수학영역 나형 정답 및 풀이

01. ③	02. ④	03. ③	04. ④	05. ⑤
06. ④	07. ①	08. ⑤	09. ①	10. ①
11. ②	12. ③	13. ④	14. ③	15. ①
16. ②	17. ⑤	18. ②	19. ②	20. ⑤
21. ⑤	22. 24	23. 25	24. 60	25. 96
26. 10	27. 30	28. 12	29. 186	
30. 78				

1. **출제의도** : 지수의 정의와 지수법칙을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$2^0 \times 9^{\frac{1}{2}}$

$= 1 \times (3^2)^{\frac{1}{2}}$

$= 3$

정답 ③

2. **출제의도** : 집합의 원소의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$이므로

$n(A \cup B) = 7$

정답 ④

3. **출제의도** : 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2 - n}{2n^2 + 3}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{7 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n^2}}$

$= \frac{7-0}{2+0}$

$= \frac{7}{2}$

정답 ③

4. **출제의도** : 역함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f^{-1}(5) = k$로 놓으면

$f(k) = 5$

따라서 $2k - 3 = 5$에서 $k = 4$

정답 ④

5. **출제의도** : 함숫값과 합성함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(2) = 4,\ f(3) = 1,\ f(1) = 3$이므로

$f(2) + (f \circ f)(3)$

$= 4 + f(f(3))$

$= 4 + f(1)$

$= 4 + 3$

$= 7$

정답 ⑤

6. **출제의도** : 이항정리를 이용하여 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(x+\frac{1}{3x}\right)^6$의 일반항은

$${}_6\mathrm{C}_r\, x^{6-r}\left(\frac{1}{3x}\right)^r = {}_6\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{3}\right)^r x^{6-2r}$$

$(r=0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6)$

$6-2r=2$에서 $r=2$이므로

x^2의 계수는

$${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 15\times\frac{1}{9} = \frac{5}{3}$$

정답 ④

7. **출제의도** : 집합의 연산법칙을 이용하여 집합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} B^c - A^c &= B^c\cap\left(A^c\right)^c \\ &= B^c\cap A \\ &= A\cap B^c \\ &= A-B \\ &= \{1,2,3,6\}-\{1,3,5,7,9\} \\ &= \{2,\,6\} \end{aligned}$$

따라서 집합 B^c-A^c의 모든 원소의 합은 8이다.

정답 ①

8. **출제의도** : 수열의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{3^n}\right)\left(a+\frac{1}{2^n}\right)=2a$$

따라서 $2a=10$에서 $a=5$

정답 ⑤

9. **출제의도** : 함수의 연속의 정의와 성질을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 $x\neq1$일 때, 다항함수이므로 $x\neq1$일 때 연속이다.

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때,

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}(4x^2-a)=4-a$ --㉠

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(x^3+a)=1+a$ --㉡

$f(1)=1+a$ --㉢

위의 ㉠, ㉡, ㉢의 값이 같아야 하므로

$4-a=1+a$

$a=\frac{3}{2}$

정답 ①

10. **출제의도** : 함수의 그래프를 이용하여 우극한과 좌극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=-1,\ \lim\limits_{x\to1+}f(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=-1+2=1$$

정답 ①

11. **출제의도** : 자연수의 분할의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

자연수 6을 짝수 개의 자연수로 분할하면

$6=5+1$

$=4+2$

$=3+3$

$=3+1+1+1$

$=2+2+1+1$

$=1+1+1+1+1+1$

그러므로 자연수 6을 짝수 개의 자연수로 분할 하는 경우의 수는

$P(6,2)+P(6,4)+P(6,6)$

$=3+2+1$

$=6$

정답 ②

12. **출제의도** : 등차수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_8-a_2=6d=12$에서 $d=2$

$a_1+a_2+a_3=3a_2=3(a+d)=15$에서

$a+d=5$이므로 $a=3$

따라서 $a_{10}=a+9d=3+9\times2=21$

정답 ③

13. **출제의도** : 조건이 참인 명제가 되는 것을 진리집합으로 이해할 수 있는가?

