2016학년도 7월 고3 전국연합학력평가

정답 및 해설

수학 영역

가형 정답

1	①	2	③	3	④	4	④	5	②
6	③	7	⑤	8	③	9	③	10	④
11	②	12	②	13	②	14	④	15	①
16	⑤	17	①	18	⑤	19	①	20	⑤
21	①	22	40	23	48	24	6	25	56
26	18	27	12	28	14	29	60	30	25

가형 해설

1. [출제의도] 순열의 수와 조합의 수 계산하기

$_5\mathrm{P}_2 + {}_5\mathrm{C}_3 = 5\times4+\dfrac{5!}{3!\times2!} = 20+10 = 30$

2. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 극한값 계산하기

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{\ln(1+x)}{x}\times\dfrac{x}{e^x-1}\right\} = 1$

3. [출제의도] 벡터의 크기 계산하기

$\vec{a}+\vec{b} = (2,\ 3)$ 이므로 $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

4. [출제의도] 삼각함수의 정적분 계산하기

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)d\theta = \left[\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \sin\dfrac{\pi}{2} - \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

5. [출제의도] 사건의 독립 이해하기

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cap B^C) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A\cap B)$ 이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\mathrm{P}(B)$

따라서 $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{4}$

6. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계 이해하기

$(\sin\theta-\cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= 1 - 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{3}{4}$

이므로 $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{8}$

따라서 $\tan\theta + \cot\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta} = 8$

7. [출제의도] 여사건의 확률 이해하기

주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 $_7\mathrm{C}_2$, 주머니에서 2개의 검은 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 $_4\mathrm{C}_2$

흰 공을 적어도 1개 이상 꺼내는 사건을 A라 하면, 모두 검은 공을 꺼내는 사건은 A^C이다.

따라서 $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^C) = 1 - \dfrac{_4\mathrm{C}_2}{_7\mathrm{C}_2} = \dfrac{5}{7}$

8. [출제의도] 함수의 연속과 부정적분의 성질을 활용하여 문제해결하기

$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & (x \le -1) \\ x^3 + x + C_2 & (x > -1) \end{cases}$

(C_1, C_2는 적분상수)에서

$f(-2) = \dfrac{1}{2} + C_1 = \dfrac{1}{2}$ 이므로 $C_1 = 0$

$\lim\limits_{x\to-1-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-1+} f(x) = -2 + C_2$ 이고,

함수 $f(x)$는 $x = -1$에서 연속이므로

$1 = -2 + C_2$에서 $C_2 = 3$

따라서 $f(0) = 3$

9. [출제의도] 두 평면벡터의 내적 이해하기

$|2\vec{a}+\vec{b}|^2 = (2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$

$= 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$

$= 4|\vec{a}|^2 + 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta + |\vec{b}|^2$

$= 13 + 12\cos\theta = 16$

따라서 $\cos\theta = \dfrac{1}{4}$

10. [출제의도] 타원의 정의를 활용하여 문제해결하기

타원의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\ (c>0)$이라 하면 $25 - 9 = c^2$ 이므로 $c = 4$

$\overline{\mathrm{PF}} = m$, $\overline{\mathrm{PF}'} = n$이라 하면 타원의 정의에 의하여 $m + n = 10$

삼각형 FPF'는 직각삼각형이므로 $m^2 + n^2 = 8^2$

$m^2 + n^2 = (m+n)^2 - 2mn$

$8^2 = 10^2 - 2mn$

$mn = 18$

따라서 삼각형 FPF'의 넓이는 $\dfrac{1}{2}mn = 9$

11. [출제의도] 매개변수로 나타낸 함수의 미분 이해하기

점 $\mathrm{P}\left(2t+1,\ t+\dfrac{3}{t}\right)$이 그리는 곡선 위의 한 점에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{3}{t^2}\right)$

곡선 위의 한 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{3}{t^2}\right) = -1$

$t = 1\ (t > 0)$

따라서 $a = 3$, $b = 4$에서 $a + b = 7$

12. [출제의도] 표준정규분포를 활용하여 문제해결하기

휴대전화 1대의 무게를 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(153,\ 2^2)$을 따른다.

Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,

$\mathrm{P}(151 \le X \le 154)$

$= \mathrm{P}\left(\dfrac{151-153}{2} \le \dfrac{X-153}{2} \le \dfrac{154-153}{2}\right)$

$= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 0.5)$

$= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)$

$= 0.3413 + 0.1915 = 0.5328$

13. [출제의도] 좌표평면에서 직선의 방향벡터 이해하기

$\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{1}{2},\ -4\right)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -\dfrac{3}{2}(1,\ 3)$

$\vec{u}$와 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$는 평행하므로 $\vec{u} = k(1,\ 3)$ (k는 실수)

$|\vec{u}| = \sqrt{10}$ 이므로 $10k^2 = 10$, $k = \pm1$

그러므로 $a = 1$, $b = 3$ 또는 $a = -1$, $b = -3$

따라서 $|a - b| = 2$

14. [출제의도] 여러 가지 함수의 정적분 계산하기

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(1+\dfrac{2k}{n}\right)$

$= \displaystyle\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 \frac{1}{x^2+x}dx$

$= \displaystyle\int_1^3\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^3 = \ln\frac{3}{2}$

15. [출제의도] 지수함수를 활용하여 문제해결하기

y축과 평행한 한 직선을 $x = k$ (k는 실수)라 하고, 직선 $x = k$와 x축이 만나는 점을 C라 하자.

삼각형 AOB는 $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}}$ 인 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$

$2^k = 4^{k-2}$

$2^k = 2^{2k-4}$

$k = 2k - 4$, $k = 4$

$\overline{\mathrm{OC}} = 4$, $\overline{\mathrm{AB}} = 32$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OC}} = 64$

16. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x) = \sin x - x\cos x$라 하면

$f'(x) = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x$

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	+	0	−	0
$f(x)$	0	↗	π	↘	-2π

방정식 $f(x) = k$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 $0 \le k < \pi$

따라서 정수 k는 0, 1, 2, 3이므로 합은 6

17. [출제의도] 역함수의 미분법 추론하기

$g\left(3f(x)-\dfrac{2}{e^x+e^{2x}}\right)=x$ 에서

$3f(x)-\dfrac{2}{e^x+e^{2x}}=g^{-1}(x)$ 이므로

$$f(x)=\frac{1}{\boxed{e^x+e^{2x}}}$$

이다.

$f(x)$ 의 도함수를 구하면

$$f'(x)=\frac{-e^x-2e^{2x}}{\left(\boxed{e^x+e^{2x}}\right)^2}$$

이다. $f(0)=\dfrac{1}{2}$ 이므로 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ 이다.

그러므로

$$g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)}=\frac{1}{f'(0)}=\boxed{-\frac{4}{3}}$$

이다.

$h(x)=e^x+e^{2x}$, $p=-\dfrac{4}{3}$

따라서 $\left(-\dfrac{4}{3}\right)\times h(\ln 2)=-8$

18. [출제의도] 중복조합 이해하기

(ⅰ) a, b, c가 모두 짝수인 경우

${}_7H_3={}_9C_3=84$

(ⅱ) a, b, c 중 1개만 짝수인 경우

짝수 1개를 선택하는 경우의 수는 7

홀수 8개 중 중복을 허락하여 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_8H_2$

선택한 세 수를 크기순으로 나열하는 경우의 수는 1이므로 $7\times{}_8H_2\times 1=252$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는 336

19. [출제의도] 두 평면벡터의 내적 이해하기

조건 (가)에서 $|\overrightarrow{AH}|=2k$, $|\overrightarrow{HB}|=3k\ (k>0)$라 하면 $|\overrightarrow{AB}|=5k$

조건 (나)에서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AH}|\times|\overrightarrow{AB}|=40$

