

2016학년도 대학수학능력시험
수학영역 A형 정답 및 풀이

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|---------|
| 01. ⑤ | 02. ④ | 03. ③ | 04. ② | 05. ④ |
| 06. ① | 07. ① | 08. ② | 09. ⑤ | 10. ⑤ |
| 11. ① | 12. ③ | 13. ③ | 14. ⑤ | 15. ② |
| 16. ② | 17. ④ | 18. ③ | 19. ④ | 20. ① |
| 21. ⑤ | 22. 7 | 23. 3 | 24. 6 | 25. 11 |
| 26. 30 | 27. 21 | 28. 97 | 29. 45 | 30. 222 |

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2+5)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2+5)$$

$$= (-2)^2 + 5 = 9$$

정답 ③

1. 출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$A - B = \begin{pmatrix} 21 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

따라서, 행렬 $A - B$ 의 모든 성분의 합은
 $1 + 1 + 4 + (-1) = 5$

정답 ⑤

2. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$8^{\frac{1}{3}} + 27^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} + (3^3)^{\frac{2}{3}}$$

$$= 2^1 + 3^2$$

$$= 2 + 9 = 11$$

정답 ④

3. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

4. 출제의도 : 그래프와 행렬 사이의 관계를 알고 있는가?

정답풀이 :

주어진 그래프의 변의 개수가 7이므로
 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1
 의 개수는
 $7 \times 2 = 14$

정답 ②

5. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = x^3 + 7x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 7 \text{ 이므로}$$

$$f'(1) = 3 \times 1^2 + 7 = 10$$

정답 ④

6. 출제의도 : 확률의 관계식에서 확률의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{5}{6} \text{ 이므로}$$

$$P(A \cap B) = \frac{5}{6} \times P(A) = \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$$

정답 ①

7. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 이용하여 첫째항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_3 = 4a_1 \text{ 에서 } a_1 r^2 = 4a_1 \text{ 이므로}$$

$$r^2 = 4$$

$$a_7 = (a_6)^2 \text{ 에서 } a_1 r^6 = (a_1 r^5)^2 = a_1^2 r^{10}$$

따라서 $a_1 r^4 = 1$ 이므로

$$a_1 \times 4^2 = 16a_1 = 1$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{16}$$

정답 ①

8. 출제의도 : 그래프를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1 + 1 = 2$$

정답 ②

9. 출제의도 : 모표준편차를 이용하여 표본표준편차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{14}{\sqrt{n}} = 2$$

$$\sqrt{n} = 7$$

$$\therefore n = 49$$

정답 ⑤

10. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이차방정식 $x^2 - (n+1)x + a_n = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (n+1)^2 - 4a_n \geq 0 \text{에서}$$

$$a_n \leq \frac{(n+1)^2}{4}$$

또 이차방정식 $x^2 - nx + a_n = 0$ 의 판별식을 D_2 이라 하면

$$D_2 = n^2 - 4a_n < 0 \text{에서}$$

$$a_n > \frac{n^2}{4}$$

$$\text{즉 } \frac{n^2}{4} < a_n \leq \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$\frac{n^2}{4n^2} < \frac{a_n}{n^2} \leq \frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{4}$$

정답 ⑤

11. 출제의도 : 로그부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수조건에서

$$x-1 > 0, \frac{1}{2}x+k > 0$$

이므로 $x > 1 \cdots \textcircled{1}$

$$\log_5(x-1) \leq \log_5\left(\frac{1}{2}x+k\right) \text{ 에서}$$

$$x-1 \leq \frac{1}{2}x+k, \quad \frac{1}{2}x \leq k+1$$

$$\therefore x \leq 2(k+1) \cdots \text{㉠}$$

㉠, ㉡에서 $1 < x \leq 2(k+1)$ 이고 모든 정수 x 의 개수가 3이므로

$$2(k+1)-1=2k+1=3$$

$$\therefore k=1$$

정답 ①

12. 출제의도 : 정규분포를 따르는 확률변수에 대하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌀의 무게를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(1.5, 0.2^2)$ 을 따르고,

