

2015학년도 9월 고1 전국연합학력평가 정답 및 해설

수학 영역

정답

1	③	2	①	3	⑤	4	②	5	⑤
6	④	7	④	8	③	9	②	10	④
11	③	12	①	13	②	14	④	15	②
16	⑤	17	①	18	⑤	19	③	20	④
21	③	22	5	23	24	24	3	25	12
26	25	27	23	28	16	29	10	30	14

수학 영역

해설

1. [출제의도] 복소수 계산하기

$z_1 z_2 = (2-3i)(2+3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4+9$
따라서 $z_1 z_2 = 13$

2. [출제의도] 다항식 계산하기

$2A - B = 4x^2 - 2x + 2 - (x^2 - 2x - 1)$
 $= 4x^2 - 2x + 2 - x^2 + 2x + 1 = 3x^2 + 3$
따라서 $2A - B = 3x^2 + 3$

3. [출제의도] 두 점 사이의 거리 계산하기

$PQ = \sqrt{(5-1)^2 + (7-3)^2} = 4\sqrt{2}$

4. [출제의도] 이차함수의 최댓값과 최솟값 계산하기

꼭짓점의 x 좌표는 주어진 x 의 값의 범위에 속한다.

$x = -1$ 일 때 $y = -2$

$x = -2$ 일 때 $y = -1$

$x = 3$ 일 때 $y = 14$ 이므로

최댓값 $M = 14$, 최솟값 $m = -2$

따라서 $M + m = 12$

5. [출제의도] 미지수가 3개인 연립방정식 계산하기

$$\begin{cases} x - y = 5 & \text{..... ㉠} \\ y + 2z = 6 & \text{..... ㉡} \\ z - x = 7 & \text{..... ㉢} \end{cases}$$

에서 ㉠+㉡을 하면 $x + 2z = 11$ ㉣

㉣+㉢을 하면 $3z = 18$, $z = 6$ ㉤

㉤을 ㉡, ㉢에 대입하면 $x = -1$, $y = -6$

따라서 $xyz = 36$

6. [출제의도] 집합의 연산법칙 이해하기

드 모르간의 법칙에 의해 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$
 $n(A \cup B) = n(U) - n(A^c \cap B^c) = 50 - 5 = 45$
따라서 $n((A - B) \cup (B - A))$
 $= n(A \cup B) - n(A \cap B) = 45 - 12 = 33$

7. [출제의도] 직선의 수직 조건 이해하기

두 직선의 방정식 $x - 2y + 2 = 0$,

$2x + y - 6 = 0$ 을 연립하여 풀면

$x = 2$, $y = 2$ 이므로

두 직선의 교점의 좌표는 $(2, 2)$ 이고
직선 $x - 3y + 6 = 0$ 와 수직인 직선의 기울기는 -3 이다.

기울기가 -3 이고 점 $(2, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y - 2 = -3(x - 2)$

따라서 y 절편은 8

(별해)

두 직선 $x - 2y + 2 = 0$, $2x + y - 6 = 0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x - 2y + 2 + k(2x + y - 6) = 0$ (단, k 는 실수)

즉, $(1+2k)x + (-2+k)y + 2-6k = 0$ ㉠

직선 ㉠과 직선 $x - 3y + 6 = 0$ 이 수직이므로

$(1+2k) - 3(-2+k) = 0$ 에서 $k = 7$

구하는 직선의 방정식은 $3x + y - 8 = 0$

따라서 y 절편은 8

8. [출제의도] 연립부등식 성질 이해하기

$x^2 + x - 6 \geq 0$ 에서 $(x+3)(x-2) \geq 0$,
 $x \leq -3$ 또는 $x \geq 2$ ㉠

$x^2 - 6x + 5 < 0$ 에서 $(x-1)(x-5) < 0$,
 $1 < x < 5$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$2 \leq x < 5$ 이므로

정수 x 의 값은 2, 3, 4

따라서 정수 x 의 개수는 3

9. [출제의도] 도형의 평행이동 이해하기

원 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ 은

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 8$ 로 나타낼 수 있고 이를 x 축의 방향으로 a 만큼 y 축의 방향으로 b 만큼

평행이동하면 원의 중심은 $(-1+a, 2+b)$ 이고 반지름의 길이는 변함이 없다. 평행이동한 도형이

원 $(x-3)^2 + (y+4)^2 = c$ 이므로

$-1+a = 3$, $2+b = -4$, $c = 8$ 이다.