정답풀이 :

자연수 a에 대한 조건이 참인 명제이기 위해서는

$\{x|x>0\}\subset\{x|x-a+4>0\}$

즉,

$\{x|x>0\}\subset\{x|x>a-4\}$

이어야 한다.

그러므로

$a-4\le0$, $a\le4$

그러므로 자연수 a의 값은 $1, 2, 3, 4$이고, 그 개수는 4이다.

정답 ④

14. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) $w=1$인 경우

$x+y+z=9$

$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$로 놓으면

$x'+y'+z'=6$

구하는 순서쌍의 개수는

$x'+y'+z'=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 모든 순서쌍 (x', y', z')의 개수와 같으므로

${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

(ⅱ) $w=2$인 경우

$x+y+z=4$

$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$로 놓으면

$x'+y'+z'=1$

구하는 순서쌍의 개수는

$x'+y'+z'=1$을 만족시키는 음이 아

닌 정수 x', y', z'의 모든 순서쌍 (x', y', z')의 개수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_1 = {}_3\mathrm{C}_1 = 3$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$28+3=31$

정답 ③

15. **출제의도** : 무리함수의 그래프를 평행이동할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=a\sqrt{x}+4$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$$y-n=a\sqrt{x-m}+4$$

$$y=a\sqrt{x-m}+n+4$$

이 함수의 그래프와 함수 $y=\sqrt{9x-18}$ 즉, $y=3\sqrt{x-2}$의 그래프가 일치하므로

$a=3,\ m=2,\ n+4=0$

$a=3,\ m=2,\ n=-4$

따라서

$a+m+n=3+2+(-4)=1$

정답 ①

16. **출제의도** : 조건의 진리집합을 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x \mid x<-4$ 또는 $x>4\}$

$Q=\{x \mid -3 \le x \le 3\}$

$R=\{x \mid x \le 3\}\}$

ㄱ. $Q \subset R$이므로 명제 $q \rightarrow r$는 참이다.

ㄴ. $Q^C=\{x \mid x<-3$ 또는 $x>3\}$

이므로 $P \subset Q^C$

즉 명제 $p \rightarrow \sim q$는 참이다.

ㄷ. $P^C=\{x \mid -4 \le x \le 4\}\}$

이므로 $R \not\subset P^C$

즉 명제 $r \rightarrow \sim p$는 거짓이다.

이상에서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다.

정답 ②

17. **출제의도** : 도형의 넓이를 등비급수를 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

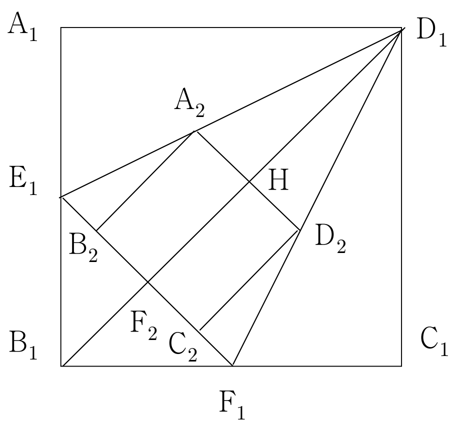
정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$$S_1 = \triangle \mathrm{A_1E_1D_1} + \triangle \mathrm{D_1F_1C_1} + \triangle \mathrm{E_1B_1F_1}$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times1\times1$$

$$=\frac{5}{2}$$

한편, 그림 R_2에서 직사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 한 변의 길이를 x라 하고 선분 $\mathrm{B_1D_1}$이 선분 $\mathrm{A_2D_2}$와 만나는 점을 H라 하자.