$Z = \frac{X-1.5}{0.2}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(1.3 \leq X \leq 1.8)$$

$$= P\left(\frac{1.3-1.5}{0.2} \leq \frac{X-1.5}{0.2} \leq \frac{1.8-1.5}{0.2}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.3413 + 0.4332 = 0.7745$$

정답 ③

13. 출제의도 : 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$n=1$ 일 때,

$$f(x) = x^2 \text{ 이고 } P(0,3), Q(1,1)$$

이므로 구하고자 하는 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \int_0^1 (1-x^2) dx$$

$$= 1 + \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

정답 ③

14. 출제의도 : 넓이와 길이를 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$Q\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, 1\right) \text{ 이므로 } \overline{PR} = 2n, \quad \overline{QR} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times 2n = \sqrt{n}$$

$$l_n = \sqrt{4n^2 + \frac{1}{n}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^2}{l_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + \frac{1}{n}}}$$

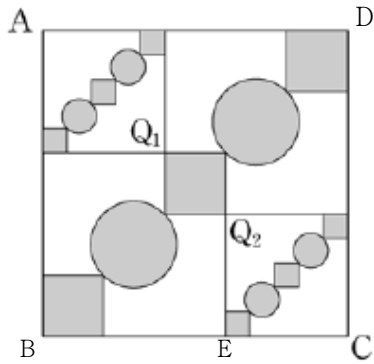
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n^3}}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

정답 ⑤

15. 출제의도 : 무한등비급수를 이용하여 반복되는 도형에서 넓이의 합에 대한 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$\overline{BE} : \overline{EC} = 3 : 2$ 이므로 닮음비는 $\frac{2}{5}$ 이

다. 따라서 넓이의 비는 $(\frac{2}{5})^2 = \frac{4}{25}$ 이고

도형의 개수는 2배씩 늘어나므로 무한등
비급수의 공비는

$$\frac{4}{25} \times 2 = \frac{8}{25}$$

또한, 그림 R_1 에서 $\overline{BD} = 5\sqrt{2}$ 이므로

$$S_1 = 3 \times 1 + 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \pi$$

$$= 3 + \pi$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3 + \pi}{1 - \frac{8}{25}}$$

$$= \frac{25}{17}(\pi + 3)$$

정답 ②

16. 출제의도 : 실생활에서 주어진 관계
식을 이용하여 실수의 값을 구할 수 있
는가?

정답풀이 :

$$\frac{W}{W_0} = \frac{1}{2} \times 10^{at} (1 + 10^{at})$$

$$3 = \frac{1}{2} \times 10^{15a} (1 + 10^{15a}) \text{에서}$$

$$(10^{15a})^2 + 10^{15a} - 6 = 0$$

$$(10^{15a} + 3)(10^{15a} - 2) = 0$$

$$10^{15a} > 0 \text{이므로 } 10^{15a} = 2$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} \times 10^{30a} (1 + 10^{30a})$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times (1 + 4) = 10$$

정답 ②

17. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 순
서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

0인 것 2개를 정하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10 \dots \text{㉠}$$

$a = b = 0$ 일 때, $c + d + e = 10$ 을 만족시키
는 자연수 c, d, e 의 순서쌍 (c, d, e) 의 개수
는

$$c = c' + 1, d = d' + 1, e = e' + 1$$

(단, c', d', e' 는 음이 아닌 정수)

라 하면

$$(c' + 1) + (d' + 1) + (e' + 1) = 10$$

$$c' + d' + e' = 7$$

을 만족시키는 순서쌍 (c', d', e') 의 개수
와 같으므로

$${}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2$$

$$= \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36 \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 구하고자 하는 순서쌍의 개수
는

$$10 \times 36 = 360$$

정답 ④

18. 출제의도 : 주어진 관계식을 이용하여 행렬의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $A+B = BABA$ 이고,

