2016학년도 7월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

수학 영역

나형 정답

1	②	2	①	3	①	4	④	5	①
6	④	7	④	8	②	9	⑤	10	③
11	③	12	④	13	③	14	⑤	15	①
16	②	17	②	18	⑤	19	③	20	⑤
21	⑤	22	48	23	40	24	21	25	78
26	120	27	63	28	54	29	192	30	137

나형 해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$3\times 27^{\frac{1}{3}}=3\times(3^3)^{\frac{1}{3}}=3\times 3=9$

2. [출제의도] 집합의 연산 이해하기

$A\cap B=\{2,\ 3\}$이므로 모든 원소의 합은 5

3. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$

4. [출제의도] 확률의 덧셈정리 이해하기

두 사건 A와 B는 서로 독립사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{12}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

따라서 $\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{2}$

5. [출제의도] 미분계수 계산하기

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$

$f'(x)=2x+3$이므로 $f'(1)=5$

따라서 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=5$

6. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=3,\ \lim\limits_{x\to 1+}f(x)=1$

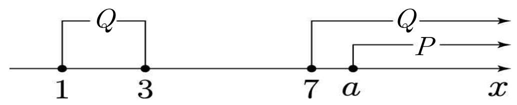
따라서 $\lim\limits_{x\to -1-}f(x)+\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=4$

7. [출제의도] 명제와 조건 이해하기

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,x\geq a\}$

$Q=\{x\,|\,1\leq x\leq 3$ 또는 $x\geq 7\}$



명제 $p\to q$가 참이므로 $P\subset Q$ 에서 $a\geq 7$

따라서 a의 최솟값은 7

8. [출제의도] 정적분 계산하기

$\displaystyle\int_0^1(ax^2+1)dx=\left[\frac{ax^3}{3}+x\right]_0^1=\frac{a}{3}+1=4$

따라서 $a=9$

9. [출제의도] 기댓값의 성질 이해하기

$\mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{3}+4\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{8}{3}$

따라서 $\mathrm{E}(6X+1)=6\mathrm{E}(X)+1=17$

10. [출제의도] 함수의 성질 이해하기

조건 (가)에 의하여 함수 f의 치역은

$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이고

조건 (나)와 $f(1)+f(4)=7$에 의하여

$f(1)=4,\ f(2)=1,\ f(3)=2,\ f(4)=3$

따라서 $f(1)+f^{-1}(1)=4+2=6$

11. [출제의도] 자연수의 분할을 활용하여 문제 해결하기

같은 종류의 접시 3개에 같은 종류의 쿠키 10개를 남김없이 나누어 담는 방법의 수는 10을 3개의 자연수로 분할하는 방법의 수 $P(10,\ 3)$과 같다.

10을 3개의 자연수로 분할하는 방법은

$10=8+1+1=7+2+1=6+3+1=6+2+2$
$=5+4+1=5+3+2=4+4+2=4+3+3$

따라서 구하는 방법의 수는 8

12. [출제의도] 유리함수와 무리함수 이해하기

함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 0]$에서 증가하므로

$A=\{y\,|\,0\leq y\leq 1\}$

$p>0$이므로 함수 $g(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 0]$에서 감소하고 $A=B$이므로 $g(-1)=1,\ g(0)=0$

$\dfrac{p}{-2}+q=1,\ -p+q=0$이므로 $p=2,\ q=2$

따라서 $p+q=4$

13. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

$S_n=-n^2+6n$

$a_6=S_6-S_5$

따라서 $a_6=-5$

14. [출제의도] 여사건의 확률을 활용하여 문제 해결하기

모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $5\times 5=25$이다.

직선 $y=ax+b$가 곡선 $y=f(x)$와 만나지 않는 사건을 E라 하면 사건 E의 여사건 E^C는 직선 $y=ax+b$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 사건이다.