따라서 $a = 4$, $b = -6$, $c = 8$ 이므로

$a + b + c = 6$

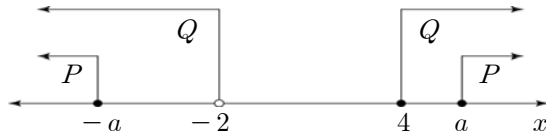
10. [출제의도] 두 조건의 진리집합 사이의 관계 이해하기

두 조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라 하면 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P \subset Q$ 이어야 한다.

$P \subset Q$ 가 성립하도록

두 집합 $P = \{x | x \geq a \text{ 또는 } x \leq -a\}$,

$Q = \{x | x < -2 \text{ 또는 } x \geq 4\}$ 를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



$-a < -2$ ㉠, $a \geq 4$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는 $a \geq 4$ 따라서 양수 a 의 최솟값은 4

11. [출제의도] 다항식의 나눗셈을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

직육면체의 밑면의

가로의 길이는 $n^2 + 3n = n(n+3)$,

세로의 길이는 $n+1 = n \times 1 + 1$,

높이가 $n^3 + 3n^2 + 2n + 2 = n(n^2 + 3n + 2) + 2$

이므로 한 모서리의 길이가 n 인 직육면체를 최대

$(n+3) \times 1 \times (n^2 + 3n + 2)$ 개 얻을 수 있다.

따라서 구하는 최대 개수는 $(n+1)(n+2)(n+3)$

12. [출제의도] 연립부등식의 영역 이해하기

$(x^2 + 2x - y + 1)(x^2 + y^2 - 9) \leq 0$ 에서

$$\begin{cases} x^2 + 2x - y + 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 9 \leq 0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x^2 + 2x - y + 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 9 \geq 0 \end{cases}$$

(i) $\begin{cases} x^2 + 2x - y + 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 9 \leq 0 \end{cases}$ 의 영역은

이차함수 $y = x^2 + 2x + 1$ 의 그래프의 아랫부분(경계선 포함)과 원 $x^2 + y^2 = 9$ 의 내부(경계선 포함)의 공통부분으로

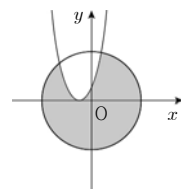
[그림 1]의 어두운 부분이다.

(ii) $\begin{cases} x^2 + 2x - y + 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 9 \geq 0 \end{cases}$ 의 영역은

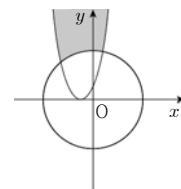
이차함수 $y = x^2 + 2x + 1$ 의 그래프의 윗부분(경계선 포함)과 원 $x^2 + y^2 = 9$ 의 외부(경계선 포함)의 공통부분으로

[그림 2]의 어두운 부분이다.

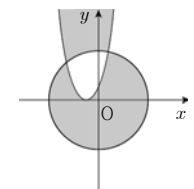
(i), (ii)에 의하여 구하는 영역은 [그림 3]의 어두운 부분이다. (단, 경계선은 포함한다.)



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

13. [출제의도] 직선의 방정식 이해하기

이차함수 $f(x) = x^2 + px + p$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + p - \frac{p^2}{4} \text{ 이므로}$$

꼭짓점 $A\left(-\frac{p}{2}, p - \frac{p^2}{4}\right)$, 점 $B(0, p)$ 이다.