$$ABA = B+E \text{에서 } BABA = B^2+B$$

$$\text{이므로 } A+B = B^2+B$$

$$\text{에서 } A = B^2 \text{ (참)}$$

ㄴ. $ABA = B+E$ 에서 $B^2BB^2 = B+E$

$$\text{이므로 } (B^4 - E)B = E$$

$$(A^2 - E)B = E$$

$$\therefore B^{-1} = A^2 - E \text{ (거짓)}$$

ㄷ. ㄱ에서 $A = B^2$ 이므로

$$A+B = (BA)^2 \text{에서 } A+B = B^6 \text{이고,}$$

$$A+B = (B^2)^3 = A^3$$

$$ABA = B+E \text{에서 } B^5 = B+E$$

또한, $A^3 = A+B$ 의 양변에 A^2 을 곱하면

$$A^5 = A^3 + A^2B$$

$$= A+B + A^2B$$

$$= A+B + B^5$$

이므로 $A^5 - B^5 = A+B$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ③

19. 출제의도 : 수열의 일반항을 구하는 과정을 이해할 수 있는가?

정답풀이 :

$b_1 = 2$ 이고 $b_n = b_{n-1} + 2n$ ($n \geq 2$)이다.

수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 구해보면

$$b_n - b_{n-1} = 2n$$

에서

$$b_2 - b_1 = 2 \times 2$$

$$b_3 - b_2 = 2 \times 3$$

...

$$b_n - b_{n-1} = 2n$$

이므로 좌변은 좌변끼리 우변은 우변끼리 모두 더하면

$$b_n - b_1 = 2(2+3+\dots+n)$$

$$\therefore b_n = b_1 + 2(2+3+\dots+n)$$

$$= 2 + 2(2+3+\dots+n)$$

$$= 2(1+2+3+\dots+n)$$

$$= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{n}(n+1)$$

따라서, $b_n = \frac{S_{n+1}}{S_n}$ 이므로

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = n(n+1)$$

에서

$$\frac{S_2}{S_1} = 1 \times 2$$

$$\frac{S_3}{S_2} = 2 \times 3$$

...

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = (n-1)n$$

이고 좌변은 좌변끼리 우변은 우변끼리 모두 곱하면

$$\frac{S_n}{S_1} = 1 \times 2^2 \times 3^2 \times \dots \times (n-1)^2 \times n$$

$$\therefore S_n = \boxed{n} \times \{(n-1)!\}^2$$

따라서, $a_1 = 1$ 이고 $n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n \times \{(n-1)!\}^2 - (n-1) \times \{(n-2)!\}^2$$

$$= \{n(n-1)^2 - (n-1)\} \times \{(n-2)!\}^2$$

$$= \boxed{(n-1)(n^2 - n - 1)} \times \{(n-2)!\}^2$$

$$\therefore f(n) = n, g(n) = (n-1)(n^2 - n - 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore f(10) + g(6) &= 10 + 5 \times 29 \\ &= 10 + 145 = 155 \end{aligned}$$

정답 ④

20. 출제의도 : 조건을 만족시키는 다항 함수에 대하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(-x)g(-x) \\ &= -f(x)g(x) = -h(x) \end{aligned}$$

이므로 다항함수 $h(x)$ 의 그래프는 원점에 대칭이고, $h(0) = 0$ 이다.

$$h(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x$$

로 놓으면

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2n+1)a_{2n+1}x^{2n} + (2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2} \\ &\quad + \dots + a_1 \end{aligned}$$

이므로 $h'(-x) = h'(x)$ 를 만족시킨다.

$$\int_{-3}^3 (xh'(x) + 5h'(x)) dx$$

$$= 2 \int_0^3 5h'(x) dx$$

$$= 10[h(x)]_0^3$$

$$= 10(h(3) - h(0))$$

$$10(h(3) - h(0)) = 10 \text{에서}$$

$$h(3) = h(0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

정답 ①

21. 출제의도 : 조건에 맞는 삼차함수를 찾아 $\frac{f'(0)}{f(0)}$ 의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여

$$f(-1) = 0$$

또한, 조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 닫힌 구간 $[3, 5]$ 에서 x 축과 접하게 된다.

