

제 2 교시

수학 영역 (나형)

5지선다형

1. $3 \times 8^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

2. $\log_2 3 + \log_2 6 - \log_2 9$ 의 값은? [2점]

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n+1}{2n+5}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 8$, $a_7 = 20$ 일 때, a_{11} 의 값은? [3점]

- ① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

5. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = \{1, 2\}$, $A^C \cap B = \{3, 4, 5\}$, $A^C \cap B^C = \{8, 9\}$ 를 만족시키는 집합 A 의 모든 원소의 합은?
[3점]

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

7. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} = 3$ 일 때,

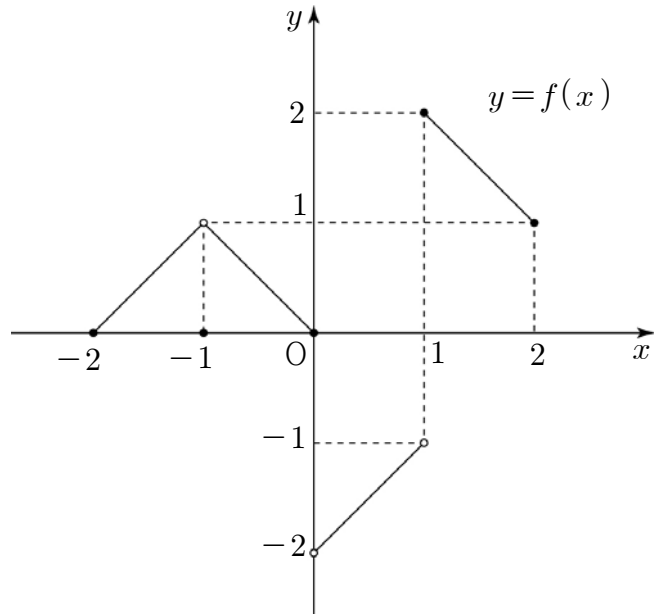
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ 의 값은? [3점]

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \times 4^{n+1} + 3^{n+1}}{4^n + 3^n} = 6$ 일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

8. 정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ 인 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

9. $\log 2 = a, \log 3 = b$ 라 할 때, $\log \frac{12}{5}$ 를 a, b 로 나타낸 것은?

[3점]

- ① $a+b-1$ ② $2a-b-1$ ③ $2a+b-1$
- ④ $3a-b-1$ ⑤ $3a+b-1$

10. 함수 $f(x) = 2x^3 - x + 1$ 에서 x 의 값이 -1 에서 2 까지 변할 때의 평균변화율과 $f'(k)$ 의 값이 서로 같을 때, 양수 k 의 값은? [3점]

- ① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

11. 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하고

$$P = \{x \mid (x+4)(x-5) \leq 0\}, Q = \{x \mid |x| > a\}$$

일 때, 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참이기 위한 자연수 a 의 개수는?

[3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. 어떤 펌프의 흡입구경 D (mm), 단위시간(분) 동안의 유체 배출량 Q ($\text{m}^3/\text{분}$), 흡입구의 유속 V ($\text{m}/\text{분}$) 사이에 다음과 같은 관계가 성립한다고 한다.

$$D = k \left(\frac{Q}{V} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{단, } V > 0, k \text{는 양의 상수이다.})$$

두 펌프 A, B 의 흡입구경을 각각 D_A, D_B , 단위시간(분) 동안의 유체배출량을 각각 Q_A, Q_B , 흡입구의 유속을 각각 V_A, V_B 라 하자. Q_A 가 Q_B 의 $\frac{2}{3}$ 배, V_A 가 V_B 의 $\frac{8}{27}$ 배, $D_A - D_B = 60$ 일 때, D_B 의 값은? [3점]

- ① 120 ② 125 ③ 130 ④ 135 ⑤ 140

[13~14] 이차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여
 $f(4+x)=f(4-x)$
 를 만족시킨다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.

13. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 1$ 일 때, $f(0)$ 의 값은? [3점]

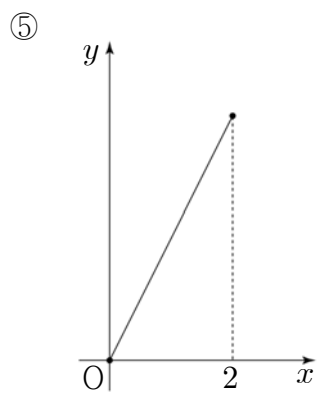
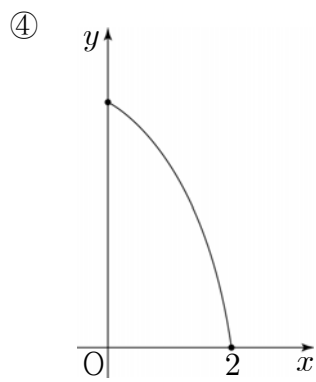
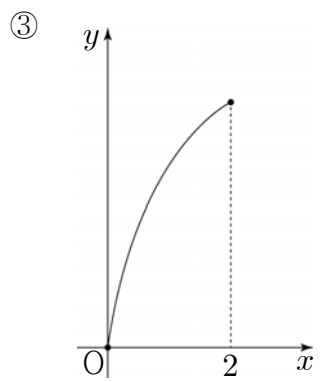
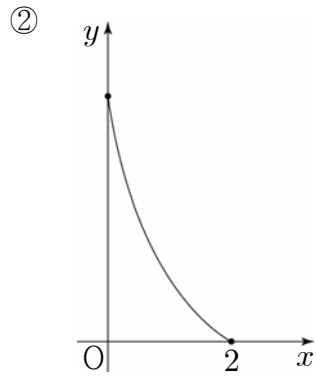
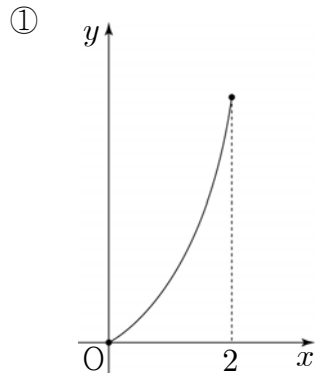
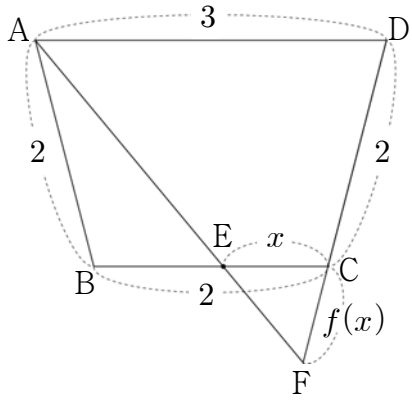
- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

14. 모든 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 이 공차가 3인 등차수열
 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합과 같을 때,
 $|f(k)| > |f(k+1)|$ 이 성립하도록 하는 k 의 최댓값은?

[4점]

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

15. $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=2$, $\overline{AD}=3$ 인 등변사다리꼴 ABCD에서 선분 BC 위를 움직이는 점을 E, 직선 AE와 직선 CD의 교점을 F라 하자. 점 C와 점 E 사이의 거리를 x ($0 \leq x \leq 2$), 점 C와 점 F 사이의 거리를 $f(x)$ 라 할 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 모양으로 알맞은 것은? [4점]



16. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(4x + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + 16y\right)$ 의 최솟값은? [4점]

- ① 34 ② 36 ③ 38 ④ 40 ⑤ 42

17. 수열 $\{a_n\}$ 이 $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} = n^2 + 3n$ 을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 의 값은?
[4점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

18. 다음은 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 이 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ 일 때,

$n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 등식

$$n + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = n a_n \quad \dots\dots (\star)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=2$ 일 때,
(좌변) $= 2 + a_1 = 3$, (우변) $= 2a_2 = 2(1 + \boxed{\text{가}}) = 3$
이므로 (\star) 이 성립한다.

