2016학년도 3월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 가형 정답

1	⑤	2	②	3	③	4	①	5	④
6	①	7	④	8	②	9	③	10	⑤
11	⑤	12	④	13	②	14	①	15	③
16	⑤	17	②	18	①	19	③	20	⑤
21	④	22	10	23	7	24	56	25	16
26	85	27	64	28	8	29	118	30	46

해 설

1. [출제의도] 다항식의 뺄셈을 계산한다.

두 다항식 $A=3x^2-x+5$, $B=x^2-2x-3$ 에서

$A-B=(3x^2-x+5)-(x^2-2x-3)$

$=3x^2-x+5-x^2+2x+3$

$=2x^2+x+8$

2. [출제의도] 복소수의 덧셈과 곱셈을 계산한다.

$(2-3i)+i(-1+4i)$

$=2-3i-i+4i^2$

$=2-3i-i-4$

$=-2-4i$

3. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그를 계산한다.

$\log_6 3+\log_6 12$

$=\log_6(3\times 12)$

$=\log_6 36$

$=\log_6 6^2$

$=2\log_6 6$

$=2$

4. [출제의도] 합성함수의 뜻을 이용하여 주어진 함숫값을 구한다.

$g(1)=3\times 1-1=2$이므로

$(f\circ g)(1)=f(g(1))$

$=f(2)$

$=2\times 2+1$

$=5$

[다른풀이]

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=f(3x-1)$

$=2(3x-1)+1$

$=6x-1$ 이므로

$(f\circ g)(1)=5$

5. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구한다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=4$ 이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-2)^2-2\times 4$

$=-4$

6. [출제의도] 등차수열의 뜻을 이용하여 주어진 항을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}=a_4+6d=14+18=32$

[다른풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_4=a_1+3d=a_1+9=14$ 이므로

$a_1=5$

$a_{10}=a_1+9d=5+27=32$

7. [출제의도] 제한된 범위에서 정의된 이차함수의 최댓값을 이용하여 최솟값을 구한다.

$f(x)=(x^2-4x+4)-4+a$

$=(x-2)^2-4+a$

이므로 $0\le x\le 3$일 때, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 속한다. 이때,

$x=0$일 때 $f(0)=a$

$x=2$일 때 $f(2)=-4+a$

$x=3$일 때 $f(3)=-3+a$

이므로 주어진 이차함수 $f(x)$는

$x=0$에서 최댓값 $f(0)=a$를 갖고,

$x=2$에서 최솟값 $f(2)=-4+a$를 갖는다.

$a=12$ 이므로

$f(2)=-4+12=8$

따라서 구하는 최솟값은 8이다.

8. [출제의도] 유리함수의 그래프의 점근선을 이용하여 함숫값을 구한다.

점근선의 방정식이 $x=2$, $y=3$ 이므로

$f(x)=\dfrac{k}{x-2}+3$

$=\dfrac{3x-6+k}{x-2}$

$=\dfrac{ax+1}{x+b}$

$-6+k=1$ 에서 $k=7$

$f(x)=\dfrac{7}{x-2}+3$ 이므로

$f(4)=\dfrac{7}{4-2}+3=\dfrac{13}{2}$

[다른풀이]

$f(x)=\dfrac{ax+1}{x+b}$

$=\dfrac{a(x+b)-ab+1}{x+b}$

$=\dfrac{-ab+1}{x+b}+a$

이때 함수 $f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-b$, $y=a$ 이므로

$a=3$, $b=-2$

$f(x)=\dfrac{7}{x-2}+3$ 이므로

$f(4)=\dfrac{7}{4-2}+3=\dfrac{13}{2}$

9. [출제의도] 다항식을 인수분해하여 상수의 값을 구한다.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x-7$ 이라 하면

$f(-1)=2\times(-1)^3-3\times(-1)^2-12\times(-1)-7=0$

이므로 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -3 & -12 & -7 \\ & & -2 & 5 & 7 \\ \hline -1 & 2 & -5 & -7 & \boxed{0} \\ & & -2 & 7 & \\ \hline & 2 & -7 & \boxed{0} & \end{array}$$

$2x^3-3x^2-12x-7=(x+1)^2(2x-7)$ 에서

$a=1$, $b=2$, $c=-7$ 이므로

$a+b+c=1+2+(-7)=-4$

10. [출제의도] 원의 평행이동과 원의 성질을 이용하여 상수의 값을 구한다.

