2017학년도 대학수학능력시험 6월 모의 평가

수학영역 가형 정답 및 풀이

01. ⑤	02. ③	03. ③	04. ②	05. ④
06. ④	07. ①	08. ②	09. ⑤	10. ③
11. ①	12. ⑤	13. ②	14. ④	15. ④
16. ⑤	17. ①	18. ③	19. ②	20. ④
21. ①	22. 2	23. 8	24. 60	25. 4
26. 6	27. 36	28. 19	29. 15	30. 83

1. **출제의도** : 벡터의 성분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$5\vec{a}=5(3,-1)$

$=(15,-5)$

이므로 벡터 $5\vec{a}$의 모든 성분의 합은

$15+(-5)=10$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\cos\frac{3\pi}{2}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-\cos\frac{\pi}{2}$$

$$=0$$

정답 ③

3. **출제의도** : 순열의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

${}_4\mathrm{P}_3=4\times3\times2=24$

정답 ③

4. **출제의도** : 여러 가지 함수의 극한값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{5x}-1}{5x}\times\frac{5}{3}\right)$$

$$=1\times\frac{5}{3}$$

$$=\frac{5}{3}$$

정답 ②

5. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=2e^x+(2x+7)e^x$ 이므로

$f'(0)=2+7=9$

정답 ④

6. **출제의도** : 이항정리를 활용하여 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(x+\dfrac{1}{3x}\right)^6$ 의 전개식에서 일반항은

$${}_6\mathrm{C}_r\,x^{6-r}\left(\frac{1}{3x}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r\times\left(\frac{1}{3}\right)^r\times x^{6-2r}$$

따라서 x^2의 계수는 $r=2$일 때이므로

$${}_6\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{1}{9}$$

$$=\frac{5}{3}$$

정답 ④

7. **출제의도** : 삼각함수의 덧셈정리를 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=2$$

따라서,

$\tan\alpha+1=2(1-\tan\alpha)$

이므로

$3\tan\alpha=1$

에서

$\tan\alpha=\frac{1}{3}$

정답 ①

8. **출제의도** : 분할의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

자연수 6을 짝수개의 자연수로 분할하면

$6=5+1$

$=4+2$

$=3+3$

$=3+1+1+1$

$=2+2+1+1$

$=1+1+1+1+1+1$

그러므로 자연수 6을 짝수 개의 자연수로 분할 하는 경우의 수는

$P(6,2)+P(6,4)+P(6,6)$

$=3+2+1=6$

정답 ②

9. **출제의도** : 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap B^C)$

$=\frac{13}{16}-\frac{1}{4}=\frac{9}{16}$

따라서,

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$=\frac{\frac{9}{16}}{\frac{13}{16}}=\frac{9}{13}$$

정답 ⑤

10. **출제의도** : 로그부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수 조건에서

$x-1>0,\ 4x-7>0$

이므로

$x>\frac{7}{4}$ $\cdots$ ㉠

$\log_3(x-1)+\log_3(4x-7)\le 3$에서 로그의 성질에 의해

$\log_3(x-1)(4x-7)\le\log_3 3^3$

밑이 1보다 크므로

$(x-1)(4x-7)\le 27$

$4x^2-11x-20\le 0$

$(x-4)(4x+5)\le 0$

이므로

$-\frac{5}{4}\le x\le 4$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{7}{4}<x\le 4$

따라서 정수 x는 2, 3, 4이므로

정수 x의 개수는 3개이다.

정답 ③

11. **출제의도** : 접선의 방정식을 구할

수 있는가?

정답풀이 :

$y' = \dfrac{1}{x-3}$ 이므로 점 (4, 1)에서의 접선의 방정식은

$y-1 = \dfrac{1}{4-3}(x-4)$, $y = x-3$

따라서 $a=1$, $b=-3$ 이므로

$a+b=-2$

정답 ①

12. **출제의도** : 벡터의 내적을 이용하여 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선 $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-1}{3}$의 방향벡터를 $\vec{u}$라고 하면 $\vec{u} = (4,\ 3)$

직선 $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y+1}{3}$의 방향벡터를 $\vec{v}$라고 하면 $\vec{v} = (-1,\ 3)$

따라서

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} \\ &= \frac{|4\times(-1)+3\times3|}{\sqrt{4^2+3^2}\sqrt{(-1)^2+3^2}} \\ &= \frac{5}{5\sqrt{10}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{10}\end{aligned}$$

정답 ⑤

13. **출제의도** : 극값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = (x^2-8)e^{-x+1}$ 에서

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2xe^{-x+1} - (x^2-8)e^{-x+1} \\ &= (-x^2+2x+8)e^{-x+1} \\ &= -(x-4)(x+2)e^{-x+1}\end{aligned}$$

이때 $f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=4$ 이고 $x=-2$에서 극소, $x=4$에서 극대이므로

$a = f(-2) = -4e^3$

$b = f(4) = 8e^{-3}$

따라서, $ab = -4e^3 \times 8e^{-3} = -32$ 이다.