(ii) $n=m(m \geq 2)$ 일 때 (\star) 이 성립한다고 가정하면
 $m + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{m-1} = m a_m$ 이므로
 $(m+1) + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{m-1} + a_m$
 $= m a_m + \boxed{\text{나}}$
 $= (m+1)(a_{m+1} - \boxed{\text{다}}) + 1$
 $= (m+1)a_{m+1}$
이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때도 (\star) 이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $n + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = n a_n$ 이 성립한다.

위의 증명에서 (가)에 알맞은 수를 p , (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$ 이라 할 때, $\frac{p \times f(3)}{g(11)}$ 의 값은? [4점]

- ① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

19. 두 함수 $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}k$ ($x \geq 0$), $g(x) = \sqrt{5x-k}$ 에 대하여 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 정수 k 의 개수는? [4점]

- ① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

20. 집합 $X = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 원소 n 에 대하여 X 의 부분집합 중 n 을 최소의 원소로 갖는 모든 집합의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

— <보 기> —

\neg . $f(8) = 4$ \sphericalangle . $a \in X, b \in X$ 일 때, $a < b$ 이면 $f(a) < f(b)$ \sqsupset . $f(1) + f(3) + f(5) + f(7) + f(9) = 682$

- ① \neg ② \neg, \sphericalangle ③ \neg, \sqsupset
 ④ $\sphericalangle, \sqsupset$ ⑤ $\neg, \sphericalangle, \sqsupset$



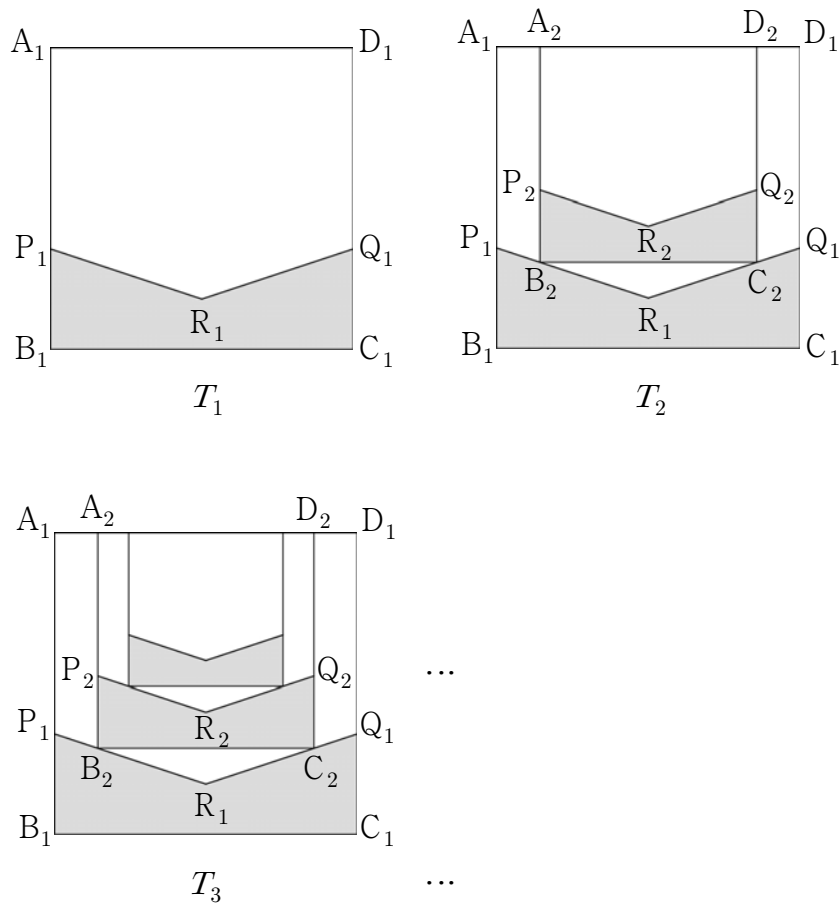
21. 한 변의 길이가 3인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 이 있다. 그림과 같이 선분 A_1B_1 과 선분 D_1C_1 을 2:1로 내분하는 점을 각각 P_1, Q_1 이라 하고 선분 P_1C_1 과 선분 Q_1B_1 의 교점을 R_1 이라 할 때, 선분 P_1B_1 , 선분 B_1C_1 , 선분 C_1Q_1 , 선분 Q_1R_1 , 선분 R_1P_1 로 둘러싸인 부분인  모양에 색칠하여 얻은 그림을 T_1 이라 하자.