원 C의 방정식은

$\{(x-3)+1\}^2+\{(y-a)+2\}^2=9$

$(x-2)^2+(y-a+2)^2=9$

원 C의 넓이가 직선 $3x+4y-7=0$에 의하여 이등분되려면 원 C의 중심이 직선 $3x+4y-7=0$ 위에 있어야 한다.

원 C의 중심의 좌표가 $(2,\ a-2)$ 이므로

$3\times 2+4(a-2)-7=0$ 에서

$a=\dfrac{9}{4}$

11. [출제의도] 집합의 성질과 집합 사이의 포함 관계를 이용하여 명제의 참, 거짓을 판단한다.

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

ㄱ. $A\cap B=\{2,\ 3\}$이므로

$5\not\in A\cap B$ (참)

ㄴ. $B-A=\{5,\ 7\}$이므로

$n(B-A)=2$ (참)

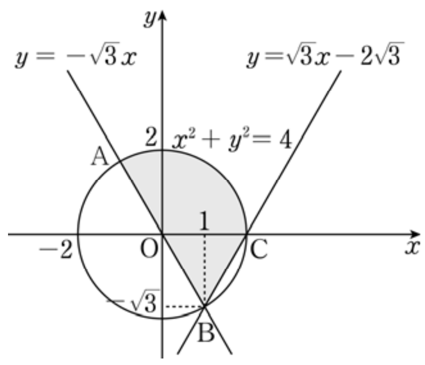
ㄷ. $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$

전체집합 U의 부분집합 중에서 집합 $A\cup B$와 서로소인 집합은 집합 $(A\cup B)^C=\{4,8,9,10\}$의 부분집합이므로 구하는 개수는 $2^4=16$이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

12. [출제의도] 연립부등식의 영역을 좌표평면에 나타내고 그 넓이를 구한다.

주어진 부등식의 영역을 좌표평면에 나타내면 다음 그림의 어두운 부분(경계선 포함)이다.



그림과 같이 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=-\sqrt{3}x$의 두 교점을 각각 A, B라 하고,

원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$ 의 교점을 C라 하자.

$\angle\mathrm{AOC}=120°$이므로

부채꼴 AOC 의 넓이는

$\pi\times 2^2\times\dfrac{120°}{360°}=\dfrac{4}{3}\pi$

삼각형 OBC 는 정삼각형이므로

삼각형 OBC 의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$

따라서 구하는 영역의 넓이는 부채꼴 AOC 의 넓이와 삼각형 OBC 의 넓이의 합이므로 $\dfrac{4}{3}\pi+\sqrt{3}$ 이다.

13. [출제의도] 두 직선의 수직 조건과 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 주어진 값을 구한다.

직선 AP 의 기울기는 $\dfrac{4-2}{4-0}=\dfrac{1}{2}$,

직선 BP 의 기울기는 $\dfrac{4-2}{4-n}=\dfrac{2}{4-n}$

이고 직선 AP 와 직선 BP 가 서로 수직이므로

기울기의 곱은 -1 이다.

즉, $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{4-n}=-1$ 에서 $n=5$

세 점 $\mathrm{A}(0,2)$, $\mathrm{B}(5,2)$, $\mathrm{P}(4,4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABP 의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{0+5+4}{3},\ \frac{2+2+4}{3}\right)$이므로 $\left(3,\ \frac{8}{3}\right)$이다.

따라서 $a=3,\ b=\frac{8}{3}$이므로

$a+b=3+\frac{8}{3}=\frac{17}{3}$

14. [출제의도] 원의 성질과 자연수의 제곱의 합을 이용하여 $\sum$의 값을 구한다.