직선 $y=ax+b$와 곡선 $y=f(x)$가 만나기 위해서는 방정식 $-\dfrac{1}{2}x^2+3x=ax+b$가 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+2(a-3)x+2b=0$에서

$\dfrac{D}{4}=(a-3)^2-2b\geq 0$

위 부등식을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (5,\ 1),\ (5,\ 2)$

이므로 직선 $y=ax+b$와 곡선 $y=f(x)$가 서로 만날 확률은 $\dfrac{4}{25}$이므로 $\mathrm{P}(E^C)=\dfrac{4}{25}$

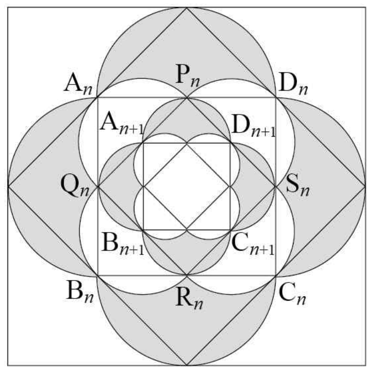
$\mathrm{P}(E)=1-\mathrm{P}(E^C)=1-\dfrac{4}{25}=\dfrac{21}{25}$

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(E)=\dfrac{21}{25}$

15. [출제의도] 등비급수를 활용하여 추론하기

$T_1=$(도형 E_1의 넓이)$-$(도형 F_1의 넓이)
$=(2\pi+4)-(\pi+2)=\pi+2$

그림은 G_{n+1}의 일부이다.



정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하면

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}+\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}+\overline{\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{C}_n}$

$\sqrt{2}\,a_n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{a_n}{2}+\sqrt{2}\,a_{n+1}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{a_n}{2}$

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$

그림 G_{n+1}의 새로 색칠된 부분의 넓이를 b_{n+1}이라 하면

$b_{n+1}=\dfrac{1}{4}b_n,\ b_1=T_1$

그러므로 T_n은 첫째항이 $\pi+2$이고 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\dfrac{\pi+2}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}(\pi+2)$

16. [출제의도] 표준정규분포를 활용하여 문제 해결하기

휴대전화 1대의 무게를 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(153,2^2)$을 따른다.

Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,

$\mathrm{P}(151\leq X\leq 154)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{151-153}{2}\leq\dfrac{X-153}{2}\leq\dfrac{154-153}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 0.5)$

$=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.5)$

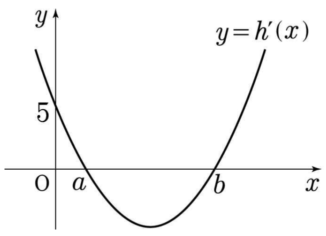
$=0.3413+0.1915=0.5328$

17. [출제의도] 중복조합을 활용하여 추론하기

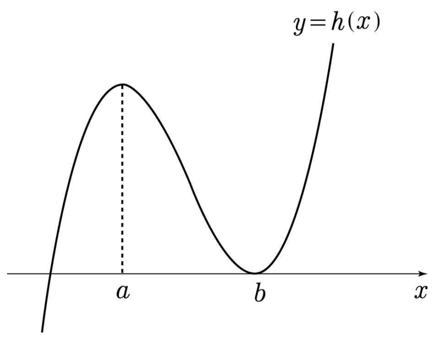
네 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$ 중 홀수가 2개인

경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$
$a,\ b,\ c,\ d$ 중 두 홀수를 $2x+1,\ 2y+1$,
두 짝수를 $2z+2,\ 2w+2$라 하자.
(단, $x,\ y,\ z,\ w$는 음이 아닌 정수)
$(2x+1)+(2y+1)+(2z+2)+(2w+2)=12$
$x+y+z+w=3$
${}_4\mathrm{H}_3 = {}_6\mathrm{C}_3 = 20$
따라서 $6\times 20 = 120$

18. [출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기
함수 $y=h'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다. (참)
ㄴ. $h(b)=0$일 때, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)
ㄷ. 함수 $h(x)$는 닫힌 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고 열린 구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha} = h'(\gamma)$를 만족시키는 γ가 열린 구간 $(\alpha,\ \beta)$에 존재한다.
열린 구간 $(0,\ b)$에 있는 모든 실수 x에 대하여 $h'(x)<5$ 이므로
$\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha} = h'(\gamma) < 5$
$h(\beta)-h(\alpha) < 5(\beta-\alpha)$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. [출제의도] 수학적 귀납법을 활용하여 추론하기

