2016학년도 대학수학능력시험 대비

2015학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

수학'B'형 정답

1	⑤	2	②	3	①	4	③	5	⑤
6	⑤	7	④	8	④	9	②	10	④
11	①	12	④	13	⑤	14	②	15	③
16	③	17	①	18	②	19	①	20	③
21	⑤	22	9	23	14	24	11	25	64
26	16	27	6	28	26	29	32	30	134

해 설

1. **[출제의도] 행렬의 합을 계산한다.**
$A+E=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$ 이므로 모든 성분의 합은 5

2. **[출제의도] 지수함수의 극한값을 계산한다.**
$\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{2}$

3. **[출제의도] 삼각함수의 값을 계산한다.**
$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$

4. **[출제의도] 적분의 성질을 이해하여 정적분의 값을 구한다.**
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\cos x\,dx=3\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=3$

5. **[출제의도] 벡터의 성질을 이해하여 크기를 구한다.**
$\vec{a}+\vec{b}=(2,3)+(1,1)=(3,4)$
$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

6. **[출제의도] 무리방정식의 성질을 이해하여 실근을 구한다.**
$\sqrt{x^2-3x+6}=X$로 치환하면
주어진 식은 $X^2-6=X$
$(X-3)(X+2)=0$에서 $X\ge0$이므로
$\sqrt{x^2-3x+6}=3$, $x^2-3x-3=0$
따라서 모든 실근의 곱은 -3

7. **[출제의도] 조건부 확률을 이해하여 확률을 구한다.**
$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\dfrac{7}{12}$
$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{4}{7}$

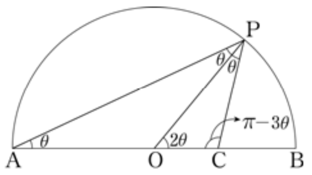
8. **[출제의도] 일차변환의 성질을 이해하여 옮겨지는 점의 좌표를 구한다.**
일차변환 f를 나타내는 행렬을 M이라 하면
$M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ 이므로
$M\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=2M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+5M\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}$
따라서 $a+b=18$

9. **[출제의도] 무한급수의 수렴과 수열의 극한값 사이의 관계를 이해하여 극한값을 구한다.**
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n}{n+3}\right)=5$ 이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n}{n+3}\right)=0$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3}=2$
따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n-2n}{a_n+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5a_n}{n}-2}{\frac{a_n}{n}+2+\frac{1}{n}}=2$

10. 'A'형 15번과 동일

11. **[출제의도] 모비율의 신뢰구간을 이해하여 표본의 크기를 추측한다.**
신뢰도 95%의 신뢰구간은
$\left[0.2-1.96\times\dfrac{\sqrt{0.2\times0.8}}{\sqrt{n}},\ 0.2+1.96\times\dfrac{\sqrt{0.2\times0.8}}{\sqrt{n}}\right]$
$2\times1.96\times\dfrac{\sqrt{0.2\times0.8}}{\sqrt{n}}=0.112$ 이므로 $n=196$

12. **[출제의도] 사인법칙을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.**



삼각형 POC에서 사인법칙을 적용하면
$\overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{\sin\theta}{\sin3\theta}$ 이므로
$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\overline{\mathrm{OC}}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}$
$\displaystyle=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{3\theta}{\sin3\theta}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

13. **[출제의도] 직각이등변삼각형을 이용하여 수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.**
수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4이고 공차가 4인 등차수열이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}a_n=\frac{5(2\times4+4\times4)}{2}=60$

14. **[출제의도] 타원의 성질을 이해하여 삼각형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.**
타원의 장축의 길이를 $2a$라 하면 삼각형 FPQ의 둘레의 길이가 $12\sqrt{2}$ 이므로
$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{PF}}=(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}})+(\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}})$
$=4a=12\sqrt{2}$
$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PF'}}=a=3\sqrt{2}$
$\overline{\mathrm{F'Q}}=k$라 하면 삼각형 FPQ는 직각삼각형이므로
$(k+3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2=(6\sqrt{2}-k)^2$에서 $k=\sqrt{2}$
따라서 구하는 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=12$

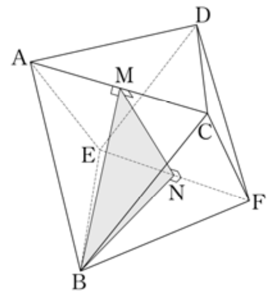
15. 'A'형 16번과 동일

16. 'A'형 19번과 동일

17. 'A'형 20번과 동일

18. **[출제의도] 중복조합의 성질을 이해하여 경우의 수를 구한다.**
네 자리 자연수의 각 자리의 수를 각각 x, y, z, w라 하면 $x+y+z+w=14$
x, y, z, w가 모두 홀수이므로
$x=2a+1$, $y=2b+1$, $z=2c+1$, $w=2d+1$
(단, a, b, c, d는 0이상 4이하의 정수)
$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)+(2d+1)=14$
$a+b+c+d=5$
a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 5개를 택한다. 이때 a, b, c, d는 4이하의 정수이므로 한 가지만 5번 택하는 4가지 경우는 제외한다.
${}_4\mathrm{H}_5-4={}_{4+5-1}\mathrm{C}_5-4={}_8\mathrm{C}_5-4=\dfrac{8!}{5!3!}-4=52$