$\angle\mathrm{APB}=90°$이므로 점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다. 이때, 이 원의 지름의 길이는 n이므로

$$a_n=\pi\times\left(\frac{n}{2}\right)^2=\frac{n^2}{4}\pi$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{8}a_n&=\sum_{n=1}^{8}\frac{n^2}{4}\pi\\&=\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{8}n^2\\&=\frac{\pi}{4}\times\frac{8\times9\times17}{6}\\&=51\pi\end{aligned}$$

15. [출제의도] 상용로그의 뜻과 $\sum$의 성질을 이용하여 자연수의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k\\&=\log n-\log(n-1)\\&=\log\frac{n}{n-1}\quad(n\ge2)\end{aligned}$$

따라서 $10^{a_n}=\frac{n}{n-1}\ (n\ge2)$

$10^{a_n}=1.04$에서

$\frac{n}{n-1}=\frac{26}{25}$이므로

$n=26$

16. [출제의도] 필요조건과 충분조건을 이용하여 최솟값을 구한다.

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$ …… ㉠

r는 p이기 위한 필요조건이므로 $P\subset R$ …… ㉡

㉠에서 $a^2-1=3$ 또는 $b=3$

(i) $a^2-1=3$일 때,

$a=-2$ 또는 $a=2$

㉡에서 $ab=3$이어야 한다. 즉,

$a=-2,\ b=-\frac{3}{2}$ 또는 $a=2,\ b=\frac{3}{2}$

(ii) $b=3$일 때,

㉡에서 $a=3$ 또는 $ab=3$이어야 한다. 즉,

$a=3,\ b=3$ 또는 $a=1,\ b=3$

(i), (ii)에 의하여 $a+b$의 최솟값은

$(-2)+\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{7}{2}$

17. [출제의도] 실생활의 소재를 활용하여 로그의 값을 구한다.

약물 A의 흡수율과 배설률을 각각 K_A, E_A라 하고, 약물 B의 흡수율과 배설률을 각각 K_B, E_B라 하자.

주어진 조건에 의하여

$K_A=K_B,\ E_A=\frac{1}{2}K_A,\ E_B=\frac{1}{4}K_B$이므로

약물 A의 혈중 농도가 최고치에 도달하는 시간은

$$\begin{aligned}3&=c\times\frac{\log K_A-\log E_A}{K_A-E_A}\\&=c\times\frac{\log K_A-\log\frac{1}{2}K_A}{K_A-\frac{1}{2}K_A}\\&=c\times\frac{\log2}{\frac{1}{2}K_A}\\&=c\times\frac{2\log2}{K_A}\end{aligned}$$

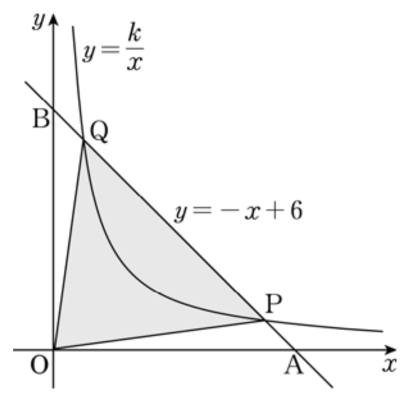
이므로 $\frac{c}{K_A}=\frac{3}{2\log2}$

약물 B의 혈중 농도가 최고치에 도달하는 시간은

$$\begin{aligned}c\times\frac{\log K_B-\log E_B}{K_B-E_B}&=c\times\frac{\log K_A-\log\frac{1}{4}K_A}{K_A-\frac{1}{4}K_A}\\&=c\times\frac{\log4}{\frac{3}{4}K_A}\\&=\frac{c}{K_A}\times\frac{8\log2}{3}\\&=\frac{3}{2\log2}\times\frac{8\log2}{3}\\&=4\text{ 이므로}\end{aligned}$$

$a=4$

18. [출제의도] 유리함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족하는 상수의 값을 구한다.



직선 $y=-x+6$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 $\mathrm{A}(6,0)$, $\mathrm{B}(0,6)$

삼각형 OAB의 넓이는

$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times6\times6=18$

함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x+6$은 모두 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 삼각형 OAP와 삼각형 OQB의 넓이는 서로 같다. 삼각형 OPQ의 넓이가 14이므로

$\triangle\mathrm{OAP}=\triangle\mathrm{OQB}=\frac{1}{2}(18-14)=2$

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\triangle\mathrm{OAP}=\frac{1}{2}\times6\times b=2$에서 $b=\frac{2}{3}$이다.

