제 2 교시

수학 영역 (가형)

5지선다형

1. $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{16}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 명제 '$x=2$ 이면 $x^3-k=0$이다.'가 참이 되도록 하는 상수 k의 값은? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

3. $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$ 의 값은? [2점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

4. 수열 $\left\{\left(\frac{x-3}{2}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합은? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

5. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(4)=3$일 때,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(4+2h)-f(4-5h)}{3h}$$

의 값은? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

6. 두 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x+1$, $g(x)=-x^2+5$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 함수 $h(x)$가 $(f \circ h)(x)=g(x)$를 만족시킬 때, $h(3)$의 값은? [3점]

① -10 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

7. 두 실수 x, y에 대하여 $xy>0$, $x+y=3$일 때, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$의 최솟값은? [3점]

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

8. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{n+a_n+3}$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

9. 곡선 $y=-x^2+6$과 직선 $y=2x+3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{23}{3}$ ② $\frac{26}{3}$ ③ $\frac{29}{3}$ ④ $\frac{32}{3}$ ⑤ $\frac{35}{3}$

10. 직선 $x+2y-8=0$에 수직이고 곡선 $y=-x^4+6x-2$에 접하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 할 때, 두 상수 m, n의 합 $m+n$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

11. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k = n^2 + n$ 을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{k+1}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{17}{11}$ ② $\frac{18}{11}$ ③ $\frac{19}{11}$ ④ $\frac{20}{11}$ ⑤ $\frac{21}{11}$

12. $a = \log(1+\sqrt{2})$ 일 때, $\frac{10^a + 10^{-a}}{10^a - 10^{-a}}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $1+\sqrt{2}$

[13~14] 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$가 다음과 같다.

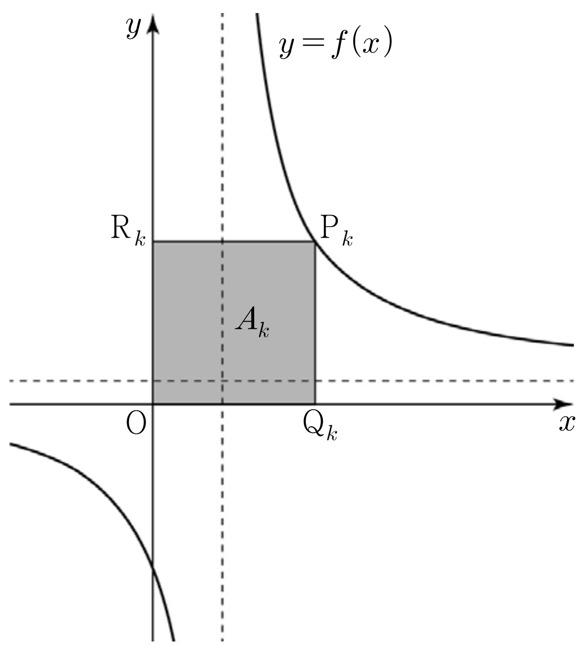
$$f(x)=\frac{\text{[redacted]}}{x-n}$$

13번과 14번의 두 물음에 답하시오.

13. $n=3$일 때, 곡선 $y=f(x)$의 점근선의 방정식이 $x=p$, $y=q$이다. $p+q$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

14. $n=k\,(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때, 곡선 $y=f(x)$의 제1사분면 위의 점 중에서 x축, y축까지의 거리가 같게 되는 점을 P_k라 하고, 점 P_k에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q_k, R_k라 하자. 사각형 $\mathrm{OQ}_k\mathrm{P}_k\mathrm{R}_k$의 넓이를 A_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} A_k$의 값은? [4점]

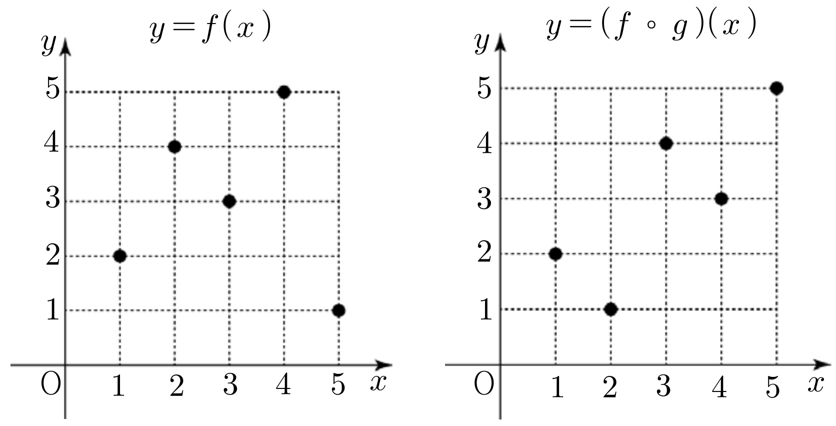


① 1770 ② 1780 ③ 1790 ④ 1800 ⑤ 1810

15. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=1$, $f'(1)=2$이고, 함수 $g(x)=x^2+3x$일 때, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}$의 값은? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

