

수학 영역(나형)

제 2 교시

1

1. 두 집합 $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ 에 대하여 집합 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은? [2점]

- ① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

2. $\log_6 2 + \log_6 3$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \times 3^n}{3^n + 1}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

4. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 \times a_4 = 64$ 일 때, a_3 의 값은? [3점]

- ① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

5. 유리함수 $f(x) = \frac{1}{x+2} + a$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = b, y = 3$ 일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a - b$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

7. 명제 ' $x^2 - ax + 9 \neq 0$ 이면 $x \neq 3$ 이다.'가 참일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

6. 다항함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 $f'(x) = 2x + 5$ 이다. $f(0) = 1$ 일 때, $f(2)$ 의 값은? [3점]

- ① 9 ② 11 ③ 13
 ④ 15 ⑤ 17

8. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-4}{3}\right)^n$ 이 수렴하도록 하는 정수 x 의 개수는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

10. 함수 $f(x)=2x^2+5x$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{3h}$ 의 값은?

[3점]

- ① 1 ② 3 ③ 5
 ④ 7 ⑤ 9

9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 x 가
 $x = t^3 - 4t^2 - 3t + 4$ 일 때, 점 P가 출발 후 운동 방향을 바꾸는
 순간의 시각 t 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

11. 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^5 a_{2k-1} \text{의 값은? [3점]}$$

- ① 341 ② 343 ③ 345
 ④ 347 ⑤ 349

12. 비행기가 항력을 이겨서 등속수평비행하는 데 필요한 동력을 필요마력이라 한다. 필요마력 P (마력)와 비행기의 항력계수 C , 비행속력 V (m/초), 날개의 넓이 S (m²) 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

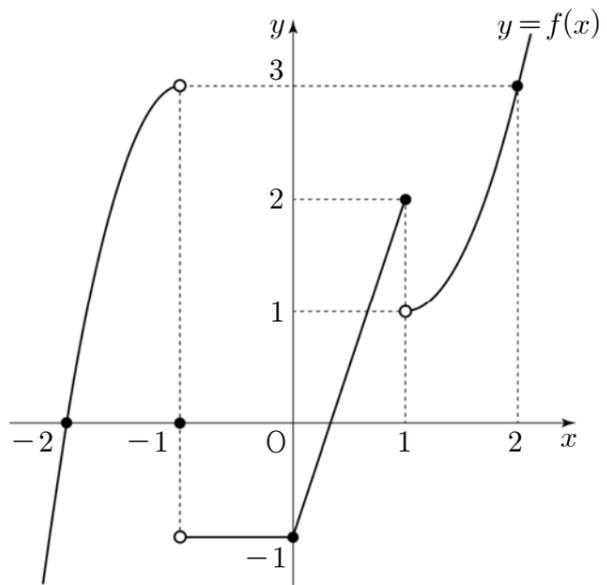
$$P = \frac{1}{150} k C V^3 S \text{ (단, } k \text{는 양의 상수이다.)}$$

날개의 넓이의 비가 1:3인 두 비행기 A, B 가 동일한 항력계수를 갖고 각각 등속수평비행하고 있을 때, 필요마력의 비는 1: $\sqrt{3}$ 이고

비행속력은 각각 V_A, V_B 이다. $\frac{V_A}{V_B}$ 의 값은? [3점]

- ① $3^{\frac{1}{6}}$ ② $3^{\frac{1}{3}}$ ③ $3^{\frac{1}{2}}$
 ④ $3^{\frac{2}{3}}$ ⑤ $3^{\frac{5}{6}}$

[13 ~ 14] 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. $(f \circ f)(1)$ 의 값은? [3점]

- ① -1 ② 0 ③ 1
 ④ 2 ⑤ 3

14. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)f(1-x)$ 의 값은? [4점]

- ① -6 ② -3 ③ 1
 ④ 3 ⑤ 6

15. 좌표평면에서 곡선 $y = \sqrt{x+4} + 1$ 이 두 직선 $x=0$, $y = -\frac{1}{4}x$ 와

만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는?
(단, O는 원점이다.) [4점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

16. 수열 $\{a_n\}$ 에서 일반항 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ 일 때,

$n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = na_n \cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=2$ 일 때, (*)에서

$$\text{(좌변)} = a_1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \boxed{\text{(가)}}$$

$$\text{(우변)} = 2a_2 = \boxed{\text{(가)}}$$

(좌변)=(우변)이므로 (*)이 성립한다.

