2015학년도 7월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

수학 영역

B형 정답

1	⑤	2	①	3	②	4	⑤	5	②
6	②	7	③	8	④	9	③	10	④
11	①	12	⑤	13	①	14	④	15	①
16	②	17	⑤	18	③	19	④	20	①
21	③	22	2	23	38	24	12	25	3
26	40	27	350	28	50	29	18	30	15

수학 영역

B형 해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$\sqrt[3]{2}\times 16^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{8}{3}} = 2^3 = 8$

2. [출제의도] 행렬 계산하기

$A(A+B)=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\1&-3\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 -4

3. [출제의도] 삼각함수의 배각공식 계산하기

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = \dfrac{3}{5}$

4. [출제의도] 사건의 독립 이해하기

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{2}$

5. [출제의도] 접선의 방정식 이해하기

$y' = 2\ln 2\times 2^{2x-3}$

따라서 곡선 $y=2^{2x-3}+1$ 위의 점 $\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는 $\ln 2$

6. [출제의도] 무한급수 이해하기

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2)=4$ 이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=0,\ \lim_{n\to\infty}a_n=2$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(4a_n+\frac{3n^2-1}{n^2+1}\right)=4\times 2+3=11$

7. [출제의도] 합성변환 이해하기

일차변환 f를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

일차변환 g를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

합성변환 $f\circ g$에 의하여

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

따라서 $a+b=3$

8. [출제의도] 조건부확률 이해하기

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나온 두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A, 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나온 두 눈의 수가 모두 짝수인 사건을 B라 하자.

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{3\times 3}{36}=\dfrac{3}{4}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3\times 3}{36}=\dfrac{1}{4}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{1}{3}$

9. [출제의도] 쌍곡선의 성질 이해하기

원 $x^2+y^2=8$과 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 만나는 네 점이 원의 둘레를 4등분하므로

쌍곡선이 점 $(2,\ 2)$를 지난다.

$\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{4}{b^2}=1$ … ㉠

쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{2}x$이므로

$b=\sqrt{2}a$ … ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $a^2+b^2=6$

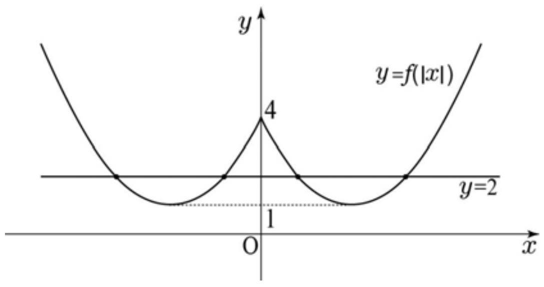
10. [출제의도] 무리방정식을 활용하여 문제해결하기

$\sqrt{13-2f(|x|)}=f(|x|)+1$의 양변을 제곱하면

$\{f(|x|)\}^2+4f(|x|)-12=0$

$f(|x|)=2$ 또는 $f(|x|)=-6$

$f(|x|)=-6$일 때는 주어진 방정식을 만족시키지 않으므로 $f(|x|)=2$



따라서 $f(|x|)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 4

11. [출제의도] 회전변환 이해하기

직선 $y=x+1$ 위의 점 $(x,\ y)$가

행렬 $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환 f에 의하여 직선 $y=2x+k$ 위의 점 $(x',\ y')$으로 옮겨진다고 하면

$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

$x=x'\cos\theta+y'\sin\theta$ … ㉠

$y=-x'\sin\theta+y'\cos\theta$ … ㉡

$y=x+1$에 ㉠, ㉡를 대입하여 정리하면

$-x'\sin\theta+y'\cos\theta=x'\cos\theta+y'\sin\theta+1$

$(\cos\theta-\sin\theta)y'=(\cos\theta+\sin\theta)x'+1$

$y=2x+k$와 일치하므로

$\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{1}=\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{2}=\dfrac{1}{k}$

$3\sin\theta=\cos\theta$

$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$, $k=\dfrac{1}{2\sin\theta}$

따라서 $k^2=\dfrac{1}{4\sin^2\theta}=\dfrac{5}{2}$

12. [출제의도] 역행렬의 성질을 활용하여 추론하기

ㄱ. $A^2+AB+A+B=E$에서

$(A+E)(A+B)=E=(A+B)(A+E)$

$A^2+AB+A+B=A^2+A+BA+B$

$AB=BA$ (참)