두 점 A , B 를 지나는 직선 l 의 기울기는

$$\frac{p - \left(p - \frac{p^2}{4}\right)}{0 - \left(-\frac{p}{2}\right)} = \frac{p}{2} \text{ 이고 } y \text{절편은 } p \text{ 이므로}$$

직선 l 의 방정식은 $y = \frac{p}{2}x + p$

따라서 직선 l 의 x 절편은 -2

14. [출제의도] 이차함수와 이차부등식의 관계 이해하기

직선 l 의 방정식은 $y = \frac{p}{2}x + p$ 이므로

$$g(x) = \frac{p}{2}x + p \text{ 이다.}$$

부등식 $f(x) - g(x) = x^2 + \frac{p}{2}x \leq 0$ 에 대하여

(i) $p > 0$ 인 경우

$-\frac{p}{2} \leq x \leq 0$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수가 10이 되도록 하는 p 의 값의 범위는

$-10 < -\frac{p}{2} \leq -9$ 에서 $18 \leq p < 20$ 이므로

정수 p 의 값은 18, 19

(ii) $p < 0$ 인 경우

$0 \leq x \leq -\frac{p}{2}$ 를 만족시키는 정수 x 의 개수가 10이 되도록 하는 p 의 값의 범위는

$9 \leq -\frac{p}{2} < 10$ 에서 $-20 < p \leq -18$ 이므로

정수 p 의 값은 $-18, -19$

(i), (ii)에서 정수 p 의 최댓값 $M = 19$, 최솟값 $m = -19$

따라서 $M - m = 38$

15. [출제의도] 방정식의 근을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 의 계수가 모두 실수이므로 $1 + \sqrt{3}i$ 가 근이면 $1 - \sqrt{3}i$ 도 근이다.

$1 + \sqrt{3}i$ 또는 $1 - \sqrt{3}i$ 가 이차방정식

$x^2 + ax + 2 = 0$ 의 근이면 a 가 실수인 이차방정식은 존재하지 않는다.

$1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i$ 를 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 4 = 0$ 이고 방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 은 공통인 근 m 을 가지므로 $x^3 + ax^2 + bx + c = (x^2 - 2x + 4)(x - m) = 0$ $a = -m - 2 \dots\dots \textcircled{1}$
공통인 근이 m 이므로 $m^2 + am + 2 = 0$ 이고 이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면 $m^2 + (-m - 2)m + 2 = 0$ 에서 $-2m + 2 = 0$ 따라서 $m = 1$

16. [출제의도] 이차함수와 이차방정식의 관계를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

집 A와 집 B에 있는 덕트 안의 공기의 속력의 비가 3:5이므로 실수 t 에 대하여 집 A에 있는 덕트 안의 공기의 속력을 $3t$, 집 B에 있는 덕트 안의 공기의 속력을 $5t$ 라 하면

$$P_A = \frac{c \times (3t)^2}{2g} = \frac{9ct^2}{2g}$$

$$P_B = \frac{2c \times (5t)^2}{2g} = \frac{25ct^2}{g}$$

$$\frac{25ct^2}{g} = k \times \frac{9ct^2}{2g}$$

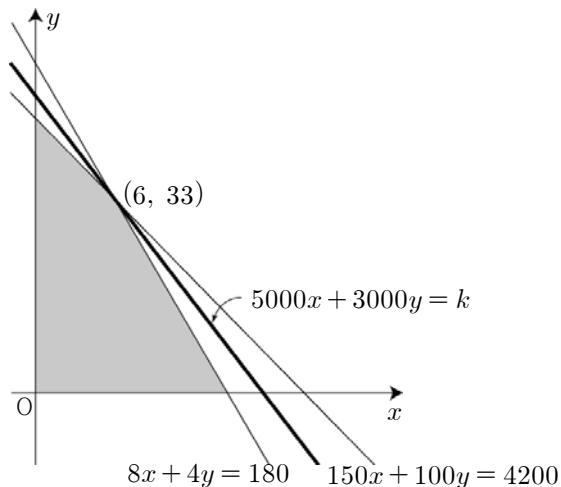
따라서 $k = \frac{50}{9}$

17. [출제의도] 부등식의 영역에서 최대, 최소를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

하루에 만든 컵과 접시의 개수를 각각 x, y 라 하면 점 (x, y) 는 네 부등식 $x \geq 0, y \geq 0, 150x + 100y \leq 4200, 8x + 4y \leq 180$ 을 모두 만족시키는 영역에 있다.