이때, 직각삼각형 $\mathrm{B_1F_1F_2}$에서

$\angle F_2B_1F_1 = \angle B_1F_1F_2 = 45^\circ$ 이므로

$\overline{F_1F_2} = \overline{B_1F_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

한편, 직각삼각형 $D_1F_2F_1$에서

$\overline{D_1F_2} : \overline{F_2F_1}$

$= \left(\overline{D_1B_1} - \overline{F_2B_1}\right) : \overline{F_2F_1}$

$= \frac{3}{2}\sqrt{2} : \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 3 : 1$

또, 직각삼각형 D_1HD_2에서

$\overline{D_1H} : \overline{HD_2}$

$= \left(\overline{D_1B_1} - \overline{HB_1}\right) : \overline{HD_2}$

$= \left(2\sqrt{2} - x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) : \frac{x}{2}$

$= (3\sqrt{2} - 2x) : x$

이때, 직각삼각형 $D_1F_2F_1$과 직각삼각형 D_1HD_2가 닮음 삼각형이므로

$\overline{D_1F_2} : \overline{F_2F_1} = \overline{D_1H} : \overline{HD_2}$

$3 : 1 = (3\sqrt{2} - 2x) : x$

$3\sqrt{2} - 2x = 3x$

$5x = 3\sqrt{2}$

$x = \frac{3}{5}\sqrt{2}$

그러므로 두 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$의 길이의 비는

$1 : \frac{3}{10}\sqrt{2}$

이므로 넓이의 비는

$1 : \frac{9}{50}$

이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \times \frac{9}{50} + \frac{5}{2} \times \left(\frac{9}{50}\right)^2 + \cdots$$

$$= \frac{\frac{5}{2}}{1 - \frac{9}{50}}$$

$$= \frac{125}{41}$$

정답 ⑤

18. **출제의도** : 그래프를 이용하여 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$이므로

그래프를 이용하여 x의 값의 범위에 따라 y'의 값의 부호를 확인하면 다음 표와 같다.

x	$f'(x)g(x)$	$f(x)g'(x)$	y'
$x < a$	$-$	$-$	$-$
$x = a$	$-$	0	$-$
$a < x < b$	$-$	$+$	
$x = b$	0	$+$	$+$
$b < x < c$	$+$	$+$	$+$
$x = c$	0	0	0
$c < x < d$	$-$	$-$	$-$
$x = d$	0	$-$	$-$
$d < x < e$	$+$	$-$	
$x = e$	$+$	0	$+$
$x > e$	$+$	$+$	$+$

함수 $f(x)g(x)$는 $x = c$에서 극대이고, $a < x < b$와 $d < x < e$에서 극소이다.

따라서 $p < q$이므로 $a < p < b$이고 $d < q < e$이다.

정답 ②

19. **출제의도** : 확률에 관련된 추론 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :
첫 번째 던져서 나오는 주사위의 눈의 수를 a라 할 때, $f(a)=0$이 되는 사건을 A라 하고 , 두 번째 던져서 나오는 주사위의 눈의 수를 b라 할 때, $f(b)=0$이 되는 사건을 B라 하자.
이차방정식 $f(x)=0$의 해는 $x=3$ 또는 $x=4$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\boxed{\frac{1}{3}},\quad \mathrm{P}(B)=\frac{2}{6}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

이다.
구하는 확률 $\mathrm{P}(A\cup B)$는

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

이고, 두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\\&=\boxed{\frac{1}{9}}\end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\\&=\boxed{\frac{5}{9}}\end{aligned}$$

이다.
따라서 (가), (나), (다)에 알맞은 수는 각각 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{9}$이므로

$$m\times n\times k=\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{243}$$

정답 ②

20. **출제의도** : 수열의 점화식을 이용하여 수열의 규칙을 발견할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1=a$