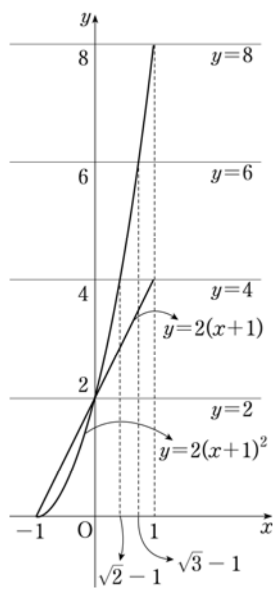
19. **[출제의도] 정사영의 성질을 이해하여 넓이를 구한다.**



선분 AC와 EF의 중점을 각각 M, N이라 하면
사각형 AEFC가 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{MN}}=2$
$\overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{BN}}=\sqrt{3}$
$\cos(\angle\mathrm{MBN})=\dfrac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$ 이므로
$S_1=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\right)\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
두 평면 BEF와 CBF가 이루는 각의 크기는 두 평면 ACD와 ABC가 이루는 각의 크기와 같다.
평면 BEF와 평면 ACD가 평행하므로
$S_2=S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\therefore S_1+S_2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

20. **[출제의도] 실생활과 관련하여 조건부 확률을 구하는 문제를 해결한다.**
학생 A와 B가 서로 다른 구역의 좌석을 배정받는 사건을 T, 학생 C와 D가 같은 구역에 같은 열의 좌석을 배정받는 사건을 U라 하자.
$\mathrm{P}(T)=\dfrac{2\times(2\times3\times3!)}{5!}=\dfrac{3}{5}$
두 학생 A, B가 서로 다른 구역에 배정받을 때, 두 학생 C, D가 (나) 구역의 2열에 배정받아야 하므로
$\mathrm{P}(U\cap T)=\dfrac{2\times(2\times1\times2!)}{5!}=\dfrac{1}{15}$
따라서 $\mathrm{P}(U|T)=\dfrac{\mathrm{P}(U\cap T)}{\mathrm{P}(T)}=\dfrac{1}{9}$

21. **[출제의도] 적분법을 이용하여 방정식의 근의 개수를 구하는 문제를 해결한다.**
함수 $f(x)$는 주기가 2이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 실수 t와 정수 k에 대하여
$\displaystyle\int_t^{t+2k}f(x)dx=0$, $\displaystyle\int_{-t}^{t+2k}f(x)dx=0$
따라서 구간 $[-1,1]$에서 방정식 $h(x)=0$
즉 $\displaystyle\int_{g(x)}^{g(x+1)}f(t)\,dt=0$을 만족시키려면
$g(x+1)-g(x)=2n$ (n은 정수)
또는 $g(x+1)+g(x)=2m$ (m은 정수)이어야 한다.
$g(x)=x(x+1)$이므로 $g(x+1)-g(x)=2(x+1)$
$g(x+1)+g(x)=2(x+1)^2$
구간 $[-1,1]$에서 두 함수 $y=2(x+1)$, $y=2(x+1)^2$의 그래프는 그림과 같으므로
$2(x+1)=2n$(n은 정수)를 만족시키는 x의 값은 -1, 0, 1이고, $2(x+1)^2=2m$(m은 정수)를 만족시키는 x의 값은 -1, 0, $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{3}-1$, 1이다.
따라서 서로 다른 실근의 개수는 5



22. [출제의도] 지수와 로그의 값을 계산한다.

$9^{\frac{1}{2}} \times \log_2 8 = (3^2)^{\frac{1}{2}} \times \log_2 2^3 = 3 \times 3 = 9$

23. [출제의도] 미분계수의 값을 계산한다.

$f'(x) = 14xe^{x^2-1}$ 이므로 $f'(1) = 14$

24. [출제의도] 분수부등식을 이해하여 부등식을 만족시키는 정수해의 개수를 구한다.