따라서,

$$f(x) = k(x+1)(x-\alpha)^2 \quad (k \neq 0, 3 \leq \alpha \leq 5)$$

라고 하면

$$f'(x) = k(x-\alpha)^2 + 2k(x+1)(x-\alpha)$$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{f'(0)}{f(0)} &= \frac{k\alpha^2 - 2k\alpha}{k\alpha^2} \\ &= 1 - \frac{2}{\alpha} \end{aligned}$$

그런데, $3 \leq \alpha \leq 5$ 이므로

$$\alpha = 3 \text{일 때 최솟값 } m = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = 5 \text{일 때 최댓값 } M = \frac{3}{5}$$

$$\therefore Mm = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

정답 ⑤

22. 출제의도 : 등차수열의 공차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_8 - a_4 = 4d = 28$$

$$\therefore d = 7$$

정답 7

23. 출제의도 : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 9^n - 13}{9^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 3 - 13 \left(\frac{1}{9} \right)^n \right\}$$

$$= 3$$

정답 3

24. 출제의도 : 행렬로 표현된 연립일차 방정식을 만족시키는 상수 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{pmatrix} 1 & a-2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & a-2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이 $x=0, y=0$ 이외의 해를 가지므로
 $(-2) \times (-4) - (a-2) \times 2 = 0$
 에서 $a=6$

정답 6

25. 출제의도 : 이산확률변수에서 기댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$E(X) = -5 \times \frac{1}{5} + 0 \times \frac{1}{5} + 5 \times \frac{3}{5}$$

$$= -1 + 3 = 2$$

$$\therefore E(4X+3) = 4E(X) + 3$$

$$= 4 \times 2 + 3 = 11$$

정답 11

26. 출제의도 : 조건부확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직원 60명을 두 부서 A, B와 남자, 여자로 나누어 표로 나타내면 다음과 같다.
 (단위 : 명)

	A 부서	B 부서
남자	10	
여자	10	0.6n

여성 직원의 수를 n 이라 하면 B 부서에 속해있는 여성 직원의 수는 $0.6n$ 이므로
 $n = 10 + 0.6n$ 에서 $n = 25$
 임의로 택한 직원이 B 부서인 사건을 E , 여성 직원인 사건을 F 라 하면

$$P(F | E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

$$= \frac{0.6n}{60}$$

$$= \frac{40}{60}$$

$$= \frac{15}{60} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

따라서 $p = \frac{3}{8}$ 이므로 $80p = 80 \times \frac{3}{8} = 30$

정답 30

27. 출제의도 : 두 함수의 곱이 연속함수가 될 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속일 때

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} (x+3) = a+3$$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} (x^2 - x) = a^2 - a$$

이므로

$$a^2 - a = a + 3, \quad a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a-3)(a+1) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 3$$

(ii) 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 불연속일 때

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \{x - (2a + 7)\}$$

$$= a - (2a + 7)$$

$$= -a - 7 = 0$$

$$\therefore a = -7$$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$-1 \times 3 \times (-7) = 21$$

정답 21

28. 출제의도 : 함수의 극한과 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서 $x \rightarrow 2$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 하므로

$$f(2) = g(2)$$

조건 (가)에서 $x = 2$ 를 대입하면

$$g(2) = 8f(2) - 7 \text{ 이므로}$$

$$g(2) = 8g(2) - 7 \text{ 에서 } g(2) = 1$$

또 조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{f(x) - f(2)\} - \{g(x) - g(2)\}}{x - 2}$$

$$= f'(2) - g'(2) = 2$$

조건 (가)의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x)$$

$x = 2$ 를 대입하면

$$g'(2) = 12 \times 1 + 8f'(2)$$

$$g'(2) = 12 \times 1 + 8\{g'(2) + 2\} \\ = 8g'(2) + 28$$

$$\text{에서 } g'(2) = -4$$

따라서 접선의 방정식은

$$y - 1 = -4(x - 2), \quad y = -4x + 9 \text{ 이므로}$$

$$a^2 + b^2 = (-4)^2 + 9^2 = 97$$

정답 97

29. 출제의도 : 정적분의 의미를 이해하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(0) = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = ax^2 + bx \quad (a \neq 0) \text{ 라 하자.}$$

조건 (가)에 의하여

$$\int_0^2 |f(x)| dx = 4, \quad \int_0^2 f(x) dx = -4$$

이므로 구간 $[0, 2]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이다.

또한, 조건 (나)에 의하여

$$\int_2^3 |f(x)| dx = \int_2^3 f(x) dx$$

이므로 구간 $[2, 3]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이다.

