2016학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 B형 정답 및 풀이

01. ⑤	02. ①	03. ③	04. ④	05. ③
06. ⑤	07. ⑤	08. ②	09. ②	10. ④
11. ④	12. ②	13. ①	14. ④	15. ①
16. ①	17. ③	18. ②	19. ⑤	20. ③
21. ①	22. 6	23. 4	24. 2	25. 84
26. 162	27. 32	28. 80	29. 40	30. 15

1. **출제의도** : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$2A+B=2\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\4&a\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5&2\\4&a+2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5&2\\4&7\end{pmatrix}$$

따라서 $a+2=7$에서

$a=5$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 여러 가지 함수의 극한값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{xe^x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\times\frac{1}{e^x}\right)$$

$$=1\times1$$

$$=1$$

정답 ①

3. **출제의도** : 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열의 공비를 r이라 하면 첫째항이 4이므로 $3a_5=a_7$에서

$3\cdot4\cdot r^4=4\cdot r^6$

$r^2=3$

따라서

$a_3=4\times r^2$

$=4\times3$

$=12$

정답 ③

4. **출제의도** : 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $\mathrm{P}(2, 2, 3)$을 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는

$\mathrm{Q}(-2, 2, 3)$

이므로

두 점 $\mathrm{P}(2, 2, 3)$, $\mathrm{Q}(-2, 2, 3)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-4)^2+0+0}=4$

정답 ④

5. **출제의도** : 도함수와 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(2e^x+1)^3$에서

$f'(x)=3(2e^x+1)^2\times2e^x$

이므로

$f'(0)=3\times3^2\times2$

$=54$

정답 ③

6. **출제의도** : 성분을 이용하여 평면벡터의 내적을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overrightarrow{OA}=(4,2)$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

$=(2,0)-(0,2)$

$=(2,-2)$

$\therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=(4,2)\cdot(2,-2)$

$=8+(-4)$

$=4$

정답 ⑤

7. **출제의도** : 합성변환에 의하여 옮겨진 점을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

일차변환 g는 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전하는 회전변환이므로 이를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}$$

그러므로 합성변환 $f\circ g$에 의하여 점 $(3,3)$이 옮겨진 점은

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix}$$

따라서 $\mathrm{P}(0,\ 6\sqrt{2})$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=6\sqrt{2}$

정답 ⑤

8. **출제의도** : 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수조건에 의하여

$4+x>0,\ 4-x>0$

$\therefore\ -4<x<4$

$\log_2(4+x)+\log_2(4-x)=3$에서

$\log_2(4+x)(4-x)=3$

$(4+x)(4-x)=2^3=8$

$16-x^2=8,\ x^2=8$

$-4<x<4$이므로

$x=2\sqrt{2}$ 또는 $x=-2\sqrt{2}$

따라서 주어진 방정식의 모든 해의 곱은

$(2\sqrt{2})\times(-2\sqrt{2})=-8$

정답 ②

9. **출제의도** : 확률의 성질을 이용하여 확률의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A, B^c도 서로 독립이고 두 사건 A^c, B도 서로 독립이다.

그러므로

$$\mathrm{P}(A\cap B^c)+\mathrm{P}(A^c\cap B)=\frac{1}{3}$$

에서

$$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c)+\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}+\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$$

이때, $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$이므로 대입하면

$$\frac{1}{6}\{1-\mathrm{P}(B)\}+\frac{5}{6}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$$

$\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$

따라서, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

정답 ②

10. **출제의도** : 미분을 활용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=\ln 5x$ 에서

$y'=\frac{5}{5x}=\frac{1}{x}$ 이므로

$x=\frac{1}{5}$ 에서의 미분계수는 5이다.

따라서 곡선 $y=\ln 5x$ 위의 점 $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$에서의 접선의 방정식은

$y=5\left(x-\frac{1}{5}\right)$

$=5x-1$

이므로 접선의 y절편은 -1이다.