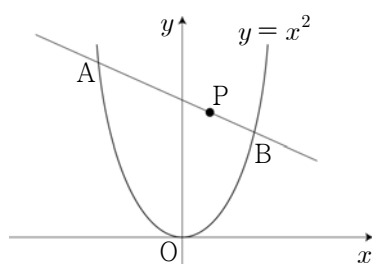
이때, 판매 이익을 k 라 하면 $k = 5000x + 3000y$ 이 직선이 두 직선 $150x + 100y = 4200, 8x + 4y = 180$ 의 교점 $(6, 33)$ 을 지날 때 k 는 최댓값을 가진다. 즉, 하루에 컵을 6개, 접시를 33개 만들어 판매하였을 때, 판매 이익이 최대가 된다.

따라서 최대 판매 이익은 129000 원



18. [출제의도] 직선의 방정식을 이용하여 추론하기

<증명>



임의의 실수 m 에 대하여 부등식 $y > x^2$ 의 영역에 있는 한 점 $P(a, b)$ 를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은 $y = m(x - a) + b \dots\dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ 이 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와 만나는 두 점 A, B의 좌표를 각각 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 선분 AB의 중점 M의 좌표를 $M(X, Y)$ 라 하면

x_1, x_2 는 이차방정식 $x^2 - m(x - a) - b = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의해

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2} \dots\dots \textcircled{2}$$

$$Y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{2}$$

$$= \frac{m^2 - 2(am - b)}{2} = \frac{m^2}{2} - am + b \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에 의하여 $Y = 2X^2 - 2aX + b$

따라서, 구하는 도형의 방정식은

$$y = 2x^2 - 2ax + b \text{이다.}$$

$$f(m) = \frac{m}{2}, g(m) = \frac{m^2}{2}, k = 2$$

따라서 $f(k) + g(k) = 1 + 2 = 3$

19. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 추론하기
다항식 $f(x)$ 를 $(x - a)(x - b)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x) = (x - a)(x - b)Q(x) + R(x) \dots\dots \textcircled{1}$$

ㄱ. $\textcircled{1}$ 은 x 에 대한 항등식이므로 $x = a$ 를 대입하면

$$f(a) = R(a) \text{이므로 } f(a) - R(a) = 0 \text{ (참)}$$

ㄴ. (반례) $f(x) = (x - a)(x - b) + x$ 라 하면

$$R(x) = x \text{이고}$$

$$f(a) - R(b) = a - b$$

$$f(b) - R(a) = b - a$$

이때, $a \neq b$ 이므로

$$f(a) - R(b) \neq f(b) - R(a) \text{ (거짓)}$$

ㄷ. $R(x) = px + q$ 라 하면

$$f(a) = pa + q, f(b) = pb + q \text{에서}$$

$$af(b) - bf(a) = abp + aq - abp - bq$$

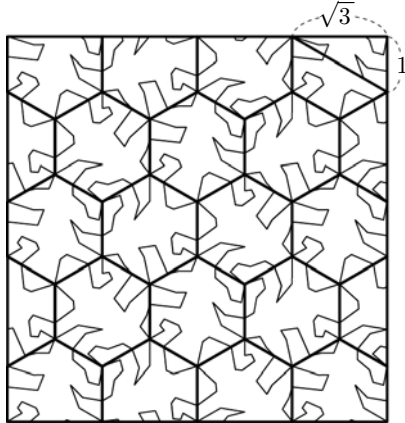
$$= (a - b)q$$

$$R(0) = q \text{이므로}$$

$$af(b) - bf(a) = (a - b)R(0) \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

20. [출제의도] 도형의 대칭이동을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



정육각형은 6개의 정삼각형으로 이루어져 있고 [그림 1]에 있는 직사각형의 가로 길이가 $4\sqrt{3}$ 이므로 정육각형의 한 변의 길이는 1이고 도마뱀 모양 한 개의 넓이는 한 변의 길이가 1인 정육각형의 넓이와 같다.

