(x)\}^2 + 0$$
$$= f''(0)\times k^2$$

$$\lim_{x\to \alpha-} h''(x)$$
$$= \lim_{x\to \alpha-} [f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + f'(g(x))g''(x)]$$
$$= \lim_{x\to \alpha-} f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + \lim_{x\to \alpha-} f'(g(x))g''(x)$$
$$= \lim_{x\to \alpha-} f''(g(x)) \times \lim_{x\to \alpha-} \{g'(x)\}^2 + 0$$
$$= f''(0)\times(-k)^2$$

즉 $\lim_{x\to \alpha+} h''(x) = \lim_{x\to \alpha-} h''(x)$이므로

함수 $h'(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하다.