정답 ②

14. **출제의도** : 수학적 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

이차함수 $f(x) = x^2-7x+10$에서

$f(x) = (x-2)(x-5)$

에서

$f(1)>0$, $f(6)>0$

$f(2)=f(5)=0$

$f(3)<0$, $f(4)<0$

이므로

$f(a)f(b)<0$

를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

(1, 3), (1, 4), (3, 1), (4, 1)

(6, 3), (6, 4), (3, 6), (4, 6)

의 8개다.

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$

정답 ④

15. **출제의도** : 합성함수의 미분을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(f(\frac{\pi}{4}))=g(\frac{1}{2})=\sqrt{e}$ 이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{g(f(x))-g(f(\frac{\pi}{4}))}{x-\frac{\pi}{4}}=(g\circ f)'(\frac{\pi}{4})$$

이때,

$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$

이고

$f'(x)=2\sin x\cos x,\ g'(x)=e^x$

이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{g(f(x))-g(f(\frac{\pi}{4}))}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=(g\circ f)'(\frac{\pi}{4})$$

$$=g'(f(\frac{\pi}{4}))\times f'(\frac{\pi}{4})$$

$$=g'(\frac{1}{2})\times f'(\frac{\pi}{4})$$

$$=\sqrt{e}\times 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=\sqrt{e}\times 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\sqrt{e}$$

정답 ④

16. **출제의도** : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_1^e x(1-\ln x)dx=\int_1^e(x-x\ln x)dx$$

$$=\int_1^e xdx-\int_1^e x\ln x\,dx$$

$$\int_1^e xdx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}$$

$\int_1^e x\ln x\,dx$에서

$f(x)=\ln x,\ g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=\frac{1}{2}x^2$ 이므로

$$\int_1^e x\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}x\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^2-0\right)-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

이므로

$$\int_1^e xdx-\int_1^e x\ln x\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{4}$$

$$=\frac{1}{4}(e^2-3)$$

정답 ⑤

17. **출제의도** : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선의 방정식 $y^2=4x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\frac{dy}{dx}=4$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$ (단, $y\neq0$)

이므로 점 $A(t^2, 2t)$에서의 접선의 방정식을 구하면

$y-2t=\dfrac{2}{2t}(x-t^2)$, $y=\dfrac{1}{t}x+t$

이때, 포물선 $y^2=4x$의 준선 l의 방정식은 $x=-1$ 이므로 점 $A(t^2, 2t)$에서 준선 l에 내린 수선의 발 B의 좌표는

$B(-1, 2t)$

이다.

즉, $f(y)=\dfrac{2}{y}$, $g(t)=\dfrac{1}{t}$, $a=-1$ 이므로

$f(a)\times g(a)=f(-1)\times g(-1)$

$=(-2)\times(-1)=2$

정답 ①

18. **출제의도** : 쌍곡선의 정의를 이용하여 원의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

타원 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$위의 점 P와 두 초점 F, F′에서 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=8$ ⋯㉠

원 C 위의 점 Q에 대하여 선분 FQ의 길이의 최댓값이 14이므로

$\overline{\mathrm{FQ}}\leq\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}$

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=14$ ⋯㉡

㉡−㉠을 하면

$2\overline{\mathrm{PF'}}=6$

$\overline{\mathrm{PF'}}=3$

따라서 구하는 원 C의 넓이는 9π이다.