따라서 도마뱀 모양 한 개의 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

21. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

이차함수 $y = x^2 - 2x - 3$ 의 그래프 위의 점 $C(a, a^2 - 2a - 3)$ 이 원의 중심이고 원이 직선 $y = 2x + 9$ 에 접하므로 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 r 와 같다.

$$r = \frac{|2a - (a^2 - 2a - 3) + 9|}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{|-a^2 + 4a + 12|}{\sqrt{5}}$$

점 $C(a, b)$ 는 주어진 조건 $2a - b + 9 > 0$ 에 의하여 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3$ 과 직선 $y = 2x + 9$ 의 두 교점 사이에 있으므로 $-2 < a < 6$ 이다.

$-a^2 + 4a + 12 > 0$ 이므로

$$r = \frac{-a^2 + 4a + 12}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}(a - 2)^2 + \frac{16}{\sqrt{5}}$$

그러므로 $a = 2$ 일 때 반지름의 길이 r 의 최댓값은 $\frac{16}{\sqrt{5}}$ 이므로 원의 넓이의 최댓값은 $\frac{256}{5}\pi$ 이다.

따라서 $p + q = 261$

(별해)

원의 반지름의 길이는 원의 중심 C와 직선 $y = 2x + 9$ 사이의 거리이다. 점 C를 지나는 직선 $y = 2x + k$ 가 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3$ 의 그래프와 접할 때 원의 반지름의 길이가 최대이므로 원의 넓이는 최대이다.

방정식 $x^2 - 2x - 3 = 2x + k$ 가 중근을 가져야 하므로 $x^2 - 4x - 3 - k = 0$ 의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 + 3 + k = 0, k = -7$$

넓이가 최대인 원의 반지름의 길이는 두 직선의 방정식 $y = 2x - 7$ 과 $y = 2x + 9$ 사이의 거리인 $\frac{16}{\sqrt{5}}$ 과 같으므로 원의 넓이의 최댓값은 $\frac{256}{5}\pi$ 이다.

따라서 $p + q = 261$

22. [출제의도] 인수분해 이해하기

다항식 $2x^3 - x^2 - 7x + 6$ 을 인수분해하면

$(x - 1)(x + 2)(2x - 3)$ 이므로 $a = 2, b = -3$ 이다.

따라서 $a - b = 5$

23. [출제의도] 이차방정식의 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기

이차함수 $y = 3x^2 - 4x + k$ 의 그래프가 직선 $y = 8x + 12$ 와 한 점에서 만나야 하므로 이차방정식 $3x^2 - 12x + k - 12 = 0$ 의 판별식을 D라 하면 $D = 0$ 이다.

$$\frac{D}{4} = 6^2 - 3(k - 12) = 72 - 3k = 0$$

따라서 $k = 24$

24. [출제의도] 조건을 만족시키는 집합의 포함 관계를 이용하여 추론하기

$A = \{i, -1, -i, 1\}$ 이고

$z \in A$ 이면 $z^2 = 1$ 또는 $z^2 = -1$ 이므로

$$B = \{z_1^2 + z_2^2 \mid z_1 \in A, z_2 \in A\} = \{-2, 0, 2\}$$

따라서 집합 B의 원소의 개수는 3

25. [출제의도] 명제의 참, 거짓을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

명제 '집합 P의 어떤 원소 x에 대하여 x는 3의 배수이다.'가 참이 되도록 하려면 집합 P는 적어도 하나의 3의 배수를 원소로 가져야 한다.

(i) $\{3\} \subset P \subset \{1, 2, 3, 6\}$ 인 경우

집합 P의 개수는 8

(ii) $\{6\} \subset P \subset \{1, 2, 3, 6\}$ 인 경우

집합 P의 개수는 8

(iii) $\{3, 6\} \subset P \subset \{1, 2, 3, 6\}$ 인 경우

집합 P의 개수는 4

따라서 (iii)은 (i)과 (ii)에 동시에 포함되므로 구하는 집합 P의 개수는 $8 + 8 - 4 = 12$

26. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계 이해하기

$f(x) = ax + b$ 라 하자.

직선 $y = ax + b$ 와 원 $x^2 + y^2 = 25$ 가 접하므로

방정식 $x^2 + (ax + b)^2 = 25$ 는 중근을 갖는다.