정답 ④

11. **출제의도** : 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 두 직선이 이루는 예각의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 직선 $x-y-1=0$, $ax-y+1=0$의 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하면

$\tan\theta_1=1$, $\tan\theta_2=a$

그러므로 두 직선이 이루는 예각의 크기 θ에 대하여 $\tan\theta=\frac{1}{6}$이므로

$\tan\theta=|\tan(\theta_2-\theta_1)|$

$=\left|\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}\right|$

$=\left|\frac{a-1}{1+a}\right|$

$=\frac{1}{6}$

이때, $a>1$이므로

$\frac{a-1}{1+a}=\frac{1}{6}$

$6a-6=1+a$

$a=\frac{7}{5}$

정답 ④

12. **출제의도** : 포물선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하자.

점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$y_1 y=2(x+x_1)$

접선이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$0=2(-2+x_1)$에서

$x_1=2$

$y_1{}^2=4x_1=8$

$y_1=2\sqrt{2}$ $(\because\ y_1>0)$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 PFH에서

$\overline{\mathrm{FH}}=2-1=1$,

$\overline{\mathrm{PH}}=2\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$

이므로

$\cos(\angle\mathrm{PFH})=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \cos(\angle\mathrm{PFO}) = \cos(\pi - \angle\mathrm{PFH})$

$= -\cos(\angle\mathrm{PFH})$

$= -\dfrac{1}{3}$

정답 ②

13. **출제의도** : 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모표준편차가 10인 모집단에서 크기 n인 표본을 추출하였을 때 그 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간은

$$\left[\overline{x} - 1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}},\ \overline{x} - 1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}\right]$$

이때, 신뢰구간이 $[38.08,\ 45.92]$이므로

$\overline{x} - 1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}} = 38.08$ ---㉠

$\overline{x} + 1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}} = 45.92$ ---㉡

㉡에서 ㉠을 변변 빼면

$2\times1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}} = 7.84$

$\sqrt{n} = 5$

$n = 25$

정답 ①

14. **출제의도** : 회전체의 부피를 구할 수 있는가?

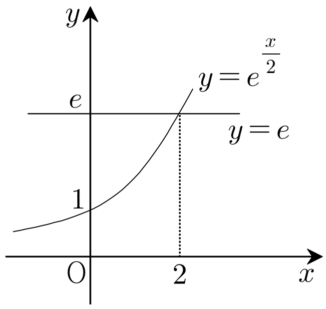
정답풀이 :

곡선 $y = e^{\frac{x}{2}}$과 직선 $y = e$의 교점의 좌표를 구하면

$y = e^{\frac{x}{2}} = e$에서

$\dfrac{x}{2} = 1$, $x = 2$이므로

교점의 좌표는 $(2,\ e)$이다.



따라서 곡선 $y = e^{\frac{x}{2}}$과 y축 및 직선 $y = e$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는

$\pi\displaystyle\int_0^2 e^2\,dx - \pi\int_0^2 \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 dx$

$= \pi\displaystyle\int_0^2 (e^2 - e^x)\,dx$

$= \pi\left[e^2 x - e^x\right]_0^2$

$= \pi(2e^2 - e^2 + 1)$

$= (e^2 + 1)\pi$

정답 ④

15. **출제의도** : 경우의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하는 경우는 1의 숫자가 적힌 공의 개수에 따라 각 경우로 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) 1의 숫자가 적힌 공 1개

1, 2, 3, 4의 숫자가 적힌 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!$

(ⅱ) 1의 숫자가 적힌 공이 2개
2, 3, 4의 숫자가 적힌 공 중 2개를 택하는 경우의 수는

$_3C_2$

이 각각에 대하여 1이 적힌 공 2개와 위의 공 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}$

이때, 경우의 수는

$_3C_2 \times \frac{4!}{2!}$

그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에서 4개의 공을 나열하는 경우의 수는

$4! + {_3C_2} \times \frac{4!}{2!} = 60$

한편, 나열된 순서대로 공에 적힌 수를 a, b, c, d라 할 때, $a \le b \le c \le d$인 경우의 수는 다음 각 경우로 나누며 다음과 같다.

(ⅰ) 1이 적힌 공이 1개인 경우
2, 3, 4가 적힌 공을 모두 뽑는 경우의 수이므로

$_3C_3$

(ⅱ) 1이 적힌 공이 2개인 경우
2, 3, 4가 적힌 공을 2개 뽑는 경우의 수이므로

$_3C_2$

그러므로 위의 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 경우의 수는

$_3C_3 + {_3C_2} = 4$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{60} = \frac{1}{15}$

정답 ①

16. **출제의도** : 수열의 일반항을 구하는 과정을 이해할 수 있는가?