16. 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 집합 A에서 집합 A로의 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. 두 함수 $y=f(x)$, $y=(f \circ g)(x)$의 그래프가 각각 그림과 같을 때, $g(2)+(g \circ f)^{-1}(1)$의 값은? [4점]



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

17. 100명의 학생을 대상으로 세 문제 a, b, c를 풀게 하였다. 문제 a를 맞힌 학생의 집합을 A, 문제 b를 맞힌 학생의 집합을 B, 문제 c를 맞힌 학생의 집합을 C라 할 때, $n(A)=40$, $n(B)=35$, $n(C)=52$, $n(A\cap B)=15$, $n(A\cap C)=10$, $n(A^C\cap B^C\cap C^C)=7$이다. 세 문제 중 두 문제 이상을 맞힌 학생 수의 최솟값은? [4점]

① 18　② 20　③ 22　④ 24　⑤ 26

18. 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n이 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 일 때, $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$n+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=na_n \quad \cdots\cdots (\bigstar)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=2$일 때,

(좌변)$=2+a_1=3$, (우변)$=2a_2=2\left(1+\boxed{(가)}\right)=3$

이므로 ($\bigstar$)이 성립한다.

(ⅱ) $n=m(m\geq 2)$일 때 ($\bigstar$)이 성립한다고 가정하면

$m+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{m-1}=ma_m$이므로

$(m+1)+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{m-1}+a_m$

$=ma_m+\boxed{(나)}$

$=(m+1)\left(a_{m+1}-\boxed{(다)}\right)+1$

$=(m+1)a_{m+1}$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 ($\bigstar$)이 성립한다.

그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $n+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=na_n$이 성립한다.

위의 증명에서 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{p\times f(3)}{g(11)}$의 값은? [4점]

① 13　② 15　③ 17　④ 19　⑤ 21

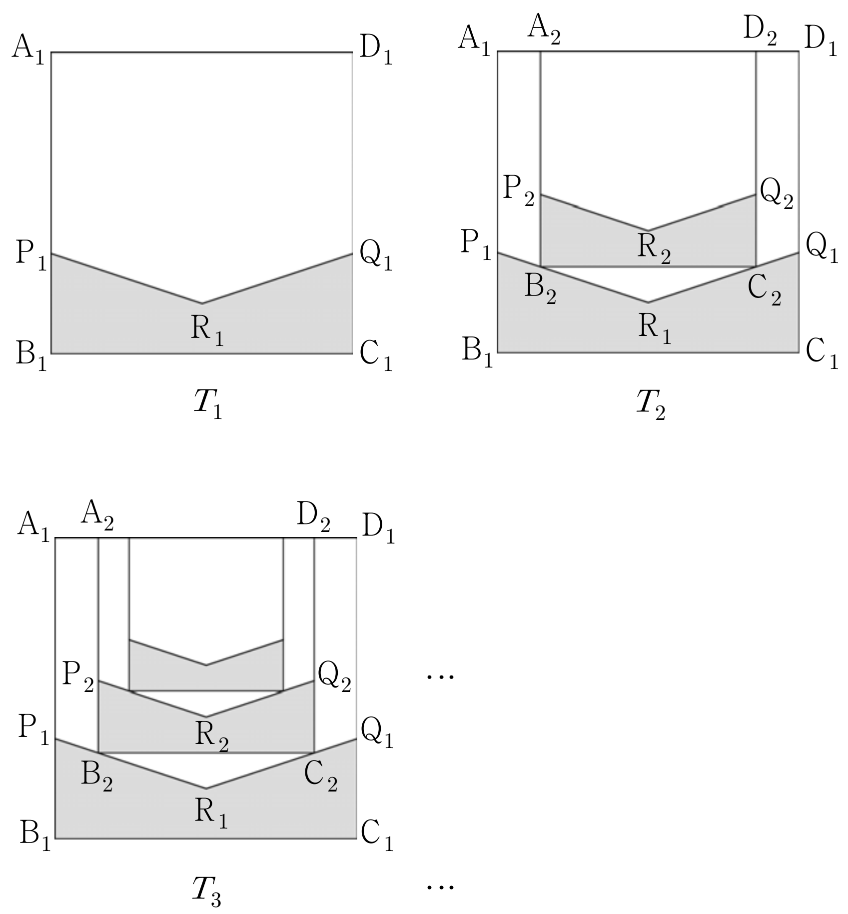
19. 곡선 $f(x)=x^3-6x^2+9x$ 와 직선 $g(x)=mx$ 가 서로 다른 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 만나고 $\int_0^b \{f(x)-g(x)\}dx=0$ 일 때, $\int_a^b \{g(x)\}^2 dx$ 의 값은? (단, $0<a<b$) [4점]