점 P는 직선 $y=-x+6$ 위의 점이므로

$b=-a+6=\frac{2}{3}$에서 $a=\frac{16}{3}$이다.

또, 점 P는 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$k=ab=\frac{16}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{32}{9}$

[다른풀이]

직선 $y=-x+6$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 $\mathrm{A}(6,0)$, $\mathrm{B}(0,6)$

삼각형 OAB의 넓이는

$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times6\times6=18$

함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x+6$은 모두 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 삼각형 OAP와 삼각형 OQB의 넓이는 서로 같다.

삼각형 OPQ의 넓이가 14이므로

$\triangle\mathrm{OAP}=\triangle\mathrm{OQB}=\frac{1}{2}(18-14)=2$

세 삼각형 OAP, OPQ, OQB의 넓이의 비와 세 선분 AP, PQ, QB의 길이의 비가 같으므로

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QB}}=2:14:2=1:7:1$

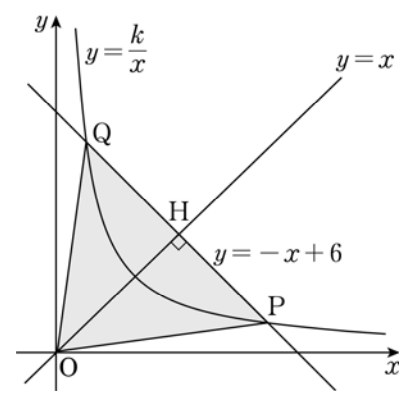
그러므로 점 P는 선분 AB를 $1:8$로 내분하는 점이므로

$\mathrm{P}\left(\frac{1\times0+8\times6}{1+8},\ \frac{1\times6+8\times0}{1+8}\right)$ 즉, $\mathrm{P}\left(\frac{16}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

이때 점 P는 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$k=\frac{16}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{32}{9}$

[다른풀이]



원점에서 직선 $y=-x+6$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 OH와 직선 $y=-x+6$은 서로 수직이므로 기울기의 곱이 -1이어야 한다. 따라서 직선 OH의 방정식은 $y=x$이고, 점 H의 좌표는 $(3,3)$이다.

$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

삼각형 OPQ의 넓이가 14이므로 삼각형 OPH의 넓이는 7이다.

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{PH}}=7$

$\overline{\mathrm{PH}}=\frac{7\sqrt{2}}{3}$

점 P의 좌표를 $(a,\ -a+6)$이라 하면 점 P와 직선 $x-y=0$ 사이의 거리는 선분 PH의 길이와 같으므로

$\frac{|2a-6|}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{3}$

$a>3$이므로 $a=\frac{16}{3}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{16}{3},\ \frac{2}{3}\right)$이고

$k=\frac{16}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{32}{9}$

19. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 수열의 일반항을 증명한다.

(i) $n=1$일 때,

$a_1=\frac{{a_1}^2+1}{2a_1}$에서

${a_1}^2=1$, $a_1>0$이므로 (좌변)$=a_1=1$,

(우변)$=1-0=1$

이다. 따라서 $n=1$일 때 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$a_m=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}a_k&=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}\\&=\sum_{k=1}^{m}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})+a_{m+1}\\&=(\sqrt{1}-\sqrt{0})+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+\\&\qquad\cdots+(\sqrt{m}-\sqrt{m-1})+a_{m+1}\\&=\boxed{\sqrt{m}}+a_{m+1}\end{aligned}$$

주어진 조건에서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \frac{{a_{m+1}}^2+1}{2a_{m+1}}$ 이므로

$\dfrac{{a_{m+1}}^2+1}{2a_{m+1}} = \sqrt{m}+a_{m+1}$

즉,

${a_{m+1}}^2 + \boxed{\ 2\sqrt{m}\ } \times a_{m+1} - 1 = 0$

$a_{m+1} = -\sqrt{m} \pm \sqrt{m+1}$

이고, $a_{m+1} > 0$ 이므로

$a_{m+1} = \sqrt{m+1} - \sqrt{m}$

이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ 이다.