정답풀이 :

$b_n = (a_n)^n$이라 하면

$b_1 = 10$이고

주어진 식으로부터

$b_{n+1} = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \quad (n \ge 1)$

이다. $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$라 하면

$b_{n+1} = \frac{S_n}{n}$에서

$S_n = nb_{n+1} = n(S_{n+1} - S_n)$
$= nS_{n+1} - nS_n$

$S_{n+1} = \boxed{\frac{n+1}{n}} \times S_n$

이다.

$S_1 = 10$이고,

$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+1}{n}$이므로

$n \ge 2$일 때,

$S_n = S_1 \times \frac{S_2}{S_1} \times \frac{S_3}{S_2} \times \cdots \times \frac{S_n}{S_{n-1}}$

$= 10 \times \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{n}{n-1}$

$= 10n$

$S_1 = 10$이므로

$S_n = \boxed{10n} \quad (n \ge 1)$

이다.

따라서 $f(n) = \frac{n+1}{n}$, $g(n) = 10n$이므로

$f(5) \times g(6) = \frac{6}{5} \times 60 = 72$

정답 ①

17. 출제의도 : 행렬에 관련된 성질을 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $B^2+AB=E$에서

$(B+A)B=E$

이므로

$B(B+A)=E$

그러므로 $B^2+BA=E$

이 식에서 $B^2+AB=E$를 변끼리 빼면

$BA-AB=O$

그러므로

$AB=BA$ <참>

ㄴ. ㄱ에서 $(B+A)B=E$이므로

$B^{-1}=B+A$ ---㉠

또, $B^2=B-E$에서

$B-B^2=E$

$B(E-B)=E$

$B^{-1}=E-B$ ---㉡

㉠과 ㉡에서

$B+A=E-B$

$A+2B=E$ <참>

ㄷ. ㄴ에서 $A=E-2B$이므로

$A^2=(E-2B)^2$

$=E-4B+4B^2$

이때, $B^2=B-E$이므로

$A^2=E-4B+4(B-E)$

$=-3E$

또, $A^3=A^2A=(-3E)A=-3A$

그러므로

A^3+A^2+3A

$=(-3A)+(-3E)+3A$

$=-3E$ <거짓>

정답 ③

18. 출제의도 : 확률밀도함수의 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

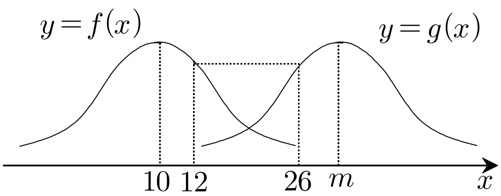
정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 같으므로

확률밀도함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 평행이동에 의하여 일치할 수 있다.

확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르고,

$\mathrm{P}(Y \geq 26) \geq 0.5$이므로

$m \geq 26$이다.



따라서 $m=26+2=28$이므로

확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(28,\ 4^2)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(Y \leq 20)=\mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{20-28}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \leq -2)$

$=\mathrm{P}(Z \geq 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

정답 ②

19. 출제의도 : 쌍곡선의 정의를 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$의 초점을 $\mathrm{F}(k,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-k,\ 0)$ $(k>0)$라 하면

$k = \sqrt{1+3} = 2$

그러므로 F(2, 0), F′(−2, 0)이고 $\overline{\mathrm{FF'}} = 4$

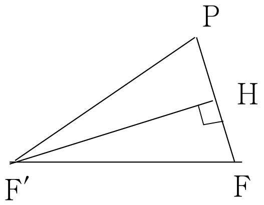
이때, 삼각형 PF′F에서 $\overline{\mathrm{PF'}} > \overline{\mathrm{PF}}$이므로 이 삼각형이 이등변삼각형인 경우는 다음 두 가지이다.