(2) $n=m$ ($m \geq 2$)일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{m-1} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{i} = ma_m$$

이다.

$n=m+1$ 일 때, (*)이 성립함을 보이자.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m + \sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{i}$$

$$= \boxed{\text{(나)}} \times a_m + \frac{1}{m+1}$$

$$= (m+1) \left\{ a_{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right\} + \frac{1}{m+1}$$

$$= (m+1)a_{m+1}$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(1), (2)에 의하여

$n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 (*)이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p , (나)에 알맞은 식을 $f(m)$ 이라 할 때,
 $p \times f(3)$ 의 값은? [4점]

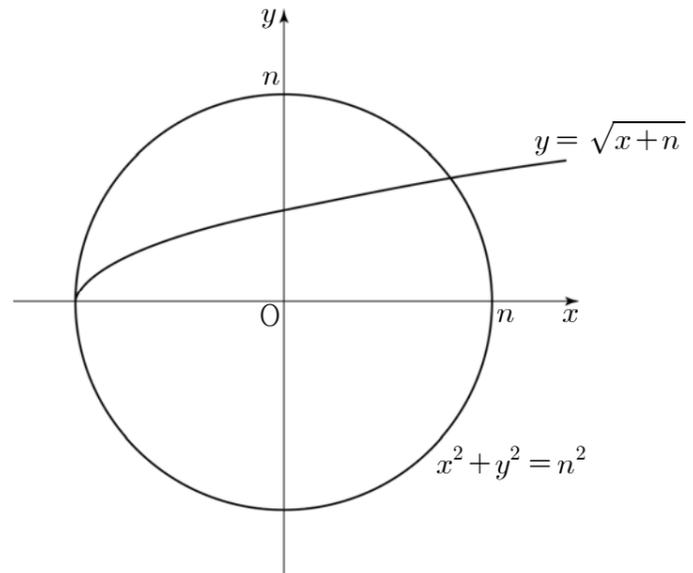
- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

17. 두 실수 a, b 에 대하여 조건 p 가 조건 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >	
ㄱ. $p : a^2 + b^2 = 0$	$q : a = b$
ㄴ. $p : ab < 0$	$q : a < 0$ 또는 $b < 0$
ㄷ. $p : a^3 - b^3 = 0$	$q : a^2 - b^2 = 0$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 원 $x^2 + y^2 = n^2$ 과 곡선 $y = \sqrt{x+n}$ 이 만나는 두 점 사이의 거리를 a_n , 원의 지름의 길이를 b_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n)$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
 ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

19. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 가

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x = 1, 2) \\ x+a & (x = 3, 4) \end{cases} \quad (a \text{는 상수})$$

이고, 함수 f 의 역함수 g 가 존재한다.

$g^1(x) = g(x), g^{n+1}(x) = g(g^n(x))$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)라 할 때,
 $a + g^{10}(2) + g^{11}(2)$ 의 값은? [4점]

- ① 4 ② 5 ③ 6
- ④ 7 ⑤ 8

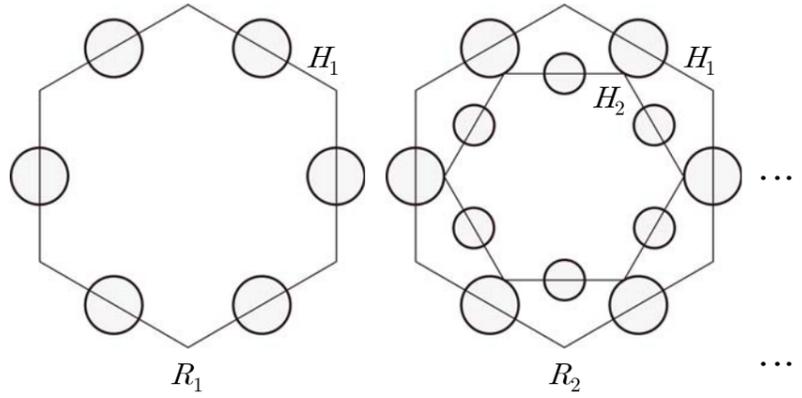
20. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정육각형 H_1 이 있다. 정육각형 H_1 의 각 변에 대하여 변을 삼등분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 그리고, 6개의 원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에 정육각형 H_1 의 내부에 있는 각 반원의 호를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_2 라 하자. 정육각형 H_2 의 각 변에 대하여 변을 삼등분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 그리고, 새로 그려진 6개의 원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