정답 ③

19. **출제의도** : 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0\leq m\leq3$, $0\leq n\leq3$ 이고 $m+n=3$ 이므로

$|m-n|=3$ 또는 $|m-n|=1$

그런데 $i^{|m-n|}=-i$ 이므로

$|m-n|=3$

즉, $m=3$, $n=0$ 또는 $n=0$, $m=3$이므로 구하고자 하는 확률은

$(\dfrac{1}{4})^3+(\dfrac{3}{4})^3=\dfrac{1}{64}+\dfrac{27}{64}$

$=\dfrac{7}{16}$

정답 ②

20. **출제의도** : 정적분의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) $0\leq a\leq4$일 때,

$\displaystyle\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$

$\displaystyle=\int_0^a(\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4})dx+\int_a^8\frac{x}{2}dx$

$=[\dfrac{5}{2}x-5\ln(x^2+4)]_0^a+[\dfrac{1}{4}x^2]_a^8$

$=\dfrac{5}{2}a-5\ln(a^2+4)-\dfrac{1}{4}a^2+5\ln4+16$

따라서,

$S(a)=\dfrac{5}{2}a-5\ln(a^2+4)-\dfrac{1}{4}a^2+5\ln4+16$

라 하자.

(ii) $4<a\leq8$일 때,

$\displaystyle\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$

$$=\int_0^a \left(\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}\right)dx+\int_a^8 \frac{-x+8}{2}dx$$

$$=\left[\frac{5}{2}x-5\ln(x^2+4)\right]_0^a+\left[-\frac{1}{4}x^2+4x\right]_a^8$$

$$=\frac{5}{2}a-5\ln(a^2+4)+5\ln4+16+\frac{1}{4}a^2-4a$$

따라서,

$$S(a)=\frac{5}{2}a-5\ln(a^2+4)+5\ln4+16+\frac{1}{4}a^2-4a$$

라 하자.

따라서 $0\le a\le 4$일 때,

$S'(a)=\dfrac{-(a-1)(a^2-4a+20)}{2(a^2+4)}$이므로

$a=1$에서 극대이고

$S(0)=16\cdots$㉠, $S(4)=22-5\ln5\cdots$㉡

$4<a\le 8$일 때,

$S'(a)=\dfrac{(a-6)(a+1)(a+2)}{2(a^2+4)}$에서

$a=6$에서 극소이므로

$S(6)=16-5\ln10\cdots$㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 최솟값은

$S(6)=16-5\ln10$

정답 ④

[다른풀이]

$S(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$라 하면

$S'(a)=\dfrac{dS}{da}(a)=f(a)-g(a)$이므로

$0\le a\le 8$에서 $S'(a)=0$을 구하면

$a=1$ 또는 $a=6$이다.

그리고 $f(a)-g(a)$의 부호를 조사하면

$a=1$에서 극대를 가지고 $a=6$에서 극소를 가진다.

$a=0, a=6$에서 $S(a)$의 함수값은.

$S(0)=16, S(6)=16-5\ln10$ 이므로

최솟값은 $S(6)=16-5\ln10$

21. 출제의도 : 주어진 조건을 이용하여 함수 $f(x)$에 대한 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. 조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 조건 (가)에서 $f(x)\ne1$ 이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ne-1$ 이다. (참)

ㄴ. 조건 (다)에서

$f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

$\quad=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}$

이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 그 그래프는 원점에 대하여 대칭이며 $f(x)\ne1$, $f(x)\ne-1$ 이므로 $-1<f(x)<1$ 이다.

즉, $1+f(x)>0$, $1-f(x)>0$ 이므로 $f'(x)>0$

따라서 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 증가한다. (거짓)

ㄷ. $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

$\quad=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}$

$\quad=1-\{f(x)\}^2$

이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f''(x)=-2f(x)f'(x)$

이때 $f''(x)=0$ 이면 $f(x)=0$ (왜냐하면 ㄴ에서 $f'(x)>0$이므로)

그런데, $f(x)$는 원점에 대하여 대칭이고 $f(0)=0$이고 증가하므로 변곡점은 $(0,0)$ 뿐이 존재하지 않는다. (거짓)

정답 ①

22. 출제의도 : 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{2}{\cos x}\right)$$
$$=1\times 2$$
$$=2$$

정답 2

23. **출제의도** : 벡터의 내적을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(4,1)\cdot(-2,k)$
$=4\times(-2)+1\times k$
$=-8+k=0$

따라서 $k=8$

정답 8

24. **출제의도** : 조합의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

1학년 6명에서 4명을 뽑는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 4개를 택하는 조합의 수이므로

$_6C_4={}_6C_2$
$=\frac{6\times 5}{2\times 1}$
$=15$

이 각각에 대하여 2학년 4명에서 3명을 뽑는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 조합의 수이므로

$_4C_3={}_4C_1$
$=4$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$15\times 4=60$

정답 60

25. **출제의도** : 지수에 미지수가 있는 방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$3^{-x+2}=\frac{1}{9}=3^{-2}$ 이므로

$-x+2=-2$

즉, $x=4$ 이다.