$f(m) = \sqrt{m}$, $g(m) = 2\sqrt{m}$ 이므로

$f(49)+g(16) = 7+8 = 15$

20. [출제의도] 부등식의 영역을 이용하여 집합의 포함 관계를 만족하는 실수의 최솟값을 구한다.

두 집합 A, B의 원소들을 좌표평면 위에 나타낼 때, 집합 A가 나타내는 영역을 D, 집합 B가 나타내는 영역을 E라 하자.

부등식 $a \le x \le y \le a+1$의 해는 연립부등식

$a \le x \le a+1$, $a \le y \le a+1$, $x \le y$

의 해와 일치한다.

따라서 그림에서 영역 D는 곡선 $y=2-x^2$ 및 그 아랫부분이고, 영역 E는 빗변의 길이가 $\sqrt{2}$ 이고, 빗변이 직선 $y=x$ 위에 있는 직각이등변삼각형과 그 내부이다. 이때, 직각이등변삼각형의 왼쪽 위의 점을 P, 오른쪽 위의 점을 Q라 하면 두 점의 좌표는 각각 $(a,\ a+1)$, $(a+1,\ a+1)$이다.

$A \cap B = B$이면 $B \subset A$이므로 두 점 P, Q가 영역 D에 속하면 된다.

(ⅰ) 점 $\mathrm{P}(a,\ a+1)$이 영역 D에 속하려면

$a+1 \le 2-a^2$

$a^2+a-1 \le 0$

이므로 $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \le a \le \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(ⅱ) 점 $\mathrm{Q}(a+1,\ a+1)$이 영역 D에 속하려면

$a+1 \le 2-(a+1)^2$

$(a+1)^2+(a+1)-2 \le 0$

$(a+1+2)(a+1-1) \le 0$

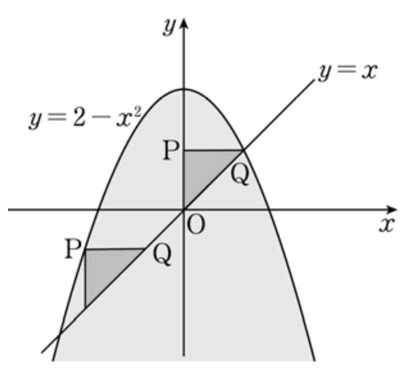
$a(a+3) \le 0$

이므로 $-3 \le a \le 0$

(ⅰ), (ⅱ)를 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \le a \le 0$이므로

a의 최솟값은 $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$



[다른풀이]

두 집합 A, B의 원소들을 좌표평면 위에 나타낼 때, 집합 A가 나타내는 영역을 D, 집합 B가 나타내는 영역을 E라 하자.

부등식 $a \le x \le y \le a+1$의 해는 연립부등식

$a \le x \le a+1$, $a \le y \le a+1$, $x \le y$

의 해와 일치한다.

따라서 그림에서 영역 D는 곡선 $y=2-x^2$ 및 그 아랫부분이고, 영역 E는 빗변의 길이가 $\sqrt{2}$ 이고, 빗변이 직선 $y=x$ 위에 있는 직각이등변삼각형과 그 내부이다. 이때, 직각이등변삼각형의 왼쪽 위의 점을 P라 하면 점 P는 직선 $y=x+1$ 위의 점이다.

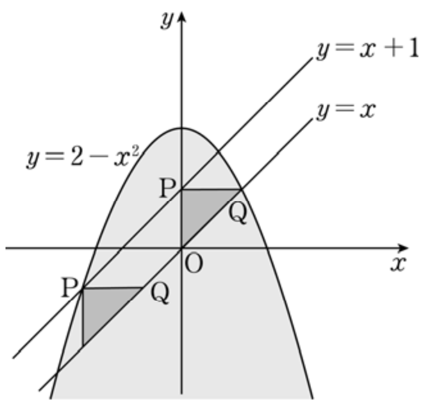
이차함수 $y=2-x^2$의 그래프가 위로 볼록이고, $A \cap B = B$이면 $B \subset A$이므로 a의 최솟값은 이차함수 $y=2-x^2$의 그래프와 직선 $y=x+1$이 만나는 점의 x좌표 중 작은 값이다.