그림 T_1 에 선분 P_1R_1 위의 점 B_2 , 선분 R_1Q_1 위의 점 C_2 와 선분 A_1D_1 위의 두 점 A_2, D_2 를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 를 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 에 그림 T_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는  모양에 색칠하여 얻은 그림을 T_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 T_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{131}{32}$
- ② $\frac{135}{32}$
- ③ $\frac{139}{32}$
- ④ $\frac{143}{32}$
- ⑤ $\frac{147}{32}$

단답형

22. 두 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2$ 에 대하여 $(g \circ f)(4)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x) = 2x^3 + ax$ 에 대하여 $f'(1) = 30$ 을 만족시키는 상수 a 의 값을 구하시오. [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{3n+1}{n+1}\right) = 1$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + 2a_n)$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x^2 + ax + 2}{x-1} & (x \neq 1) \\ b & (x = 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 두 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^2}{x^2 - 1} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x^2}{x^2 - 1} = 2$$

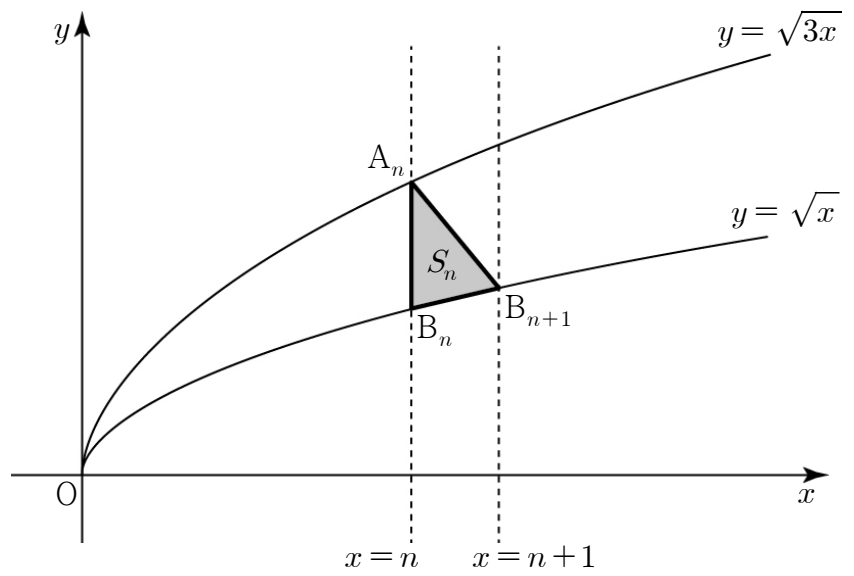
$f'(5)$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 두 집합

$A = \{2^l \mid l \text{은 자연수}\}, B = \{3m-2 \mid m \text{은 자연수}\}$
 에 대하여 집합 $A \cap B$ 의 모든 원소를 작은 수부터 순서대로
 모두 나열하여 만든 수열을 $\{a_n\}$ 이라 하자. a_4 의 값을 구하시오.
 [4점]

28. 자연수 n 에 대하여 직선 $x=n$ 이 두 곡선 $y = \sqrt{3x}$,
 $y = \sqrt{x}$ 와 만나는 점을 각각 A_n, B_n 이라 하고 삼각형
 $A_n B_n B_{n+1}$ 의 넓이를 S_n 이라 하자.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(S_{n+1} - S_n) = a + b\sqrt{3}$ 일 때, $40(a^2 + b^2)$ 의 값을
 구하시오. (단, a, b 는 유리수이다.) [4점]



29. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 3 & (x \geq 1) \\ -x^2 + 2bx - 3 & (x < 1) \end{cases}$$