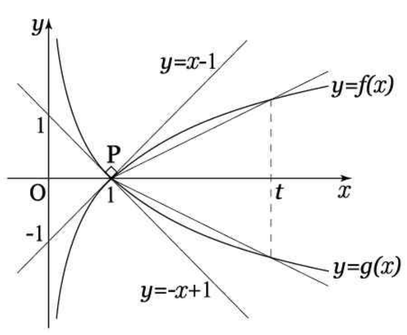
$2k\times 5k=40$ 이므로 $k=2$ 이고 $|\overrightarrow{AB}|=10$

조건 (다)에서 삼각형 ABC의 넓이는 30이므로

$\dfrac{1}{2}\times|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{CH}|=30$ 에서 $|\overrightarrow{CH}|=6$

$\angle AHC=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CH}=|\overrightarrow{CH}|^2=36$

20. [출제의도] 로그함수의 그래프의 성질 추론하기



ㄱ. $\ln x=\ln\dfrac{1}{x}$ 에서 $x=1$

점 P의 좌표는 (1, 0) (참)

ㄴ. $f'(1)=1$, $g'(1)=-1$이므로

$f'(1)\times g'(1)=1\times(-1)=-1$

그러므로 두 곡선 위의 점 P에서의 각각의 접선은 서로 수직이다. (참)

ㄷ. $t>1$에서 함수 $f(t)$는 증가하고,

$f'(t)=\dfrac{1}{t}$ 이고 $f'(1)=1$이므로

$t>1$인 t에 대하여 $0<\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}<1$

$t>1$에서 함수 $g(t)$는 감소하고,

$g'(t)=-\dfrac{1}{t}$ 이고 $g'(1)=-1$이므로

$t>1$인 t에 대하여 $-1<\dfrac{g(t)-g(1)}{t-1}<0$

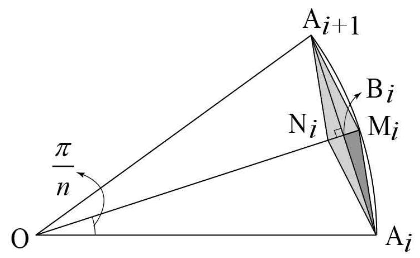
그러므로

$-1<\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}\times\dfrac{g(t)-g(1)}{t-1}<0$

$-1<\dfrac{f(t)g(t)}{(t-1)^2}<0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 삼각함수의 극한값 추론하기



선분 M_iN_i의 중점을 B_i라 하면

$\angle A_iOM_i=\dfrac{\pi}{n}$ 이므로

$\overline{A_iB_i}=\sin\dfrac{\pi}{n}$, $\overline{B_iM_i}=1-\overline{OB_i}=1-\cos\dfrac{\pi}{n}$

$$\square A_iM_iA_{i+1}N_i=4\times\triangle A_iM_iB_i=4\times\frac{1}{2}\times\sin\frac{\pi}{n}\times\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$S_n=n\times\square A_iM_iA_{i+1}N_i=2n\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\begin{aligned}n^2\times S_n&=2n^3\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\\&=2\pi^3\times\frac{\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos^2\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi^3}{n^3}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)}\\&=2\pi^3\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\times\frac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}\times\frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{n}}\right\}\end{aligned}$$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^2\times S_n)=\pi^3$

22. [출제의도] 이항정리 이해하기

$$(x^2+2)^5=\sum_{r=0}^{5}{}_5C_r(x^2)^{5-r}2^r=\sum_{r=0}^{5}{}_5C_r2^rx^{10-2r}$$

에서 $10-2r=6$, $r=2$

따라서 x^6 의 계수는 ${}_5C_2\times 2^2=40$

23. [출제의도] 여러 가지 함수의 미분 이해하기

$f'(x)=12\sec^2 2x$

따라서 $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=12\sec^2\dfrac{\pi}{3}=12\times 4=48$

24. [출제의도] 집합의 분할 이해하기

$S(4,\ 3)$은 원소의 개수가 4인 집합을 집합의 원소가 각각 2개, 1개, 1개인 부분집합으로 분할하는 방법의 수와 같다.