이차방정식 $(a^2 + 1)x^2 + 2abx + b^2 - 25 = 0$ 의

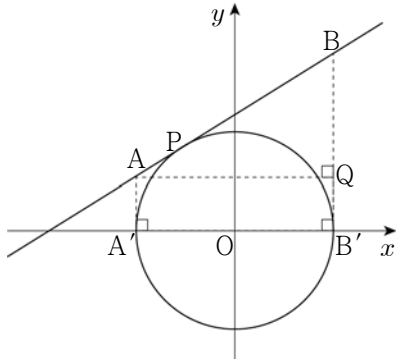
판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2b^2 - (a^2 + 1)(b^2 - 25)$$

$$= 25a^2 - b^2 + 25 = 0 \dots \text{㉠}$$

$$f(-5)f(5) = (-5a+b)(5a+b) = b^2 - 25a^2$$

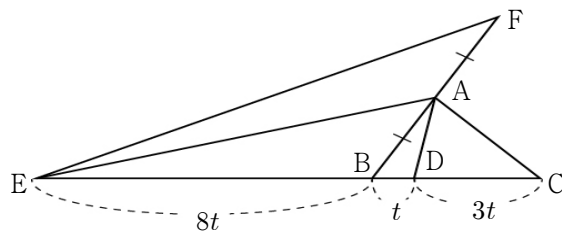
따라서 ㉠에 의해 $f(-5)f(5) = 25$
(별해)



두 점 $(-5, 0)$, $(5, 0)$ 을 각각 A' , B' 이라 하고 두 직선 $x=-5$, $x=5$ 와 직선 $y=f(x)$ 의 교점을 각각 A , B 라 하면 두 점 A , B 의 좌표는 각각 $A(-5, f(-5))$, $B(5, f(5))$ 이고 $\overline{AA'} = f(-5)$, $\overline{BB'} = f(5)$
점 A 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 선분 BB' 과 만나는 점을 Q 라 하면 $\overline{AB} = f(-5) + f(5)$, $\overline{BQ} = f(5) - f(-5)$, $\overline{AQ} = 10$ 이므로 직각삼각형 AQB 에서 $\{f(-5) + f(5)\}^2 = \{f(5) - f(-5)\}^2 + 10^2$
 $\{f(-5)\}^2 + 2f(-5)f(5) + \{f(5)\}^2 = \{f(5)\}^2 - 2f(-5)f(5) + \{f(5)\}^2 + 100$ 이므로 $4f(-5)f(5) = 100$
따라서 $f(-5)f(5) = 25$

27. [출제의도] 대칭이동을 이용하여 추론하기
주어진 규칙에 따라 점 P_2, P_3, P_4, \dots 을 구하면 $P_1(3, 2) \rightarrow P_2(2, 3) \rightarrow P_3(2, -3)$
 $\rightarrow P_4(-2, -3) \rightarrow P_5(-3, -2) \rightarrow P_6(-3, 2)$
 $\rightarrow P_7(3, 2) \rightarrow P_8(2, 3) \rightarrow P_9(2, -3) \rightarrow \dots$
과 같으므로 자연수 n 에 대하여 점 P_n 의 좌표와 점 P_{n+6} 의 좌표가 같다.
 $50 = 6 \times 8 + 2$ 이므로 점 P_{50} 의 좌표는 점 P_2 의 좌표와 같다. 점 P_{50} 의 좌표는 $(2, 3)$ 이다.
따라서 $10x_{50} + y_{50} = 23$

28. [출제의도] 선분의 내분과 외분을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
삼각형 ABC 에서 점 D 는 선분 BC 를 1:3으로 내분하므로 $\overline{BD} : \overline{DC} = 1 : 3$
점 E 는 선분 BC 를 2:3으로 외분하므로 $\overline{EB} = 2\overline{BC}$ 이고, 점 F 는 선분 AB 를 1:2로 외분하므로 $\overline{BF} = 2\overline{AB}$ 이다.
 $\overline{BD} : \overline{EB} = 1 : 8$ 이므로 삼각형 AEB 의 넓이는 삼각형 ABD 의 넓이의 8배이다. 또한 $\overline{BF} = 2\overline{AB}$ 이므로 삼각형 FEB 의 넓이는 삼각형 ABD 의 넓이의 16배이다.
따라서 $k = 16$