$\dfrac{1}{x-10} \le \dfrac{1}{x+2}$ 에서 $\dfrac{12}{(x-10)(x+2)} \le 0$

$12(x-10)(x+2) \le 0,\ x \ne -2,\ x \ne 10$

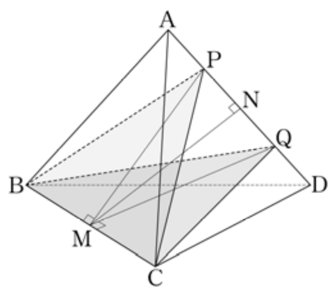
따라서 $-2 < x < 10$ 이므로 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는 11

25. [출제의도] 포물선의 접선의 방정식을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

기울기가 $\dfrac{1}{2}$ 인 접선의 방정식은 $y = \dfrac{1}{2}x + 8$ 이므로

구하는 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times 16 \times 8 = 64$

26. [출제의도] 이면각의 정의를 이해하여 이면각의 크기를 구한다.



두 선분 BC, AD의 중점을 각각 M, N이라 하면, $\overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{DM}} = 2\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{MN}} = 2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{PN}} = \overline{\mathrm{QN}} = 1$ 이므로 $\overline{\mathrm{PM}} = \overline{\mathrm{QM}} = 3$

$\theta = \angle\mathrm{PMQ}$ 이고, $\overline{\mathrm{PQ}} = 2$ 이므로

$\cos\theta = \dfrac{3^2+3^2-2^2}{2 \times 3 \times 3} = \dfrac{7}{9}$, 따라서 $p+q = 16$

27. [출제의도] 치환적분법과 부분적분법을 이해하여 정적분의 값을 구한다.

$\displaystyle\int_0^1 (x-1)f'(x+1)dx = -4$ 에서 $x+1 = t$ 로 놓으면

$\dfrac{dx}{dt} = 1$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=2$

$$\int_0^1 (x-1)f'(x+1)dx$$

$$= \int_1^2 (t-2)f'(t)dt = \Big[(t-2)f(t)\Big]_1^2 - \int_1^2 f(t)dt$$

$$= f(1) - \int_1^2 f(t)dt = 2 - \int_1^2 f(t)dt = -4$$

따라서 $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = 6$

28. [출제의도] 표본평균의 확률분포를 이해하여 기댓값을 구한다.

$\mathrm{P}(\overline{X}=1) = \dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{1}{49}$ 에서 $n=6$

$\mathrm{E}(\overline{X})$ 는 모평균과 같으므로

$\mathrm{E}(\overline{X}) = \dfrac{1+3n}{7} = \dfrac{19}{7}$ 이므로 $p+q = 26$

29. [출제의도] 정삼각형의 성질과 미분법을 이용하여 접점의 좌표를 구하는 문제를 해결한다.

직선 l 의 기울기가 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이고, 세 직선 l, m, n 으로 둘러싸인 삼각형이 정삼각형이므로 두 접선 m, n 과 직선 l 이 이루는 예각의 크기는 $60°$ 이다.

직선 l 과 이루는 예각의 크기가 $60°$ 인 직선의 기울기를 k 라 하면 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\left|\dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - k}{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}k}\right| = \sqrt{3}$, $k = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$ 또는 $k = 3\sqrt{3}$

$f(x) = \sqrt{3}\ln x$ 에서 $f'(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{x}$ 이므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{\beta} = 3\sqrt{3}$

$\alpha = 5$, $\beta = \dfrac{1}{3}$ 이므로 $6(\alpha+\beta) = 32$

30. [출제의도] 공간도형의 성질을 이용하여 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

원 C 의 중심을 O' 이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OO}'} + \overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{B}})$

$\qquad = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OO}'} + \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{B}}$

평면 $x-y+z-6=0$ 을 α 라 하면 구의 중심과 점 O' 을 지나는 직선 위의 점의 좌표가 $(t,\ -t,\ t+3)$ 이고 점 O' 이 평면 α 위의 점이므로

$\mathrm{O}'(1,\ -1,\ 4)$ 이다. 따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OO}'} = 12$

구 S 의 중심에서 평면 α 까지의 거리 $\sqrt{3}$, 구의 반지름의 길이 2에서 원 C 의 반지름의 길이는 1 평면 α 와 직선 OA가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{(1, -1, 1) \cdot (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)}{\sqrt{1+1+1}\,\sqrt{2+2+9}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{13}$, $\overline{\mathrm{O}'\mathrm{B}} = 1$ 이고, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{B}}$ 가 이루는 각의 크기를 β 라 하면 $\theta \le \beta \le \pi - \theta$ 이므로

$\cos(\pi - \theta) \le \cos\beta \le \cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}}$, $\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{13}$, $\overline{\mathrm{O}'\mathrm{B}} = 1$ 이고

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{B}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{B}}|\cos\beta$ 이므로

$-\sqrt{10} \le \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{B}} \le \sqrt{10}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 의 최댓값은 $12 + \sqrt{10}$, 최솟값은 $12 - \sqrt{10}$ 이므로 곱은 134