$2-x^2 = x+1$

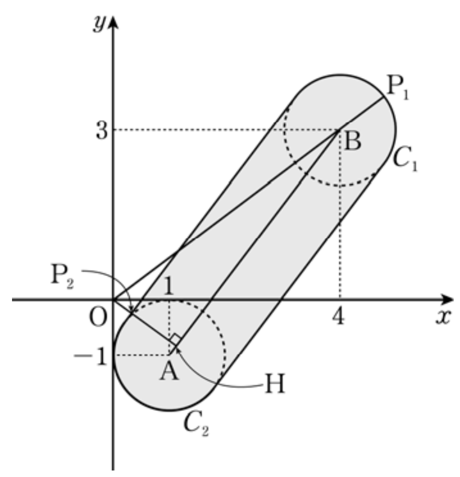
$x^2+x-1=0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

이므로 a의 최솟값은 $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 이다.



21. [출제의도] 원과 선분이 만날 때 두 점 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구한다.



원의 중심 P가 나타내는 영역은 선분 AB 위의 모든 점과의 거리가 원의 반지름의 길이인 1보다 작거나 같은 점들의 집합이다. 따라서 그림과 같이 점 $\mathrm{B}(4,\ 3)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C_1의 둘레 및 내부, 점 $\mathrm{A}(1,\ -1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C_2의 둘레 및 내부 그리고 직선 AB와의 거리가 1인 두 선분으로 둘러싸인 영역의 경계와 내부이다.

직선 OB가 원 C_1과 만나는 점 중 원점으로부터 더 멀리 떨어진 점을 P_1이라 하면 선분 OP의 길이의 최댓값은 선분 OP_1의 길이와 같다.

$M = \overline{\mathrm{OP}_1} = \sqrt{4^2+3^2}+1 = 6$

원점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 OP의 길이의 최솟값은 선분 OH의 길이에서 원의 반지름의 길이인 1을 뺀 선분 OP_2의 길이와 같다.

이때, 선분 OH의 길이는 원점 O와 직선 AB 사이의 거리이므로 직선 AB의 방정식은

$y = \dfrac{3-(-1)}{4-1}(x-1)-1$

$4x-3y-7=0$

$m = \overline{\mathrm{OP}_2} = \overline{\mathrm{OH}}-1$

$\quad = \dfrac{|-7|}{\sqrt{4^2+3^2}}-1 = \dfrac{2}{5}$

$M+m = 6+\dfrac{2}{5} = \dfrac{32}{5}$

22. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 다항식의 나머지를 구한다.

다항식 x^2-x+4를 $P(x)$라 할 때,

다항식 x^2-x+4를 $x-3$으로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여

$P(3) = 3^2-3+4 = 10$

23. [출제의도] 역함수의 뜻을 이용하여 함수의 식을 구한다.

함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 역함수의 그래프가 두 점 $(2,\ 0)$, $(5,\ 7)$을 지나므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프는 두 점 $(0,\ 2)$, $(7,\ 5)$를 지난다.

$2=\sqrt{b}$ 에서 $b=4$

$5=\sqrt{7a+b}$ 에서 $7a+b=25$

$a=3$ 이므로

$a+b=7$

24. [출제의도] 이차부등식의 해를 이용하여 이차함수의 함숫값을 구한다.

부등식 $f(x) \le 0$의 해가 $-3 \le x \le 0$이므로

이차함수 $f(x)$는

$f(x) = ax(x+3)\ (a>0)$ 이고,

$f(1)=8$이므로

$f(1) = a(1+3) = 8$

$a=2$

따라서 $f(x) = 2x(x+3)$이므로

$f(4)=56$

25. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구한다.

$9^a = 8$이므로

$\dfrac{3^a-3^{-a}}{3^a+3^{-a}} = \dfrac{3^{2a}-1}{3^{2a}+1}$

$\qquad = \dfrac{9^a-1}{9^a+1}$

$\qquad = \dfrac{8-1}{8+1}$

$\qquad = \dfrac{7}{9}$

따라서 $p=9$, $q=7$이므로

$p+q=16$

26. [출제의도] 실생활의 소재를 활용하여 집합의 원소의 개수를 구한다.