$a_2=a+(-1)^1\times2=a-2$

$a_3=(a-2)+(-1)^2\times2=a$

$a_4=a+1$

$a_5=(a+1)+(-1)^4\times2=a+3$

$a_6=(a+3)+(-1)^5\times2=a+1$

$a_7=(a+1)+1=a+2$

⋮

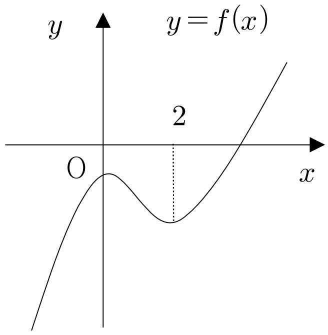
이므로 $a_{15}=a+4$

따라서 $a+4=43$에서 $a=39$

정답 ⑤

21. **출제의도** : 도함수의 그래프로부터 함수의 그래프를 그릴 수 있고 이를 활용하여 극대와 극소, 방정식에 관련된 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :
ㄱ. $f(0)<0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때,

$f(2)<f(0)<0$

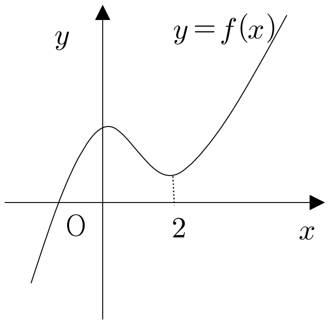
이므로

$|f(2)|>|f(0)|$ <참>

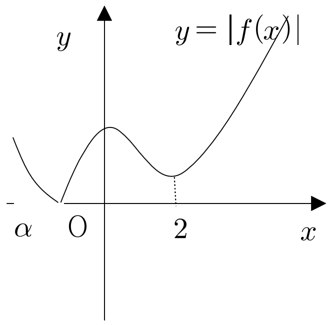
ㄴ. $f(0)f(2)\geq 0$일 때, $f(0)>f(2)$이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형을 각 경우에 따라 그리면 다음과 같다.

(ⅰ) $f(0)>f(2)>0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



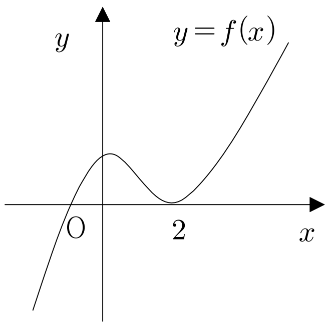
이때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



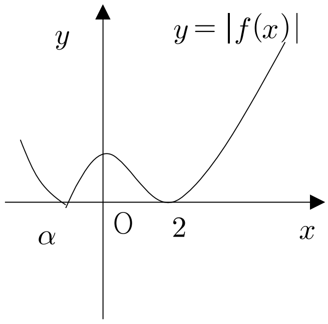
그러므로 $|f(\alpha)|=0$ $(\alpha\neq 2)$라 하면 a의 값은 α와 2로 개수는 2이다.

(ⅱ) $f(0)>f(2)$이고 $f(2)=0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



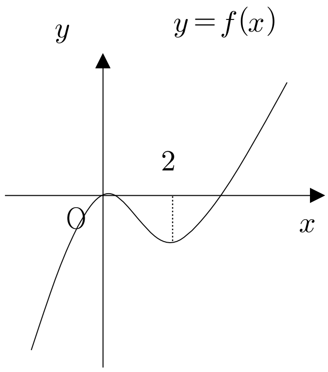
이때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



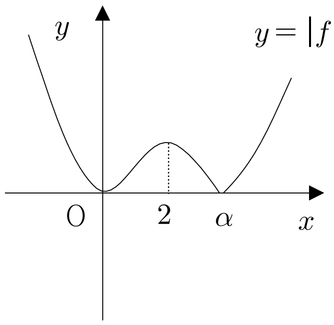
그러므로 $|f(\alpha)|=0$ $(\alpha\neq 2)$라 하면 a의 값은 α와 2로 개수는 2이다.