정답 4

26. **출제의도** : 타원의 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

타원 $4x^2+9y^2-18y-27=0$을 정리하면

$4x^2+9(y-1)^2=36$,

$\frac{x^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$이고,

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$의 초점의 좌표는

$(\sqrt{5},0)$, $(-\sqrt{5},0)$

이므로 주어진 타원의 초점의 좌표는

$(\sqrt{5},1)$, $(-\sqrt{5},1)$

이다.

따라서 한 초점의 좌표 (p,q)에 대하여

$p^2+q^2=5+1$
$=6$

정답 6

27. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

사과, 감, 배, 귤을 선택한 개수를 각각

x, y, z, w라 하면 주어진 조건에 의하여

$x+y+z+w=8$

(단, $x=0$ 또는 $x=1$ 이고 $y\ge1$, $z\ge1$, $w\ge1$ 이다)

(i) $x=0$일 때

$y-1=y'$, $z-1=z'$, $w-1=w'$라 하면

$y'+z'+w'=5$

이므로 순서쌍 (x,y,z,w)의 개수는

$$
\begin{aligned}
{}_3H_5 &= {}_{3+5-1}C_5 \\
&= {}_7C_5 \\
&= {}_7C_2 \\
&= \frac{7\times6}{2\times1}=21
\end{aligned}
$$

(ii) $x=1$일 때

$y-1=y'$, $z-1=z'$, $w-1=w'$라 하면

$y'+z'+w'=4$

이므로 순서쌍 (x,y,z,w)의 개수는

$$
\begin{aligned}
{}_3H_4 &= {}_{3+4-1}C_4 \\
&= {}_6C_4 \\
&= {}_6C_2 \\
&= \frac{6\times5}{2\times1}=15
\end{aligned}
$$

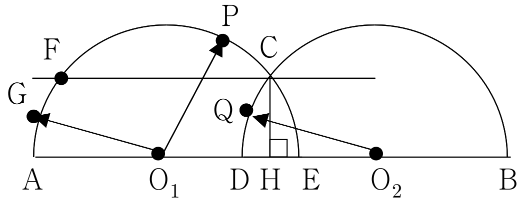
(i), (ii)에 의하여 구하고자 하는 경우의 수는

$21+15=36$

정답 36

28. 출제의도 : 벡터의 연산과 내적을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



점 C를 지나고 직선 AB에 평행인 직선이 호 AC와 만나는 점을 F라고 하면

$\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1G}$

를 만족시키는 점 G는 호 AF 위에 있다.

$\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}$

이므로 벡터 $\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}$의 크기가 최소인 경우는 $\angle PO_1G$의 크기가 최대일 때이며, 이때 점 G가 점 A와 일치하고, 점 P가 점 C와 일치한다. 따라서

$$\left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}\right|\ge\left|\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1A}\right|=\frac{1}{2}$$

$\angle AO_1C=\theta$라 하자.

$$\left|\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1A}\right|=\frac{1}{2}$$

의 양변을 제곱하면

$$\left|\overrightarrow{O_1C}\right|^2+2\overrightarrow{O_1C}\cdot\overrightarrow{O_1A}+\left|\overrightarrow{O_1A}\right|^2=\frac{1}{4}$$

$$1+2\left|\overrightarrow{O_1C}\right|\left|\overrightarrow{O_1A}\right|\cos\theta+1=\frac{1}{4}$$

$$2\times1\times1\times\cos\theta=\frac{1}{4}-2$$

$$\cos\theta=-\frac{7}{8}$$

점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$
\begin{aligned}
\overline{O_1H} &= \overline{O_1C}\cos(\pi-\theta) \\
&= 1\times(-\cos\theta) \\
&= \frac{7}{8}
\end{aligned}
$$

이고 $\overline{O_1H}=\overline{HO_2}$이므로

$\overline{AB} = \overline{AO_1} + \overline{O_1H} + \overline{HO_2} + \overline{O_2B}$