(i) $\overline{\mathrm{PF'}} = \overline{\mathrm{FF'}}$인 경우

$\overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PF}} = 2$이고 $\overline{\mathrm{FF'}} = 4$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PF}} &= \overline{\mathrm{PF'}} - 2\\ &= \overline{\mathrm{FF'}} - 2\\ &= 2\end{aligned}$$

이때, 삼각형 PF′F의 꼭짓점 F′에서 변 PF에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{F'H}} &= \sqrt{\overline{\mathrm{F'F}}^2 - \overline{\mathrm{FH}}^2}\\ &= \sqrt{4^2 - 1^2}\\ &= \sqrt{15}\end{aligned}$$

그러므로 삼각형 PF′F의 넓이 a는

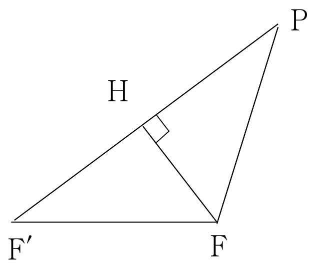
$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{PF}} \times \overline{\mathrm{F'H}}\\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{15}\\ &= \sqrt{15}\end{aligned}$$

(ii) $\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{FF'}}$인 경우

$\overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PF}} = 2$이고 $\overline{\mathrm{FF'}} = 4$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PF'}} &= \overline{\mathrm{PF}} + 2\\ &= \overline{\mathrm{FF'}} + 2\\ &= 6\end{aligned}$$

이때, 삼각형 PF′F의 꼭짓점 F에서 변 PF′에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{FH}} &= \sqrt{\overline{\mathrm{FF'}}^2 - \overline{\mathrm{F'H}}^2}\\ &= \sqrt{4^2 - 3^2}\\ &= \sqrt{7}\end{aligned}$$

그러므로 삼각형 PF′F의 넓이 a는

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{PF'}} \times \overline{\mathrm{FH}}\\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{7}\\ &= 3\sqrt{7}\end{aligned}$$

따라서 모든 a값의 곱은

$$\begin{aligned}&\sqrt{15} \times 3\sqrt{7}\\ &= 3\sqrt{105}\end{aligned}$$

정답 ⑤

20. 출제의도 : 무한등비급수를 활용하여 도형의 넓이의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 O는 정삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\overline{\mathrm{BO}} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = 2\sqrt{3}$$

따라서

$\overline{\mathrm{AO}} = \overline{\mathrm{AD}} = 2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BD}} = 6 - 2\sqrt{3}$

이므로 두 정삼각형 ABC, DBH의 닮음비는

$6 : 6 - 2\sqrt{3} = 3 : 3 - \sqrt{3}$

이고, 넓이의 비는

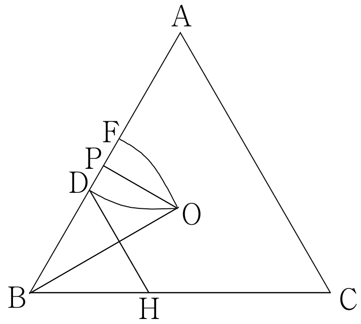
$$\begin{aligned}3^2 : (3-\sqrt{3})^2 &= 9 : 12 - 6\sqrt{3}\\ &= 1 : \frac{4-2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

이다.

$r = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}$이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

$$=S_1+S_1\times r\times 3+S_1\times r^2\times 3^2+\cdots$$
$$=S_1+(3r)S_1+(3r)^2S_1+\cdots$$
$$=\frac{S_1}{1-3r}\ \ (\because\ 0<3r<1)\ \cdots ㉠$$



선분 DF의 중점을 P라고 하면

$\overline{\mathrm{OP}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이고,

$\overline{\mathrm{BP}}=3$, $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{3}$이다.

두 선분 OP, PF와 호 OF로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{3}$$
$$=\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

이므로

$S_1=6S=6\pi-9\sqrt{3}$

따라서 ㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{1-(4-2\sqrt{3})}$$
$$=\frac{3(2\pi-3\sqrt{3})}{2\sqrt{3}-3}$$
$$=\frac{3(2\pi-3\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)}{(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3)}$$
$$=(2\pi-3\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)$$