(ⅲ) $f(0)=0$이고 $f(2)<0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



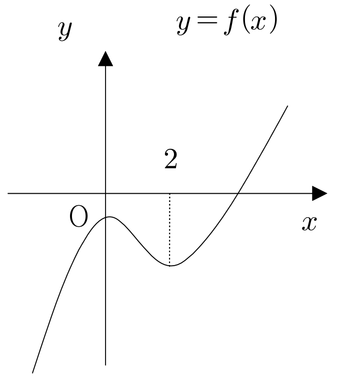
이때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



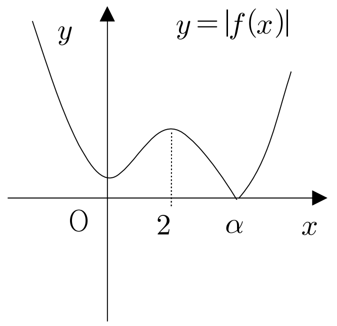
그러므로 $|f(\alpha)|=0$ $(\alpha\neq 0)$라 하면 a의 값은 0과 α로 개수는 2이다.

(ⅳ) $f(2)<f(0)<0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



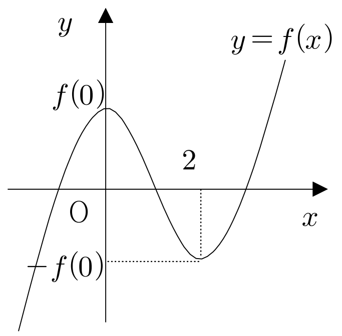
그러므로 $|f(\alpha)|=0$ 라 하면 a의 값은 0과 α로 개수는 2이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에서 극소인 a의 값의 개수는 2이다. <참>

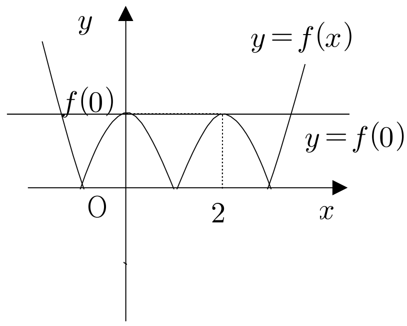
ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이므로

$f(2)=-f(0)$

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=f(0)$과의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=f(0)$의 서로 다른 교점의 개수는 4이므로 서로 다른 실근의 개수도 4이다. <참>

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

22. **출제의도** : 순열의 수의 기호를 알고 있는가?

정답풀이 :

${}_4P_3=4\times3\times2=24$

정답 24

23. **출제의도** : 도함수와 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-2x-2$이므로

$f'(x)=3x^2-2$

따라서

$f'(3)=3\times3^2-2=25$

정답 25

24. **출제의도** : 조합의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

1학년에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 = 15$

2학년에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3 = {}_4\mathrm{C}_1 = 4$

따라서 구하는 경우의 수는

$15 \times 4 = 60$

정답 60

25. **출제의도** : 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열의 첫째항이 3이므로 공비를 r이라 하면

$$\frac{a_4 a_5}{a_2 a_3} = \frac{(3r^3)(3r^4)}{(3r)(3r^2)}$$
$$= r^4$$
$$= 16$$

이때, $r^4 = 16$에서

$(r+2)(r-2)(r^2+4) = 0$

이고 모든 항이 양수이므로

$r = 2$

따라서

$a_6 = 3 \times 2^5 = 96$

정답 96

26. **출제의도** : 유리함수의 그래프의 점근선을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = \dfrac{2(x-5)+7}{x-5} = 2 + \dfrac{7}{x-5}$ 이므로

점근선은 두 직선 $x=5$, $y=2$이다.

따라서 $pq = 5 \times 2 = 10$

정답 10

27. **출제의도** : 조건부 확률을 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

두 상자에서 같은 색의 구슬이 나올 사건을 E, 두 상자에서 모두 흰 색의 구슬이 나오는 사건을 F라 하자.