따라서, $f(2) = 0$ 이므로

$$f(2) = 4a + 2b = 0$$

$$\therefore b = -2a$$

즉, $f(x) = ax^2 - 2ax$ 이므로

$$\int_0^2 (ax^2 - 2ax) dx$$

$$= \left[\frac{a}{3} x^3 - ax^2 \right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3} a - 4a = -\frac{4}{3} a = -4$$

$\therefore a=3$

따라서, $f(x) = 3x^2 - 6x$ 이므로

$f(5) = 3 \times 5^2 - 6 \times 5 = 75 - 30 = 45$

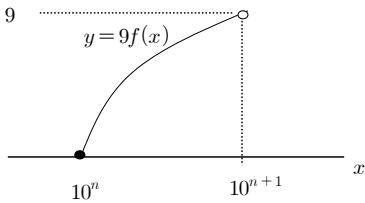
정답 45

30. 출제의도 : 상용로그의 가수를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$n \geq -2$ 인 정수에 대하여

$10^n \leq x < 10^{n+1}$ 일 때, 함수 $y = 9f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



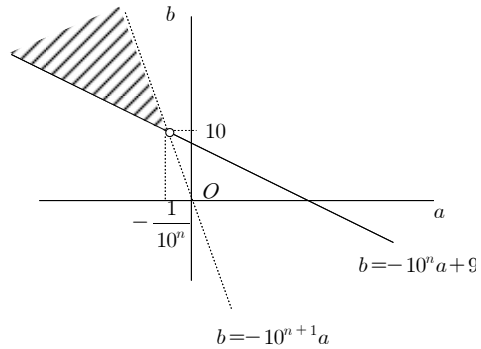
따라서, 조건 (나)를 만족시키기 위해서는

(i) $n \geq -1$ 인 정수일 때,

$9 \leq a \times 10^n + b, a \times 10^{n+1} + b < 0$

$\therefore -10^n a + 9 \leq b < -10^{n+1} a$

따라서, 조건 (가)를 만족시키면서 위의 부등식을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 가 나타내는 영역은 그림과 같다.



이때, $(a+20)^2 + b^2$ 은 점 $(-20, 0)$ 과 점 (a, b) 사이의 거리의 제곱이다. 따라서, $n = -1$ 일 때, 점 $(-20, 0)$ 에서 직선 $b = -10^n a + 9$ 까지의 거리의 제곱이 최소

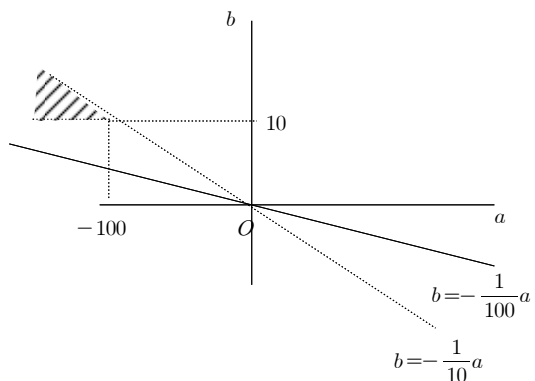
이므로 $(\frac{|10^{-1} \times (-20) - 9|}{\sqrt{(10^{-1})^2 + 1^2}})^2 = \frac{121}{101} = 100 \times \frac{121}{101}$

(ii) $n = -2$ 일 때,

$\frac{1}{100} a + b \geq 0, \frac{1}{10} a + b < 0$

$-\frac{1}{100} a \leq b < -\frac{1}{10} a$

따라서, 조건 (가)를 만족시키면서 위의 부등식을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 가 나타내는 영역은 그림과 같다.



따라서, $(a+20)^2 + b^2$ 의 값은 점 $(-20, 0)$ 에서 위의 영역 위의 점 (a, b) 까지의 거

리의 제곱이므로

$$\sqrt{(-100+20)^2+10^2}=10\sqrt{65}$$

보다 크게 된다.

(i), (ii)에 의하여 최솟값은 $100 \times \frac{121}{101}$ 이

므로 $p+q$ 의 값은

$$121+100=222$$

정답 222