정답 ③

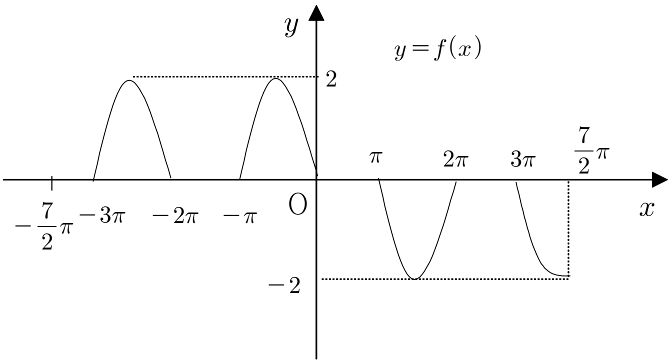
21. 출제의도 : 정적분의 정의를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$를 구간으로 나누어 절댓값을 풀면

$$f(x)=\begin{cases}0 & \left(-\frac{7}{2}\pi\le x<-3\pi\right)\\ -2\sin x & (-3\pi\le x<-2\pi)\\ 0 & (-2\pi\le x<-\pi)\\ -2\sin x & (-\pi\le x<0)\\ 0 & (0\le x<\pi)\\ 2\sin x & (\pi\le x<2\pi)\\ 0 & (2\pi\le x<3\pi)\\ 2\sin x & \left(3\pi\le x\le\frac{7}{2}\pi\right)\end{cases}$$

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 구간 $\left[-\frac{7}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt\ge 0$이 되도록 하기 위해서는 a의 값의 범위가

$$-\frac{7}{2}\pi\le a\le -3\pi$$

따라서

$$\beta-\alpha=(-3\pi)-\left(-\frac{7}{2}\pi\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}$$

정답 ①

22. 출제의도 : 분수함수에 대한 정적분을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_1^{16}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$
$$=\int_1^{16}x^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$=\left[2\sqrt{x}\right]_1^{16}$$
$$=8-2$$
$$=6$$

정답 6

23. **출제의도** : 무리방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 방정식에서 $\sqrt{-x^2+7x}=t$로 놓으면 $t\geq 0$이고

$t=t^2-2$

$t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0$

$\therefore\ t=2$

이때, $t=\sqrt{-x^2+7x}$이므로

$\sqrt{-x^2+7x}=2$

양변을 제곱하여 정리하면

$-x^2+7x=4$

$x^2-7x+4=0$

이때, 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가지므로 모든 실근의 곱은 근과 계수의 관계로부터 4이다.

정답 4

24. **출제의도** : 수열의 극한값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$x^2+2nx-4n=0$ $\cdots$ ㉠

에서 $x=-n\pm\sqrt{n^2+4n}$

방정식 ㉠의 양의 실근이 a_n이므로

$a_n=-n+\sqrt{n^2+4n}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+4n}+n\right)}{\sqrt{n^2+4n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}$$
$$=\frac{4}{1+1}$$
$$=2$$

정답 2

25. **출제의도** : 실생활에 활용된 상용로그의 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

중앙지점 P까지의 거리가 75m이고 열차 A의 속력이 열차 B의 속력의 0.9배이므로 열차 B의 속력을 v_0라 하면 열차 A의 속력은 $0.9v_0$이다.

열차 A의 예측최고소음도가 L_A이므로

$$L_A=80+28\log\frac{0.9v_0}{100}-14\log\frac{75}{25}\ \text{--}㉠$$

또, 열차 B의 예측최고소음도가 L_B이므로

$$L_B=80+28\log\frac{v_0}{100}-14\log\frac{75}{25}\quad\text{---}㉡$$

㉠과 ㉡에서

$$L_B-L_A=28\left(\log\frac{v_0}{100}-\log\frac{0.9v_0}{100}\right)$$
$$=28(-\log 0.9)$$

$=28(1-2\log 3)$

$=28-56\log 3$

따라서

$a-b=28-(-56)=84$

정답 84

26. **출제의도** : 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin(\angle \mathrm{ABC})=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 9\times 12\times \sin(\angle \mathrm{ABC})$

$=\frac{1}{2}\times 9\times 12\times \frac{\sqrt{6}}{3}$

$=18\sqrt{6}$

$\overline{\mathrm{AP}}\perp$(평면 BCD)이고,

$\overline{\mathrm{AQ}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$ 이므로

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$ 이다.

따라서 두 평면 ABC, BCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\theta=\angle \mathrm{AQP}$ 이므로

삼각형 BCP는 삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영이므로 삼각형 BCP의 넓이 k는

$k=18\sqrt{6}\times\cos\theta$

$=18\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{6}$

$=9\sqrt{2}$

$\therefore\ k^2=(9\sqrt{2})^2=162$

정답 162

27. **출제의도** : 중복조합의 수를 이용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$20=2^2\times 5$이므로 d가 될 수 있는 값은 2, 4, 5이다.