이때, 사건 E가 나오는 경우는 모두 흰 구슬이거나 모두 검은 구슬이어야 하므로

$$\mathrm{P}(E) = \frac{a \times (100-2a)}{100 \times 100} + \frac{(100-a) \times 2a}{100 \times 100}$$
$$= \frac{300a - 4a^2}{100 \times 100}$$

또,

$$\mathrm{P}(E \cap F) = \frac{a \times (100-2a)}{100 \times 100}$$

그러므로

$$\mathrm{P}(F|E) = \frac{\mathrm{P}(E \cap F)}{\mathrm{P}(E)}$$
$$= \frac{\dfrac{a \times (100-2a)}{100 \times 100}}{\dfrac{300a - 4a^2}{100 \times 100}}$$
$$= \frac{a \times (100-2a)}{300a - 4a^2}$$
$$= \frac{2}{9}$$

이때,

$9a(100-2a) = 600a - 8a^2$

$10a^2-300a=0$

$a^2-30a=0$

$a(a-30)=0$

이때, a가 자연수이므로

$a=30$

정답 30

28. **출제의도** : 주어진 구간에서 삼차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2$

$\quad =(x+a)(3x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-a$ 또는 $x=\frac{a}{3}$

즉 함수 $f(x)$는 $x=-a$에서 극대이고 $x=\frac{a}{3}$에서 극소이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{a}{3}$에서 극솟값 $f\left(\frac{a}{3}\right)$을 갖는다.

$f\left(\frac{a}{3}\right)=\left(\frac{a}{3}\right)^3+a\times\left(\frac{a}{3}\right)^2-a^2\times\left(\frac{a}{3}\right)+2$

$\quad =-\frac{5}{27}a^3+2$

$-\frac{5}{27}a^3+2=\frac{14}{27}$에서 $a^3=8$, $a=2$

$f(x)=x^3+2x^2-4x+2$이므로

$f(2)=2^3+2\times2^2-4\times2+2=10$

$f(-2)=(-2)^3+2\times(-2)^2-4\times(-2)+2$

$\quad =10$

이므로 $M=10$

따라서 $a+M=2+10=12$

정답 12

29. **출제의도** : 함수를 구할 수 있고 미분가능하지 않는 x좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=f(x)$위의 점을 P라 하고 구간을 나누어 함수 $g(x)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $x<1$일 때,

$\mathrm{P}(x, x+1)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(x+1)^2+(x+2)^2$

$\quad =2x^2+6x+5$

$\overline{\mathrm{BP}}^2=(x-1)^2+(x-1)^2$

$\quad =2x^2-4x+2$

이때, $\overline{\mathrm{AP}}^2\geq\overline{\mathrm{BP}}^2$을 풀면

$2x^2+6x+5\geq2x^2-4x+2$

$10x\geq-3$

$x\geq-\frac{3}{10}$

그러므로

$$g(x)=\begin{cases}2x^2+6x+5 & \left(x<-\frac{3}{10}\right)\\ 2x^2-4x+2 & \left(-\frac{3}{10}\leq x<1\right)\end{cases}$$

(ii) $x\geq1$일 때,

$\mathrm{P}(x, -2x+4)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(x+1)^2+(-2x+5)^2$

$\quad =5x^2-18x+26$

$\overline{\mathrm{BP}}^2=(x-1)^2+(-2x+2)^2$

$\quad =5x^2-10x+5$

이때, $\overline{\mathrm{AP}}^2\geq\overline{\mathrm{BP}}^2$을 풀면

$5x^2-18x+26\geq5x^2-10x+5$

$8x\leq21$

$x\leq\frac{21}{8}$

그러므로

$$g(x)=\begin{cases} 5x^2-10x+5 & \left(1 \le x < \dfrac{21}{8}\right) \\ 5x^2-18x+26 & \left(x \ge \dfrac{21}{8}\right) \end{cases}$$

그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$g(x)=\begin{cases} 2x^2+6x+5 & \left(x < -\dfrac{3}{10}\right) \\ 2x^2-4x+2 & \left(-\dfrac{3}{10} \le x < 1\right) \\ 5x^2-10x+5 & \left(1 \le x < \dfrac{21}{8}\right) \\ 5x^2-18x+26 & \left(x \ge \dfrac{21}{8}\right) \end{cases}$$