$= 1 + \frac{7}{8} + \frac{7}{8} + 1$

$= \frac{15}{4}$

따라서 $p=4$, $q=15$이므로

$p+q=19$

정답 19

29. **출제의도** : 좌표평면에서 점이 움직인 거리와 점의 가속도를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{t}$, $\frac{dy}{dt} = f'(t)$ 이므로 주어진 조건에 의하여

$$\int_1^t \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\, dt$$

$$= \int_1^t \sqrt{\frac{4}{t^2} + \{f'(t)\}^2}\, dt = s$$

또한, $t = \frac{s + \sqrt{s^2+4}}{2}$ 에서

$t^2 - st - 1 = 0$

이므로 $s = \frac{t^2-1}{t}$

즉, $\int_1^t \sqrt{\frac{4}{t^2} + \{f'(t)\}^2}\, dt = \frac{t^2-1}{t}$ 이므로

양변을 t에 대하여 미분하면

$\sqrt{\frac{4}{t^2} + \{f'(t)\}^2} = \frac{t^2+1}{t^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$\{f'(t)\}^2 = \frac{(t^2-1)^2}{t^4}$

$t=2$일 때 점 P의 속도가 $(1, \frac{3}{4})$이므로

$f'(t) = \frac{t^2-1}{t^2} = 1 - \frac{1}{t^2}$이다.

그러므로

$f''(t) = \frac{2}{t^3}$

또한, $t=2$일 때 점 P의 가속도가 $(-\frac{1}{2}, a)$이므로

$a = f''(2) = \frac{1}{4}$

따라서 $60a = 60 \times \frac{1}{4} = 15$

정답 15

30. **출제의도** : 정적분의 성질을 이용하여 함수식을 만족시키는 상수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)

$$\int_x^{x+a} f(t)dt = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x+a) - f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \cdots ㉠$

이 식의 양변에 $x = -\frac{a}{2}$를 대입하면

$f\left(\frac{a}{2}\right) - f\left(-\frac{a}{2}\right) = \cos\left(-\frac{a}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

조건 (가)에서 의해

$f\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(-\frac{a}{2}\right)$이므로

$\cos\left(-\frac{a}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$0 < a < 2\pi$에서

$-\frac{2}{3}\pi \le -\frac{a}{2} + \frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{3}$

이므로

$-\dfrac{a}{2}+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{2}$

따라서 $a=\dfrac{5\pi}{3}$

㉠에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x+a)-f'(x)=-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

이 식에 $x=-\dfrac{a}{2}$를 대입하면

$f'\left(\dfrac{a}{2}\right)-f'\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-\sin\left(-\dfrac{a}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$

이때, 조건 (가) $f(x)=f(-x)$에서

$f'(x)=-f'(-x)$이므로

$2f'\left(\dfrac{a}{2}\right)=-\sin\left(-\dfrac{a}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$a=\dfrac{5}{3}\pi$이므로

$$2f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$f'\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$ ⋯ ㉡

$f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$에서

$f'(x)=-3b\sin(3x)-5c\sin(5x)$

$$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-3b\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)-5c\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right)$$
$$=-3b-\frac{5c}{2}=\frac{1}{2}$$

$-6b-5c=1$ ⋯ ㉢

한편,

$\displaystyle\int_x^{x+a}f(t)dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

의 양변에 $x=-\dfrac{a}{2}$를 대입하면

$\displaystyle\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}f(t)dt=\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$\displaystyle 2\int_0^{\frac{a}{2}}f(t)dt=\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

$$2\int_0^{\frac{a}{2}}\{b\cos(3t)+c\cos(5t)\}dt$$
$$=2\left[\frac{b}{3}\sin(3t)+\frac{c}{5}\sin(5t)\right]_0^{\frac{a}{2}}$$
$$=2\left\{\frac{b}{3}\sin\left(\frac{3a}{2}\right)+\frac{c}{5}\sin\left(\frac{5a}{2}\right)\right\}$$
$$=\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

양변에 $a=\dfrac{5\pi}{3}$을 대입하면

$$2\left\{\frac{b}{3}\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)+\frac{c}{5}\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right)\right\}$$
$$=\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$2\left(\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{5}\times\dfrac{1}{2}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$

$\dfrac{2}{3}b+\dfrac{c}{5}=-1$

$10b+3c=-15$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣에서

$b=-\dfrac{9}{4}$, $c=\dfrac{5}{2}$

따라서

$$abc=\frac{5\pi}{3}\times\left(-\frac{9}{4}\right)\times\left(\frac{5}{2}\right)$$
$$=-\frac{75}{8}\pi$$

$p=8$, $q=75$이므로

$p+q=83$

정답 83