각 경우로 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) $d=2$일 때,

$a=2a'$, $b=2b'$, $c=2c'$

(단, a', b', c'은 자연수)

라 하면 주어진 방정식은

$2a'+2b'+2c'+2=20$

$a'+b'+c'=9$

이때, a', b', c'은 자연수이므로 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6$

$={}_8\mathrm{C}_2$

$=\frac{8\times 7}{2\times 1}$

$=28$

(ⅱ) $d=4$일 때,

$a=4a'$, $b=4b'$, $c=4c'$

(단, a', b', c'은 자연수)

라 하면 주어진 방정식은

$4a'+4b'+4c'+4=20$

$a'+b'+c'=4$

이때, a', b', c'은 자연수이므로 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$

(ⅲ) $d=5$일 때,

$a=5a'$, $b=5b'$, $c=5c'$

(단, a', b', c'은 자연수)

라 하면 주어진 방정식은

$5a'+5b'+5c'+5=20$

$a'+b'+c'=3$

이때, a', b', c'은 자연수이므로 순서쌍의 개수는 1이다.

따라서, (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$28+3+1=32$

정답 32

28. **출제의도** : 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle \mathrm{BPC} = \angle \mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$이고,

$\overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{3}$이므로

삼각형 PBC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{PC}}}{\sin\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PC}} = \frac{2\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\times\sin\theta = 4\sin\theta$$

선분 PC를 한 변으로 하는 정삼각형의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$r = 4\sin\theta\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta$$

따라서 내접원의 넓이 $S(\theta)$는

$$S(\theta) = \pi\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)^2$$

$$= \pi\times\frac{4}{3}\sin^2\theta$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to+0}\frac{\pi\times\dfrac{4}{3}\sin^2\theta}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta\to+0}\left(\frac{4}{3}\pi\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi\times1^2$$

$$= \frac{4}{3}\pi$$

따라서 $a = \dfrac{4}{3}$이므로

$60a = 60\times\dfrac{4}{3} = 80$

정답 80

29. **출제의도** : 공간도형에 관련된 내적 문제를 해결할 수 있는가?

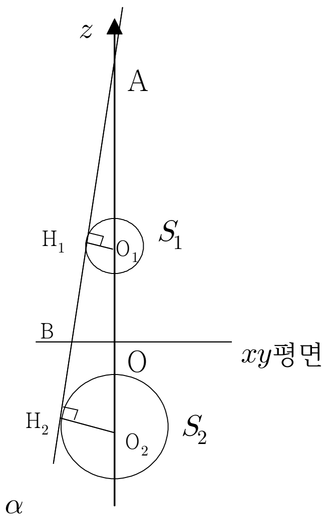
정답풀이 :

두 구 S_1, S_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하고 평면 α와 구 S_1, S_2가 접하는 점을 각각 $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2$라 하고 평면 α가 z축과 만나는 점을 A라 하자.

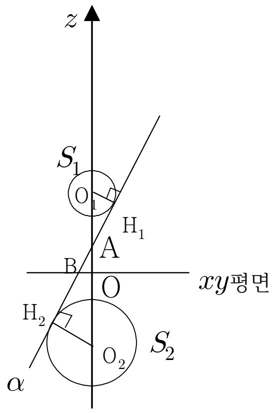
또, 평면 α와 xy평면이 만나서 생기는 직선에 원점에서 내린 수선의 발을 B라 하자.

이때, 평면 α가 두 구와 접하는 경우는 다음 두 가지 경우이다.

(ⅰ)



(ⅱ)



xy평면 위의 점 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$에 대하여

$\overline{OP} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{36}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ---㉠

이때, (ⅰ)의 경우 $\overline{O_1H_1}=1$, $\overline{O_2H_2}=2$이고 $\overline{O_1O_2}=6$이므로

$\overline{AO_1}=6$

이때,

$\overline{AH_1} = \sqrt{\overline{AO_1}^2 - \overline{O_1H_1}^2}$

$= \sqrt{6^2-1^2}$

$= \sqrt{35}$

이므로 $\frac{\overline{O_1H_1}}{\overline{AH_1}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AO}}$에서

$\frac{1}{\sqrt{35}} = \frac{\overline{OB}}{9}$

$\overline{OB} = \frac{9}{\sqrt{35}}$ ----㉡

그러므로 ㉠과 ㉡에서

$\overline{OB} > \overline{OP}$

이므로 (ⅰ)의 경우는 없다.