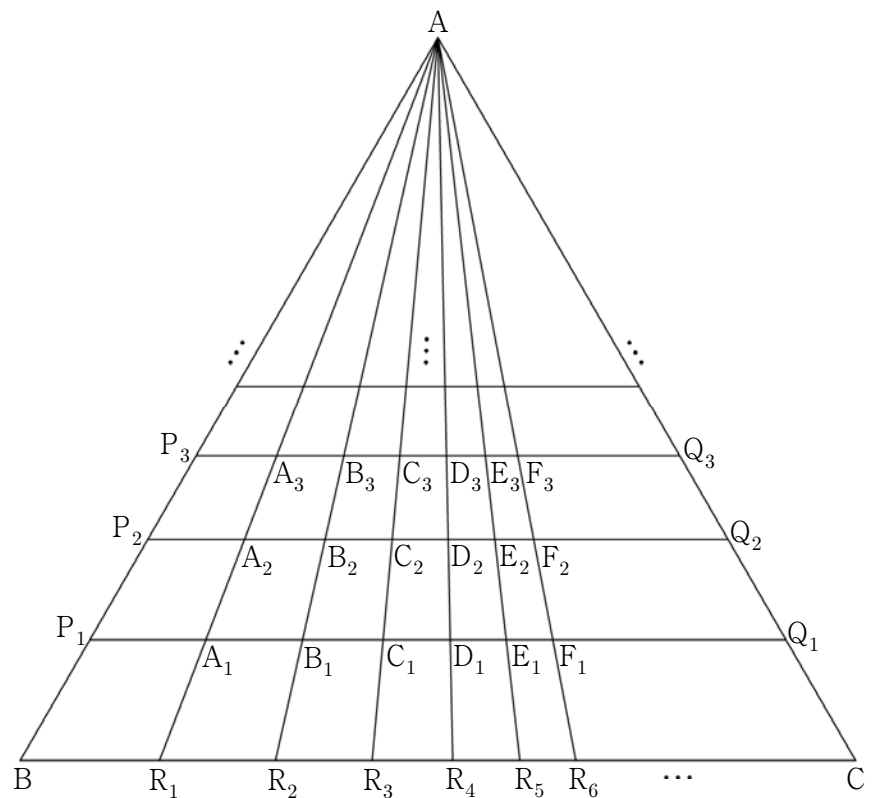
의 역함수가 존재하도록 하는 두 실수 a, b 에 대하여 $3a + 2b$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

30. 한 변의 길이가 66인 정삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 세 선분 AB, AC, CB를 5:1로 내분하는 점을 각각 P_1, Q_1, R_1 이라 하고, 세 선분 AP_1, AQ_1, CR_1 을 5:1로 내분하는 점을 각각 P_2, Q_2, R_2 라 하고, 세 선분 AP_2, AQ_2, CR_2 를 5:1로 내분하는 점을 각각 P_3, Q_3, R_3 이라 하자.

이와 같은 방법으로 세 선분 $AP_{k-1}, AQ_{k-1}, CR_{k-1}$ 을 5:1로 내분하는 점을 각각 P_k, Q_k, R_k ($k = 4, 5, 6, \dots$)라 하자.

자연수 n 에 대하여 선분 AR_1 과 선분 P_nQ_n 의 교점을 A_n , 선분 AR_2 와 선분 P_nQ_n 의 교점을 B_n , 선분 AR_3 과 선분 P_nQ_n 의 교점을 C_n , 선분 AR_4 와 선분 P_nQ_n 의 교점을 D_n , 선분 AR_5 와 선분 P_nQ_n 의 교점을 E_n , 선분 AR_6 과 선분 P_nQ_n 의 교점을 F_n 이라 하자.

$\overline{A_1B_1} + \overline{B_2C_2} + \overline{C_3D_3} + \overline{D_4E_4} + \overline{E_5F_5} = 25 - \frac{5^b}{6^a}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 자연수이다.) [4점]



* 확인 사항
 ◦ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.