ㄴ. $AB=BA$이므로

$A^2+3AB+2B^2=(A+B)(A+2B)=O$

$(A+B)^{-1}$이 존재하므로

$A=-2B$ … ㉠

$A^2=4B^2$ (참)

ㄷ. $A^2+AB+A+B=E$에 ㉠을 대입하면

$2B^2-B=E$이므로

B의 역행렬은 $2B-E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. [출제의도] 등비수열 이해하기

세 수 $f(a)$, $f(\sqrt{3})$, $f(a+2)$가

이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\{f(\sqrt{3})\}^2=f(a)\times f(a+2)$

$\left(\dfrac{p}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{p}{a}\times\dfrac{p}{a+2}$

$a^2+2a-3=0$

$(a-1)(a+3)=0$

$a>0$ 이므로 $a=1$

14. [출제의도] 회전체의 부피 이해하기

$\pi\displaystyle\int_1^p\left(\frac{p}{x}\right)^2dx=\pi p^2\left[-\frac{1}{x}\right]_1^p=20\pi$

$-p+p^2=20$, $(p-5)(p+4)=0$

$p>1$ 이므로 $p=5$

15. [출제의도] 삼수선의 정리 이해하기

점 P의 xy평면 위로의 정사영 Q의 좌표는

$(1,\ 1,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=4$

점 Q에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 R라 하면

삼수선 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PR}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$

점 Q가 이등변삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{QR}}=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{AR}}=\sqrt{2}$

따라서 점 P에서 직선 BC까지의 거리는 $3\sqrt{2}$

16. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

주어진 식의 양변을 $a_n a_{n+1}$로 나누면

$$\frac{n+1}{a_{n+1}}=\frac{3n-2a_n}{a_n}$$

이다. $b_n=\dfrac{n}{a_n}$이라 하면

$$b_{n+1}=3b_n+\boxed{(-2)}$$

이고, $b_{n+1}-1=3(b_n-1)$이다.
$b_1=4$이므로 수열 $\{b_n-1\}$은
첫째항이 3이고 공비가 3인 등비수열이다.

$$b_n-1=\boxed{3^n}$$
$$b_n=\boxed{3^n}+1$$

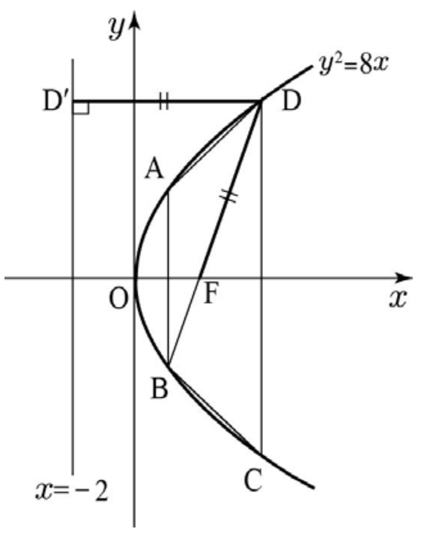
이다. 그러므로

$$a_n=\frac{n}{\boxed{3^n}+1}\quad(n\ge 1)$$

이다.

$p=-2$, $f(n)=3^n$
따라서 $-2+f(3)=25$

17. [출제의도] 포물선의 성질을 활용하여 문제해결하기



포물선 $y^2=8x$의 초점 F의 좌표는 $(2,\,0)$
점 D에서 포물선의 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 D′이라 하면 $\overline{\mathrm{DD'}}=\overline{\mathrm{FD}}=6$이므로 점 D의 x좌표는 4이고 점 D의 좌표는 $(4,\,4\sqrt{2})$
점 B의 좌표를 $(a,\,b)$라 하면
직선 BF의 기울기와 직선 FD의 기울기가 같으므로

$$\frac{-b}{2-a}=\frac{4\sqrt{2}}{2}$$

$b=2\sqrt{2}a-4\sqrt{2}$
$b^2=8a$, $a^2-5a+4=0$
$a<2$ 이므로 $a=1$
따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(8\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times 3=18\sqrt{2}$$

18. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 활용하여 문제해결하기

주사위 한 개를 던져서 나오는 눈의 수가
2 이하일 사건을 A라 하면 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{3}$
3 이상일 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}$
3번째 시행에서 4가 적혀 있는 카드가 뒤집어질 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) ABA 또는 ABB인 경우의 확률 :

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$$

(ⅱ) AAB인 경우의 확률 :

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$$

(ⅲ) BAA 또는 BAB인 경우의 확률 :

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{9}=\frac{14}{27}$$

19. [출제의도] 부분적분법을 활용하여 추론하기

$F(x)+xf(x)=F(x)+xF'(x)=\{xF(x)\}'$
주어진 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$$\begin{aligned}xF(x)&=\int(2x+2)e^x dx\\&=(2x+2)e^x-\int 2e^x dx\\&=(2x+2)e^x-2e^x+C\\&=2xe^x+C\ (C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

$F(1)=2e$이므로
$F(1)=2e+C=2e$에서 $C=0$
$F(x)=2e^x$
따라서 $F(3)=2e^3$

20. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 문제해결하기

$\overline{\mathrm{PC}}=6\tan\theta$, $\overline{\mathrm{CQ}}=6\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$
$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{CQ}}=15$

$$6\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+6\tan\theta=15$$
$$\frac{6}{\tan\theta}+6\tan\theta=15$$

$2\tan^2\theta-5\tan\theta+2=0$
$(2\tan\theta-1)(\tan\theta-2)=0$
$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ 또는 $\tan\theta=2$
$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$
따라서 $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{4}{3}$

21. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기

<B형>과 <C형>이 각각 2번 나타나도록 5개의 바둑돌을 나열한 경우는
●○●○● 또는 ○●○●○

(ⅰ) ●○●○●인 경우
1번의 <D형>을 만들기 위해서는 새로운 1개의 ○을 나열되어 있는 ○에 이웃하도록 나열하고, 4번의 <A형>을 만들기 위해서는 새로운 4개의 ●을 나열되어 있는 ●에 이웃하도록 나열하면 되므로

$${}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{H}_4={}_2\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_4=30$$

(ⅱ) ○●○●○인 경우
같은 방법으로

$${}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{H}_4={}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_4=15$$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 경우의 수는 45

22. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=2$$

23. [출제의도] 분수부등식 계산하기

$$\frac{1}{x-12}+\frac{2}{x}=\frac{3x-24}{x(x-12)}\le 0$$

$3x(x-8)(x-12)\le 0\ (x\ne 0,\ x\ne 12)$
$x<0$ 또는 $8\le x<12$
따라서 주어진 식을 만족시키는
모든 자연수 x는 8, 9, 10, 11이므로
합은 38

24. [출제의도] 역함수의 미분법 이해하기

$f(0)=1$이므로 $g(1)=0$
$f'(x)=3x^2+2$에서 $f'(0)=2$이므로
$g'(1)=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2}$
따라서 $24g'(1)=12$

25. [출제의도] 로그방정식을 활용하여 문제해결하기

$\log C_{\mathrm{A}}=3-\log V_0+\log W_0$ … ㉠
$\log C_{\mathrm{B}}=3-\log\dfrac{1}{9}V_0+\log\dfrac{1}{27}W_0$ … ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $\log\dfrac{C_{\mathrm{A}}}{C_{\mathrm{B}}}=\log\dfrac{1}{9}-\log\dfrac{1}{27}=\log 3$
따라서 $\dfrac{C_{\mathrm{A}}}{C_{\mathrm{B}}}=k$이므로 $k=3$

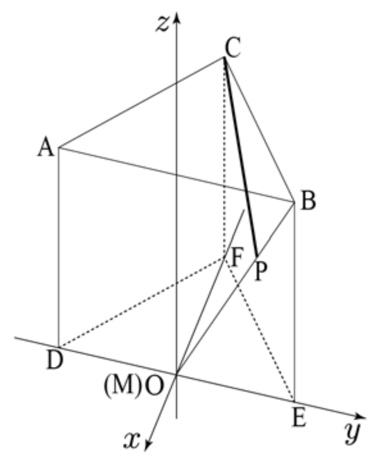
26. [출제의도] 가속도를 활용하여 문제해결하기

$x'(t)=1-\dfrac{40}{\pi}\sin(2\pi t)$
$x''(t)=-80\cos(2\pi t)$
따라서 시각 $t=\dfrac{1}{3}$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\left|x''\left(\frac{1}{3}\right)\right|=\left|-80\cos\frac{2\pi}{3}\right|=40$$