${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\dfrac{1}{2!}=6$

25. [출제의도] 곡선의 길이 이해하기

$y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ 이므로

$$l=\int_0^{12}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^{12}\sqrt{1+\frac{x}{4}}\,dx$$

$\sqrt{1+\dfrac{x}{4}}=t$라 놓으면

$1+\dfrac{x}{4}=t^2$, $\dfrac{1}{4}\dfrac{dx}{dt}=2t$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=12$일 때 $t=2$이므로

$$l=\int_1^2 8t^2\,dt=\left[\frac{8}{3}t^3\right]_1^2=\frac{64}{3}-\frac{8}{3}=\frac{56}{3}$$

따라서 $3l=56$

26. [출제의도] 확률의 곱셈정리를 활용하여 문제해결하기

A가 꺼낸 사탕이 딸기 맛 사탕일 사건을 E,

B가 꺼낸 사탕이 포도 맛 사탕일 사건을 F라 하면

$\mathrm{P}(E)=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$, $\mathrm{P}(F|E)=\dfrac{9}{14}$

그러므로

$$p=\mathrm{P}(E\cap F)=\mathrm{P}(E)\mathrm{P}(F|E)=\frac{2}{5}\times\frac{9}{14}=\frac{9}{35}$$

따라서 $70p=18$

27. [출제의도] 입체도형의 부피 이해하기

선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면 $S(x)=xe^x$

구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^{\ln 6}xe^x\,dx=\left[xe^x\right]_1^{\ln 6}-\int_1^{\ln 6}e^x\,dx=\left[xe^x-e^x\right]_1^{\ln 6}=-6+6\ln 6$$

$a=6$, $b=6$

따라서 $a+b=12$

28. [출제의도] 포물선의 성질 이해하기

포물선의 초점을 $\mathrm{F}(p,\ 0)$, 점 $\mathrm{A}(\alpha,\ m(\alpha-4))$ $(\alpha>0)$라 하면, 점 $\mathrm{B}(-p,\ 0)$,

점 $\mathrm{C}(0,\ -4m)$ 이다.

삼각형 ABC의 무게중심이 점 F이므로

$\left(\dfrac{\alpha-p}{3},\ \dfrac{m\alpha-4m-4m}{3}\right)$에서

$\dfrac{\alpha-p}{3}=p$, $\dfrac{m\alpha-4m-4m}{3}=0$

$\alpha=4p$, $(\alpha-8)m=0$

$m>0$이므로 $\alpha=8$, $p=2$

점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 A′라 하면, 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{AA'}=10$

따라서 $\overline{AF}+\overline{BF}=14$

29. [출제의도] 정사영을 활용하여 문제해결하기

구 S의 중심을 O라 하면 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 APQ의 무게중심은 점 O와 같다. 점 P에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을

O′라 하면 점 O′는 선분 AQ의 중점이고

$\angle \mathrm{ABQ} = \frac{\pi}{2}$ 이므로 점 B는 점 O′를 중심으로 하고 반지름이 선분 AO′인 원 위의 점이다.

삼각형 BO′O 에서

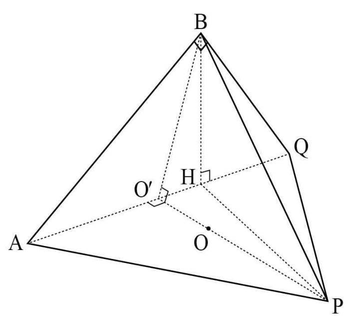
$\overline{\mathrm{O'B}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{OB}} = 2$, $\overline{\mathrm{OO'}} = 1$ 이므로

$\angle \mathrm{BO'O} = \frac{\pi}{2}$

그러므로 $\overline{\mathrm{OO'}} \perp \overline{\mathrm{O'B}}$, $\overline{\mathrm{PO'}} \perp \overline{\mathrm{O'B}}$

$\overline{\mathrm{AO'}} \perp \overline{\mathrm{PO'}}$, $\overline{\mathrm{PO'}} \perp \overline{\mathrm{O'B}}$ 이므로 직선 PO′는 평면 ABQ와 수직이고, 평면 ABQ와 평면 APQ는 수직이다.