이 학교 학생 전체의 집합을 U, 두 체험 활동 A, B를 신청한 학생의 집합을 각각 A, B라 하면 어느 체험 활동도 신청하지 않은 학생의 집합은 $A^C \cap B^C$이고, 하나 이상의 체험 활동을 신청한 학생의 집합은 $A \cup B$이다.

$n(U)=200$ …… ㉠

$n(A)=n(B)+20$ …… ㉡

$n(A^C \cap B^C) = n(A \cup B)-100$ …… ㉢

$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$이므로

$n(A^C \cap B^C) = n(U)-n(A \cup B)$

㉠, ㉢에서

$n(A \cup B) = \dfrac{1}{2}\{n(U)+100\} = 150$

$n(A \cup B) = n(A)+n(B)-n(A \cap B)$

이므로 ㉡에서

$2 \times n(A) - 20 - n(A \cap B) = 150$

$n(A) = \dfrac{1}{2}\{n(A \cap B)+170\}$

한편, 체험 활동 A만 신청한 학생의 집합은 $A-B$

이므로

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

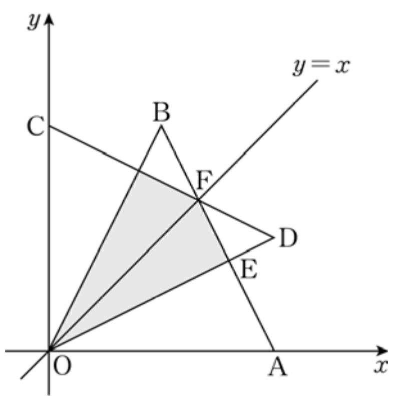
$=\frac{1}{2}\{170-n(A\cap B)\}$

이때 $0\le n(A\cap B)\le n(B)$이므로

$n(A-B)\le \frac{170-0}{2}=85$

따라서 체험 활동 A만 신청한 학생 수의 최댓값은 85이다.

27. **[출제의도] 대칭이동을 이용하여 주어진 도형의 넓이를 구한다.**



두 직선 AB, OD의 교점을 E, 직선 AB와 직선 $y=x$의 교점을 F라 하자. 직선 AB의 방정식은

$y-0=\frac{2-0}{1-2}(x-2)$ 즉, $y=-2x+4$

이다. 점 B(1, 2)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 D의 좌표는 (2, 1)이므로

직선 OD의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$이다.

$-2x+4=\frac{1}{2}x$에서 $x=\frac{8}{5}$

$-2x+4=x$에서 $x=\frac{4}{3}$

이므로 두 점 E, F의 x좌표는 각각 $\frac{8}{5}$, $\frac{4}{3}$이다.

$\triangle\mathrm{OAF}:\triangle\mathrm{OEF}=\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{EF}}$

$=\left|2-\frac{4}{3}\right|:\left|\frac{8}{5}-\frac{4}{3}\right|$

$=5:2$

이므로 삼각형 OEF의 넓이는 삼각형 OAF의 넓이의 $\frac{2}{5}$배이다. 따라서

$S=\left(\frac{1}{2}\times2\times\frac{4}{3}\right)\times\frac{2}{5}\times2=\frac{16}{15}$이므로

$60S=64$

[다른풀이]

두 직선 AB, OD의 교점을 E, 직선 AB와 직선 $y=x$의 교점을 F라 하자.

직선 AB의 방정식은

$y-0=\frac{2-0}{1-2}(x-2)$ 즉, $y=-2x+4$

이다. 점 B(1, 2)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 D의 좌표는 (2, 1)이므로

직선 OD의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$이다.

$-2x+4=\frac{1}{2}x$에서 $x=\frac{8}{5}$

$-2x+4=x$에서 $x=\frac{4}{3}$

이므로 두 점 E, F의 좌표는 각각

$\mathrm{E}\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\mathrm{F}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$\overline{\mathrm{OE}}=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

$\overline{\mathrm{EF}}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{5}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(-\frac{4}{15}\right)^2+\left(\frac{8}{15}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$

이때, 두 직선 AB, OD의 기울기의 곱이 -1이므로 삼각형 OEF는 직각삼각형이다.