그림 R_2 에 정육각형 H_2 의 내부에 있는 각 반원의 호를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_3 이라 하자. 정육각형 H_3 의 각 변에 대하여 변을 삼등분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 그리고, 새로 그려진 6개의 원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자.

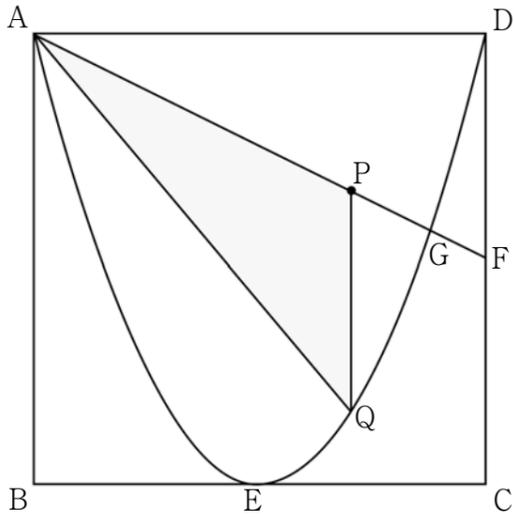
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = k(3\sqrt{3} - m)\pi$ 이다.

$11k + m$ 의 값은? (단, k, m 은 유리수이다.) [4점]



- ① 90 ② 101 ③ 112
- ④ 123 ⑤ 134

21. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 선분 BC와 선분 CD의 중점을 각각 E, F라 하자. 점 E를 꼭짓점으로 하고 두 점 A, D를 지나는 포물선과 선분 AF가 만나는 점을 G라 하자. 선분 AG 위를 움직이는 점 P를 지나고 직선 AB와 평행한 직선이 포물선과 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 AQP의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 점 A와 점 G가 아니다.) [4점]



- ① $\frac{85}{27}$ ② $\frac{343}{108}$ ③ $\frac{173}{54}$
 ④ $\frac{349}{108}$ ⑤ $\frac{88}{27}$

단답형

22. 함수 $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$ 에 대하여 $f'(6)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 6n$ 일 때, a_5 의 값을 구하시오. [3점]

24. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x+2} - 2}$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(x^2 + a)}{x - 3} & (x \neq 3) \\ b & (x = 3) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 두 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, a\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 에 대하여 집합 $X = \{x+y \mid x \in A, y \in B\}$ 라 할 때, $n(X) = 10$ 이 되도록 하는 자연수 a 의 최댓값을 구하시오. [4점]

27. 두 양수 a, b 에 대하여 $2^a = 3^b$, $a+b = \frac{4}{3}ab$ 일 때, $8^a \times 3^b$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 첫째항이 6이고 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 이차방정식 $x^2 - (a_n + a_{n+2})x - a_{n+1} = 0$ 의 서로 다른 두 실근을 α_n, β_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} (\alpha_n + 1)(\beta_n + 1) = 180$ 일 때, a_{11} 의 값을 구하시오. [4점]

29. 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 두 곡선 $y = \sqrt{x+n^2}$,
 $y = -\sqrt{x+n}$ 과 x 축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에
포함되고 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a_n 이라 하자.

$\sum_{n=1}^5 a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = t$ 가
만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$ 라 하자.
함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 $x = 0$, $x = 6$ 에서 불연속이다.
(나) 함수 $f(x)g(x)$ 는 모든 실수에서 연속이다.
(다) $f(5)f(7) < 0$

$f(-4)$ 의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.