그러므로 점 B에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 APB의 평면 APQ 위로의 정사영은 삼각형 APH이다.



삼각형 BO′P는 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{O'B}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{O'P}} = 3$ 이므로 $\overline{\mathrm{PB}} = 2\sqrt{3}$

삼각형 APB는 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}} = 2\sqrt{3}$ 인 이등변삼각형이고, $\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 APB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{5}$

삼각형 ABQ와 삼각형 AHB는 닮음이므로

$\overline{\mathrm{AH}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

그러므로 삼각형 APH의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times 3 = 2\sqrt{3}$

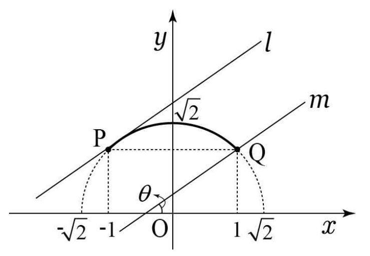
$\cos\theta = \frac{(\text{삼각형 APH의 넓이})}{(\text{삼각형 APB의 넓이})} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

따라서 $100\cos^2\theta = 100 \times \frac{3}{5} = 60$

30. [출제의도] 삼각함수의 정적분을 활용하여 문제해결하기

곡선 $y = \sqrt{2 - x^2}\,(-1 \le x \le 1)$ 위의 양 끝점 $(-1,\ 1)$, $(1,\ 1)$을 각각 P, Q라 하고, 직선 l의 y절편이 직선 m의 y절편보다 크다고 하자. 점 P를 지나고 곡선 $y = \sqrt{2 - x^2}$ 에 접하는 접선이 x축과 양의 방향으로 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

(i) $0 \le \theta < \frac{\pi}{4}$ 일 때



$f(\theta)$는 직선 l이 곡선과 접하고, 직선 m이 점 Q를 지날 때 점 Q와 직선 l 사이의 거리이다.

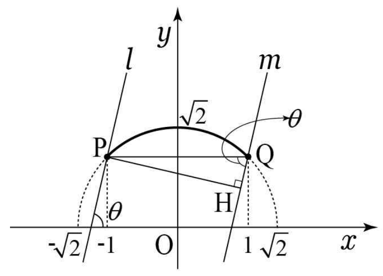
곡선은 중심이 $(0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원의 일부이므로 곡선과 접하는 직선 l의 방정식은

$y = \tan\theta\, x + \sqrt{2}\sec\theta$ 이므로

$$f(\theta) = \frac{|\tan\theta - 1 + \sqrt{2}\sec\theta|}{\sqrt{\tan^2\theta + 1}}$$

$$= \sin\theta - \cos\theta + \sqrt{2}\ (\sin\theta - \cos\theta \ge -1)$$

(ii) $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 일 때



$f(\theta)$는 직선 l이 점 P를 지나고 직선 m이 점 Q를 지날 때 점 P와 직선 m 사이의 거리와 같다. 즉, 점 P에서 직선 m에 내린 수선의 발을 H라 하면 $f(\theta)$는 선분 PH의 길이와 같다.

$\angle \mathrm{PQH} = \theta$ 이므로

$f(\theta) = 2\sin\theta$

(i), (ii)에 의하여

$$f(\theta) = \begin{cases} \sin\theta - \cos\theta + \sqrt{2} & \left(0 \le \theta < \frac{\pi}{4}\right) \\ 2\sin\theta & \left(\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

함수 $f(\theta)$는 닫힌 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 연속이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin\theta - \cos\theta + \sqrt{2})\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\, d\theta$$

$$= \left[-\cos\theta - \sin\theta + \sqrt{2}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-2\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

$a = 1$, $b = \frac{1}{4}$

따라서 $20(a + b) = 25$