(단, t 는 실수)

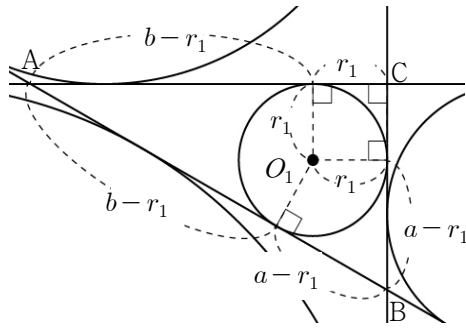
29. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
 α, β 가 이차방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ 이고 $\alpha + \beta = -1$ 이다.
 $\alpha + 1 = -\beta$ 이므로 $\alpha^2 = \beta$, $\beta^2 = \alpha$
 $f(\alpha^2) = f(\beta) = 4\beta + 4$, $f(\beta^2) = f(\alpha) = 4\alpha + 4$ 이므로 $f(\beta) - 4\beta - 4 = 0$, $f(\alpha) - 4\alpha - 4 = 0$
이때, 이차방정식 $f(x) - 4x - 4 = 0$ 의 두 근이 α, β 이고 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x) - 4x - 4 = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + x + 1$,
 $f(x) = x^2 + 5x + 5$
따라서 $p + q = 10$
(별해) α, β 가 이차방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이므로 $\alpha^3 = 1$ 이고 $\alpha^2 = \beta$
 $f(\alpha^2) = \alpha^4 + p\alpha^2 + q = -4\alpha$
 $p\beta + q = -5\alpha \dots \text{㉠}$
 $f(\beta^2) = \beta^4 + p\beta^2 + q = -4\beta$
 $p\alpha + q = -5\beta \dots \text{㉡}$
㉠+㉡에서 $p(\alpha + \beta) + 2q = -5(\alpha + \beta) \dots \text{㉢}$
㉡-㉠에서 $p(\alpha - \beta) = 5(\alpha - \beta) \dots \text{㉣}$
 $\alpha + \beta = -1$, $\alpha \neq \beta$ 이므로
㉣, ㉣에서 $p = 5$, $q = 5$
따라서 $p + q = 10$

30. [출제의도] 원의 성질과 여러 가지 방정식을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
직각삼각형 ABC 의 넓이를 S , 세 변 AB, BC, CA 의 길이를 각각 c, a, b 라 하자.

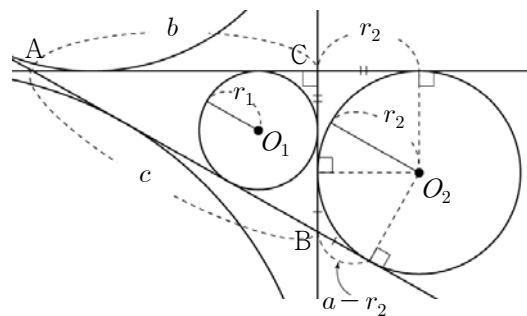
$$S = \frac{1}{2}r_1(a+b+c)$$

이므로 $S = \frac{15}{2}$, $r_1 = 1$ 이므로 $a+b+c = 15$
한편, 세 꼭짓점 A, B, C 에서 원 O_1 에 그은 두 접선의 접점까지의 길이가 같으므로 $c = (a - r_1) + (b - r_1)$, $r_1 = \frac{a+b-c}{2}$



점 A 에서 원 O_2 에 그은 두 접선의 접점까지의 길이가 같으므로

$$b + r_2 = c + (a - r_2), r_2 = \frac{a-b+c}{2}$$



점 B 에서 원 O_3 에 그은 두 접선의 접점까지의 길이가 같으므로

$$a + r_3 = c + (b - r_3), r_3 = \frac{-a+b+c}{2}$$

점 A, B 에서 원 O_4 에 그은 두 접선의 접점까지의 길이가 같으므로

$$(r_4 - a) + (r_4 - b) = c, r_4 = \frac{a+b+c}{2}$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = a + b + c = 15$$

따라서 $r_2 + r_3 + r_4 = 14$