(ⅱ)의 경우 $\overline{O_1A}=x$라 하면 $\overline{AO_2}=6-x$ 이므로

$\frac{\overline{O_1H_1}}{\overline{AO_1}} = \frac{\overline{O_2H_2}}{\overline{AO_2}}$

$\frac{1}{x} = \frac{2}{6-x}$

$x=2$

그러므로 점 A의 좌표는 $(0,0,1)$이다.

이때, 평면 α의 법선벡터를 $(a,b,1)$로 놓고 평면의 방정식을 $ax+by+z+d=0$라 하면 이 평면이 점 $A(0,0,1)$를 지나므로 대입하면

$1+d=0$

$\therefore\ d=-1$

이때, 평면의 방정식은

$ax+by+z-1=0$

구 S_1의 중심 O_1 $(0,0,3)$과 이 평면사이의 거리가 1이므로

$\frac{|3-1|}{\sqrt{a^2+b^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2+1}} = 1$

$a^2+b^2=3$ ----㉢

또, 평면 α가 점 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$를 지나므로 대입하면

$\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{6}b - 1 = 0$

$3a+\sqrt{3}\,b=6$ ---㉣

㉣에서

$b=-\sqrt{3}\,a+2\sqrt{3}$ --㉤

을 ㉢에 대입하면

$a^2+(-\sqrt{3}\,a+2\sqrt{3})^2=3$

$4a^2-12a+12=3$

$4a^2-12a+9=0$

$(2a-3)^2=0$

$a=\frac{3}{2}$

이때, ㉤에 대입하면

$b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

또, 평면 α가 점 $Q(k, -\sqrt{3}, 2)$를 지나

므로 대입하면

$ka-\sqrt{3}b+1=0$

$\frac{3}{2}k=\frac{3}{2}-1$

$\therefore\ k=\frac{1}{3}$

따라서, $120k=40$

정답 40

30. 출제의도 : 미분을 활용하여 부등식이 항상 성립할 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ 에서

$$f'(x)=(2ax+b)e^x+(ax^2+bx+c)e^x$$
$$=\{ax^2+(2a+b)x+b+c\}e^x$$

$f'(x)=0$ 에서

$ax^2+(2a+b)x+b+c=0 \quad \cdots ㉠$

조건(가)에서 방정식 ㉠의 두 근이 $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2a+b=0$, $\frac{b+c}{a}=-3$

$\therefore\ b=-2a$, $c=-a$

조건(나)에서

$0\le x_1<x_2$ 일 때,

$f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1\ge 0$ 이므로

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}+1\ge 0 \quad \cdots ㉡$

함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[x_1, x_2]$에서 연속이고, 열린구간 (x_1, x_2)에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$

인 c가 x_1과 x_2 사이에 존재한다.

$0\le x_1<x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식 ㉡이 성립하므로

임의의 양수 c에 대하여

$f'(c)+1\ge 0$

이 성립한다.

$f'(x)=(ax^2-3a)e^x$ 이므로

$x>0$일 때, 부등식

$(ax^2-3a)e^x+1\ge 0$

이 항상 성립한다.

$a>0$이므로

$(x^2-3)e^x\ge -\frac{1}{a} \quad \cdots ㉢$

이고,

$g(x)=(x^2-3)e^x$이라 하면

$$g'(x)=2xe^x+(x^2-3)e^x$$
$$=(x^2+2x-3)e^x$$
$$=(x+3)(x-1)e^x$$

$g'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$이므로

$x>0$일 때, $g(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 갖는다.

$g(1)=-2e$ 이므로 부등식 ㉢이 $x>0$에서 항상 성립하려면

$-2e\ge -\frac{1}{a}$ 이다.

즉, $a\le\frac{1}{2e}$ 이므로

$$abc=a\times(-2a)\times(-a)=2a^3$$
$$\le 2\times\left(\frac{1}{2e}\right)^3=\frac{1}{4e^3}$$

따라서 abc의 최댓값은 $\frac{1}{4e^3}$ 이므로

$k=\frac{1}{4}$

$\therefore\ 60k=60\times\frac{1}{4}=15$

정답 15