$\triangle\mathrm{OEF}=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{5}}{5}\times\frac{4\sqrt{5}}{15}=\frac{8}{15}$

따라서 $S=\frac{8}{15}\times2=\frac{16}{15}$이므로

$60S=64$

28. **[출제의도] 등차수열과 등비수열을 이용하여 함수의 식을 구한다.**

함수 $g(x)=2x^2-3x+1=(x-1)(2x-1)$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 (1, 0)이다.

조건 (가)에서 $h(2)$, $h(3)$, $h(4)$가 이 순서대로 등차수열을 이루려면 좌표평면 위의 세 점

$(2,\ h(2))$, $(3,\ h(3))$, $(4,\ h(4))$

는 직선 $y=f(x)$ 위의 점이다.

$h(2)=f(2)=k$,

$h(3)=f(3)=2k$,

$h(4)=f(4)=3k$

조건 (나)에서 $h(3)$, $h(4)$, $h(5)$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $h(3)=2k$, $h(4)=3k$이므로 이 등비수열의 공비는 $\frac{3}{2}$이다. 따라서 $h(5)=\frac{9}{2}k$이다.

이때 $f(5)=4k$이고, $k\ne0$이므로 $f(5)$는 $h(5)$의 값이 될 수 없다.

따라서 $h(5)=g(5)$에서 $\frac{9}{2}k=36$이므로

$k=8$

[참고]

$k=0$이면 $f(x)=0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

29. **[출제의도] 부등식의 영역을 이용하여 수열의 항을 구한다.**

$\frac{y-10}{4}\le x\le n$에서 $\frac{y-10}{4}\le x$이고 $x\le n$

즉, $y\le 4x+10$이고 $x\le n$이다.

이때 정사각형의 왼쪽 아래의 꼭짓점의 x좌표가 k $(1\le k\le n-1)$이고 주어진 부등식의 영역에 포함되는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는 $4k+9$이므로

$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}(4k+9)$

$=4\times\frac{(n-1)n}{2}+9(n-1)$

$=(2n+9)(n-1)$

따라서 $a_2=13$, $a_6=105$이므로

$a_2+a_6=118$

30. **[출제의도] 삼차방정식의 근을 이용하여 순서쌍의 개수를 구한다.**

$ax^3+2bx^2+4bx+8a$

$=a(x^3+8)+2bx(x+2)$

$=a(x+2)(x^2-2x+4)+2bx(x+2)$

$=(x+2)\{ax^2-2(a-b)x+4a\}$

$=0$

이므로 이차방정식

$ax^2-2(a-b)x+4a=0$ $(a\ne0)$

은 -2가 아니고 정수인 서로 다른 두 근을 가져야 한다. 이때, 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $\frac{4a}{a}=4$이므로 가능한 서로 다른 두 근은

$x=1,\ x=4$ 또는 $x=-1,\ x=-4$

이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$\frac{2(a-b)}{a}=5$ 또는 $\frac{2(a-b)}{a}=-5$

이어야 하므로

$b=-\frac{3}{2}a$ 또는 $b=\frac{7}{2}a$ $(a\ne0)$

(ⅰ) $b=-\frac{3}{2}a$일 때

$a=32$이면 $b=-\frac{3}{2}\times32=-48$이므로

순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ -3)$, $(4,\ -6)$, $\cdots$, $(32,\ -48)$,

$(-2,\ 3)$, $(-4,\ 6)$, $\cdots$, $(-32,\ 48)$

의 32개이다.

(ⅱ) $b=\frac{7}{2}a$일 때

$a=14$이면 $b=\frac{7}{2}\times14=49$이므로

조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 7)$, $(4,\ 14)$, $\cdots$, $(14,\ 49)$,

$(-2,\ -7)$, $(-4,\ -14)$, $\cdots$, $(-14,\ -49)$

의 14개이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 조건을 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $32+14=46$이다.