① 18 ② $\frac{56}{3}$ ③ $\frac{58}{3}$ ④ 20 ⑤ $\frac{62}{3}$

20. 한 변의 길이가 3인 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$이 있다. 그림과 같이 선분 $\mathrm{A_1B_1}$과 선분 $\mathrm{D_1C_1}$을 $2:1$로 내분하는 점을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$이라 하고 선분 $\mathrm{P_1C_1}$과 선분 $\mathrm{Q_1B_1}$의 교점을 $\mathrm{R_1}$이라 할 때, 선분 $\mathrm{P_1B_1}$, 선분 $\mathrm{B_1C_1}$, 선분 $\mathrm{C_1Q_1}$, 선분 $\mathrm{Q_1R_1}$, 선분 $\mathrm{R_1P_1}$로 둘러싸인 부분인 모양에 색칠하여 얻은 그림을 T_1이라 하자.

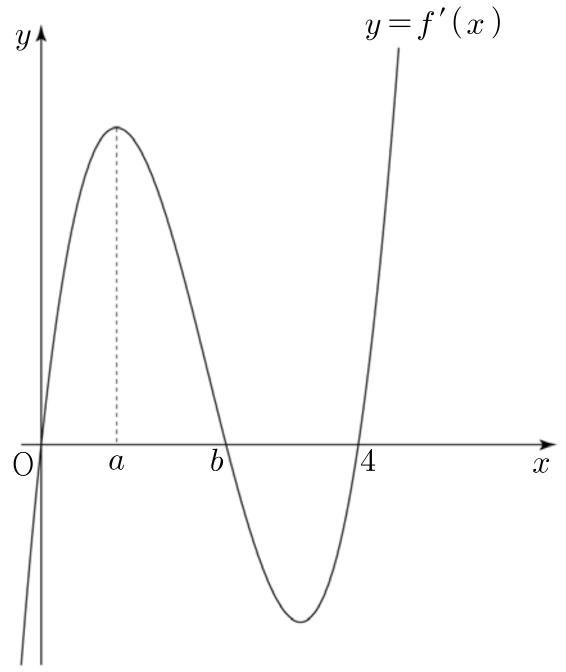
그림 T_1에 선분 $\mathrm{P_1R_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$, 선분 $\mathrm{R_1Q_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$와 선분 $\mathrm{A_1D_1}$ 위의 두 점 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{D_2}$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 그리고, 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$에 그림 T_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양에 색칠하여 얻은 그림을 T_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 T_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{131}{32}$ ② $\frac{135}{32}$ ③ $\frac{139}{32}$ ④ $\frac{143}{32}$ ⑤ $\frac{147}{32}$

21. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다. 함수 $f'(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가질 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(0)=f'(b)=f'(4)=0$) [4점]



<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. $a<t<b$일 때, $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}>\dfrac{f(t)-f(b)}{t-b}$ 이다.