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1$ 이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ⅱ) $n=m$일 때, 등식
$$\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+1-2k)^2 = \frac{m^2(2m^2+1)}{3}$$
이 성립한다고 가정하자. $n=m+1$일 때,
$$\sum_{k=1}^{m+1}(2k-1)(2m+3-2k)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+3-2k)^2+\boxed{2m+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+1-2k)^2$$
$$+\boxed{8}\times\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(m+1-k)+\boxed{2m+1}$$
$$=\frac{(m+1)^2\times\{2(m+1)^2+1\}}{3}$$
이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

$f(m)=2m+1$이고
$(2m+3-2k)^2$
$=(2m+1-2k+2)^2$
$=(2m+1-2k)^2+4(2m+1-2k)+4$
$=(2m+1-2k)^2+8(m+1-k)$
이므로
$$\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+3-2k)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+1-2k)^2$$
$$+8\times\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(m+1-k)$$
에서 $p=8$
따라서 $f(3)+p=7+8=15$

20. [출제의도] 부정적분 이해하기
$f'(x)=xg(x),\ f'(x)-g'(x)=4x^3+2x$ 이므로
$xg(x)-g'(x)=4x^3+2x$
함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 4인 이차함수이므로 $g(x)=4x^2+ax+b$
$g'(x)=8x+a$ 이므로
$x(4x^2+ax+b)-(8x+a)=4x^3+2x$
$4x^3+ax^2+(b-8)x-a=4x^3+2x$ 에서
$a=0,\ b=10$ 이므로 $g(x)=4x^2+10$
따라서 $g(1)=14$

21. [출제의도] 순열과 조합을 활용하여 문제해결하기
1을 네 번 이상 사용하면 반드시 1끼리 서로 이웃하게 되므로 1은 세 번 이하로 사용된다.
(ⅰ) 1이 사용되지 않는 경우
$2^4=16$
(ⅱ) 1이 한 번 사용되는 경우
1로 시작되는 경우의 수는 $2^4=16$
2로 시작되는 경우의 수는 $4\times 2^3=32$
(ⅲ) 1이 두 번 사용되는 경우
1로 시작되는 경우의 수는 $3\times 2^3=24$
2로 시작되는 경우의 수는 $3\times 2^2=12$
(ⅳ) 1이 세 번 사용되는 경우
첫 번째, 세 번째, 다섯 번째에는 반드시 1이 사용되므로 $2^2=4$
따라서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 104

22. [출제의도] 등비수열의 일반항 이해하기
등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$a_2=ar=3,\ a_6=ar^5=12$ 이므로 $r^4=4$
따라서 $a_{10}=ar^9=ar\times(r^4)^2=3\times16=48$

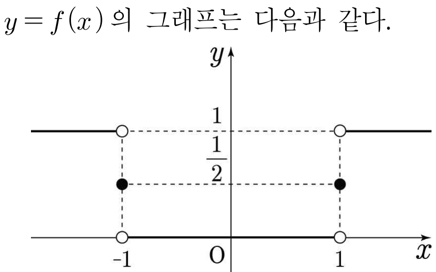
23. [출제의도] 이항정리 이해하기
$(x^2+2)^5=\sum_{r=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_r(x^2)^{5-r}2^r=\sum_{r=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_r2^rx^{10-2r}$
에서 $10-2r=6,\ r=2$
따라서 x^6의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_2\times2^2=40$

24. [출제의도] 로그의 성질 이해하기
$\log_c a : \log_c b = 2:3$이므로
$\log_c a = 2k,\ \log_c b = 3k$라 하자.
(단, k는 0이 아닌 실수)
$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} = \dfrac{3k}{2k} = \dfrac{3}{2}$
따라서 $10\log_a b + 9\log_b a = 10\times\dfrac{3}{2}+9\times\dfrac{2}{3}=21$

25. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제해결하기
동호회 회원 중 임의로 한 명을 선택했을 때 이 회원이 남성일 사건을 E, A회사에서 출시한 배드민턴 라켓을 구매한 회원일 사건을 F라 하면
$$\mathrm{P}(F|E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{39}{70}}{\frac{45}{70}}=\frac{13}{15}$$
따라서 $p=\dfrac{13}{15}$이므로 $90p=78$

26. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 일반항은
$a_n=3+(n-1)d$
$a_{5n}-a_n=4dn$ 이므로
$\sum_{n=1}^{10}4dn=4d\times\dfrac{10\times11}{2}=220d=440$
$d=2$ 이므로 $a_n=2n+1$
따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(2n+1)=120$

27. [출제의도] 함수의 연속성을 활용하여 문제해결하기
함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=-1,\ 1$에서 불연속이다.
함수 $g(x)=x^2+ax+b$라 하면
함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$과 $x=-1$에서 연속이다.
$x=1$에서 연속이므로

$f(1)g(1)=\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)$

$\frac{1}{2}(1+a+b)=1(1+a+b)=0$에서

$a+b=-1$ ...... ㉠

$x=-1$에서 연속이므로

$f(-1)g(-1)=\lim_{x\to -1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to -1-}f(x)g(x)$

$\frac{1}{2}(1-a+b)=0=1(1-a+b)$에서

$a-b=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=0$, $b=-1$이므로

$g(x)=x^2-1$

따라서 $g(8)=63$

28. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$f(1)=g(1)$이고 $f(-1)=f(1)=1$이므로

$f(-1)=g(-1)=1$

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표는 -1, 1이고

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$

$=\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx=27$이므로

$-1\le x\le 1$에서 $f(x)\ge g(x)$이다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 y축 대칭이므로 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프는 y축 대칭이다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$

$=2\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx=54$

따라서 구하는 넓이는 54

29. [출제의도] 수열의 극한을 활용하여 문제해결하기

원 O_n이 직선 AB와 점 P_n에서 접하므로

직선 AB와 직선 O_nQ_n은 서로 수직이다.

직선 l과 직선 BC가 평행이므로

$\angle Q_nAB=\angle ABC=60^\circ$

두 직각삼각형 AP_nQ_n과 AP_nO_n은 합동이므로

$\overline{Q_nO_n}=2\overline{P_nO_n}=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

직각삼각형 AP_nO_n에서

$\frac{\overline{O_nP_n}}{\overline{AP_n}}=\sqrt{3}$이므로 $\overline{AP_n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\overline{BP_n}=\overline{AB}-\overline{AP_n}=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$S_n=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\left\{4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$k=\lim_{n\to\infty}2^nS_n=\lim_{n\to\infty}2\sqrt{3}\left\{4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=8\sqrt{3}$

따라서 $k^2=192$

30. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x+1)-1 & (-1\le x<0) \\ f(x) & (0\le x<1) \\ f(x-1)+1 & (1\le x<2) \\ \quad\vdots & \\ f(x-4)+4 & (4\le x<5)\end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$g(1)=\lim_{x\to 1-}g(x)$이다.

$g(1)=f(0)+1$이고

$\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)=1$이므로

$f(0)+1=1$에서 $f(0)=0$ ...... ㉠

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$이다.

$\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x-1)+1-g(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$이고

$\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$

이므로 $f'(0)=1$ ...... ㉡

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 하자.

㉠, ㉡에 의하여 $c=1$, $d=0$

조건 (나)에 의하여

$f(1)=1+a+b+1=1$ ...... ㉢

$f'(1)=4+3a+2b+1=1$ ...... ㉣

㉢, ㉣에 의하여 $a=-2$, $b=1$

$f(x)=x^4-2x^3+x^2+x$

$\int_0^4 g(x)dx=\int_0^1 g(x)dx+\int_1^2 g(x)dx$

$\quad+\int_2^3 g(x)dx+\int_3^4 g(x)dx$

$=\frac{8}{15}+\left(\frac{8}{15}+1\right)+\left(\frac{8}{15}+2\right)+\left(\frac{8}{15}+3\right)=\frac{122}{15}$

그러므로 $p=15$, $q=122$

따라서 $p+q=137$