이때, 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

한편,

$$g'(x)=\begin{cases} 4x+6 & \left(x < -\dfrac{3}{10}\right) \\ 4x-4 & \left(-\dfrac{3}{10} < x < 1\right) \\ 10x-10 & \left(1 < x < \dfrac{21}{8}\right) \\ 10x-18 & \left(x < \dfrac{21}{8}\right) \end{cases}$$

이므로

$$\lim_{x \to -\frac{3}{10}-} g'(x) \ne \lim_{x \to -\frac{3}{10}+} g'(x)$$

$$\lim_{x \to 1-} g'(x) = \lim_{x \to 1+} g'(x)$$

$$\lim_{x \to \frac{21}{8}-} g'(x) \ne \lim_{x \to \frac{21}{8}+} g'(x)$$

그러므로 $x=a$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않는 a의 값은

$$-\frac{3}{10},\ \frac{21}{8}$$

이다.

따라서

$$\begin{aligned} 80p &= 80\left(-\frac{3}{10}+\frac{21}{8}\right) \\ &= -24+210 \\ &= 186 \end{aligned}$$

정답 186

30. 출제의도 : 로그의 성질과 함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 n의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수의 조건에서

$na-a^2>0$, $nb-b^2>0$이므로

$0<a<n$, $0<b<n$

또 $\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)$에서

$na-a^2=nb-b^2$

$(b-a)(b+a-n)=0$

$b-a>0$이므로 $b+a=n$

$na-a^2=(b+a)a-a^2=ab$이므로

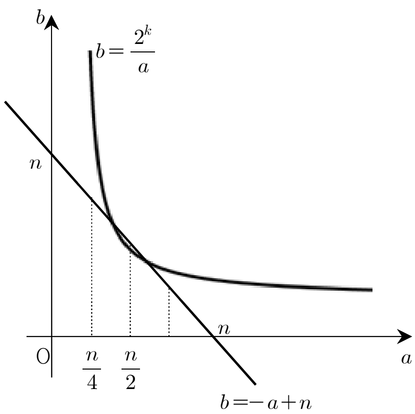
$ab=2^k$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$꼴이어야 한다.

한편, $0<b-a \le \dfrac{n}{2}$에서

$0<(n-a)-a \le \dfrac{n}{2}$, $0<b-(n-b) \le \dfrac{n}{2}$

$\dfrac{n}{4} \le a < \dfrac{n}{2}$, $\dfrac{n}{2} < b \le \dfrac{3n}{4}$

즉 그림과 같이 좌표평면에서 직선 $b+a=n$과 곡선 $ab=2^k$가 $\dfrac{n}{4} \le a < \dfrac{n}{2}$인 범위에서 만나는 점이 존재해야 한다.



$\dfrac{2^k}{\dfrac{n}{4}} \geq \dfrac{3n}{4}$, $\dfrac{2^k}{\dfrac{n}{2}} < \dfrac{n}{2}$이 성립해야 하므로

$\dfrac{3n^2}{16} \leq 2^k < \dfrac{n^2}{4}$

$3n^2 \leq 2^{k+4} < 4n^2$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$k=1$일 때, $3n^2 \leq 32 < 4n^2$

을 만족시키는 n의 값은 3

$k=3$일 때, $3n^2 \leq 128 < 4n^2$

을 만족시키는 n의 값은 6

$k=4$일 때, $3n^2 \leq 256 < 4n^2$

을 만족시키는 n의 값은 9

$k=5$일 때, $3n^2 \leq 512 < 4n^2$

을 만족시키는 n의 값은 $12,\ 13$

$k=6$일 때, $3n^2 \leq 1024 < 4n^2$

을 만족시키는 n의 값은 $17,\ 18$

따라서 조건을 만족시키는 20 이하의 자연수 n의 값은 $3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 13,\ 17,\ 18$이고, 그 합은

$3+6+9+12+13+17+18=78$

이다.

정답 78