ㄷ. $\displaystyle\int_a^4 f'(x)\,dx=0$ 일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(a)$는 서로 다른 세 점에서 만난다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 5^{n+1}+3^n}{5^{n-1}+4^n}$의 값을 구하시오. [3점]

23. 전체집합 $U=\{x\mid x\text{는 자연수}\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A=\{x\mid x\text{는 }4\text{의 약수}\}$, $B=\{x\mid x\text{는 }12\text{의 약수}\}$일 때, $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오. [3점]

24. $\log_2 48 - \log_2 3 + \dfrac{\log_3 64}{\log_3 2}$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-ax+1}{x-1} & (x \neq 1) \\ b & (x=1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $10a+b$의 값을 구하시오. [3점]

26. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=k-1$, $a_2=\dfrac{4}{3}k$, $a_3=3k-3$ 일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

27. $\displaystyle\int_{0}^{3}(x+1)^2dx-\int_{-1}^{3}(x-1)^2dx+\int_{-1}^{0}(x-1)^2dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

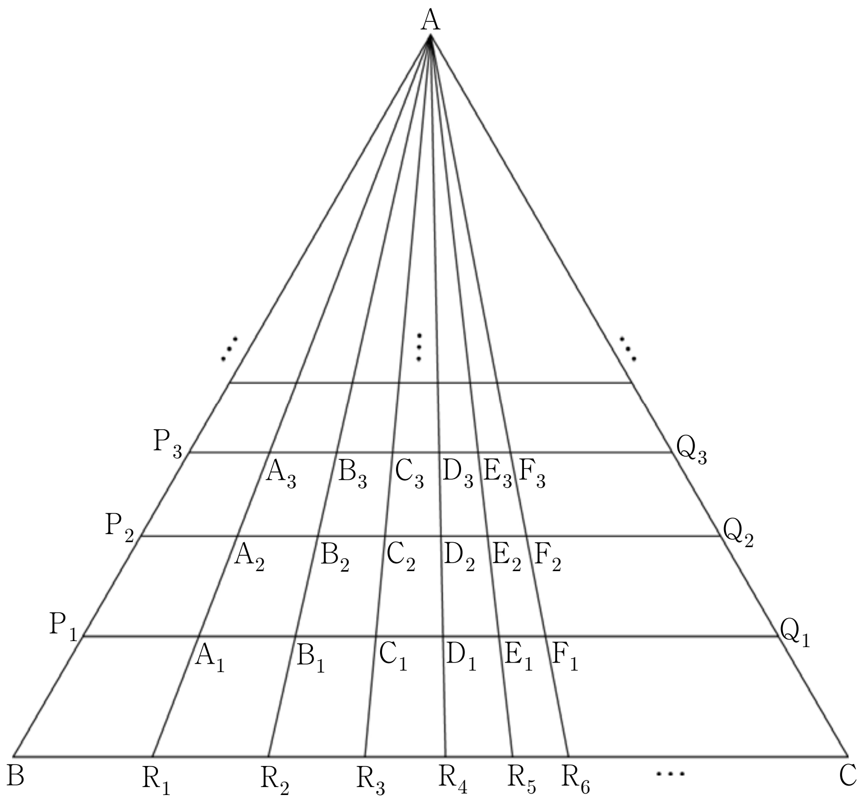
28. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)=3t^2-6t$ 라 하자. 점 P가 시각 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 움직인 거리가 58일 때, $v(a)$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 한 변의 길이가 66인 정삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 세 선분 AB, AC, CB를 5:1로 내분하는 점을 각각 P_1, Q_1, R_1이라 하고, 세 선분 AP_1, AQ_1, CR_1을 5:1로 내분하는 점을 각각 P_2, Q_2, R_2라 하고, 세 선분 AP_2, AQ_2, CR_2를 5:1로 내분하는 점을 각각 P_3, Q_3, R_3이라 하자.

이와 같은 방법으로 세 선분 AP_{k-1}, AQ_{k-1}, CR_{k-1}을 5:1로 내분하는 점을 각각 P_k, Q_k, R_k $(k=4, 5, 6, \cdots)$라 하자.

자연수 n에 대하여 선분 AR_1과 선분 P_nQ_n의 교점을 A_n, 선분 AR_2와 선분 P_nQ_n의 교점을 B_n, 선분 AR_3과 선분 P_nQ_n의 교점을 C_n, 선분 AR_4와 선분 P_nQ_n의 교점을 D_n, 선분 AR_5와 선분 P_nQ_n의 교점을 E_n, 선분 AR_6과 선분 P_nQ_n의 교점을 F_n이라 하자.

$\overline{A_1B_1}+\overline{B_2C_2}+\overline{C_3D_3}+\overline{D_4E_4}+\overline{E_5F_5}=25-\frac{5^b}{6^a}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.) [4점]



30. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=-20$인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases} 1 & (t<-4 \text{ 또는 } t>0) \\ 2 & (t=-4 \text{ 또는 } t=0) \\ 3 & (-4<t<0) \end{cases}$$

이다. $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.