27. [출제의도] 공간좌표 이해하기

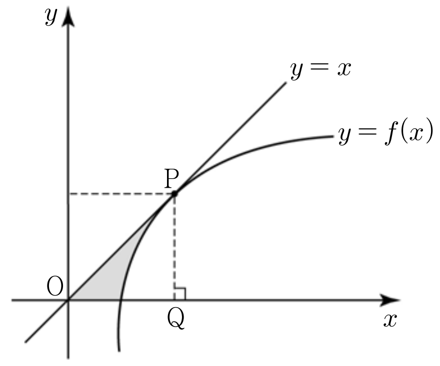
그림과 같이 점 M을 좌표공간의 원점으로 하면



점 $\mathrm{B}(0,\,3,\,6)$, 점 $\mathrm{C}(-3\sqrt{3},\,0,\,6)$에서
점 P는 $\overline{\mathrm{BM}}$를 $1:2$로 내분하므로 $\mathrm{P}(0,\,2,\,4)$
$\overline{\mathrm{CP}}=l=\sqrt{35}$
따라서 $10l^2=350$

28. [출제의도] 정적분과 접선의 기울기를 활용하여 문제해결하기

$f(x)=k\ln x$라 하자.



접점의 좌표를 $\mathrm{P}(p, p)$라 하면

$f(p)=k\ln p=p$ … ㉠

$f'(x)=\dfrac{k}{x}$이므로 $f'(p)=\dfrac{k}{p}=1$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $p=e,\ k=e$

$f(x)=e\ln x$

구하고자 하는 넓이 S는

$S=$(삼각형 OPQ의 넓이)$-\displaystyle\int_1^e f(x)dx$

$=\dfrac{1}{2}e^2-\displaystyle\int_1^e e\ln x dx$

$=\dfrac{1}{2}e^2-e\left[x\ln x-x\right]_1^e$

$=\dfrac{1}{2}e^2-e(e\ln e-e+1)$

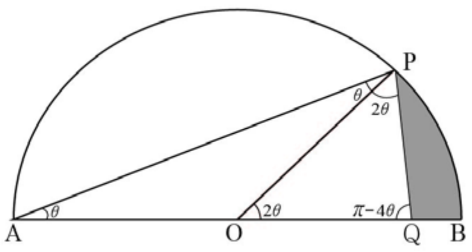
$=\dfrac{1}{2}e^2-e$

따라서 $a=\dfrac{1}{2},\ b=1$이므로

$100ab=50$

29. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

반원의 중심을 O라 하자.



$\overline{\mathrm{OP}}=6,\ \angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{OPA}=\theta$

$\angle\mathrm{POQ}=\angle\mathrm{OPQ}=2\theta,\ \angle\mathrm{OQP}=\pi-4\theta$

삼각형 OQP에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin 2\theta}=\dfrac{6}{\sin(\pi-4\theta)}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{6\sin 2\theta}{\sin 4\theta}=\dfrac{6\sin 2\theta}{2\sin 2\theta\cos 2\theta}=\dfrac{3}{\cos 2\theta}$

삼각형 OQP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 6\times\dfrac{3}{\cos 2\theta}\times\sin 2\theta=\dfrac{9\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

$S(\theta)=$(부채꼴 OBP의 넓이)

$-$(삼각형 OQP의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times 6^2\times 2\theta-\dfrac{9\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

$=36\theta-\dfrac{9\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to+0}\frac{36\theta-\dfrac{9\sin 2\theta}{\cos 2\theta}}{\theta}=18$

30. [출제의도] 정사영을 활용하여 추론하기

$\tan(\angle\mathrm{AOB})=\tan(\angle\mathrm{AOC})=\sqrt{3}$

$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{3}$

맞꼭지각의 성질에 의하여

$\angle\mathrm{DOE}=\angle\mathrm{DOF}=\dfrac{\pi}{3}$

$\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OE}}=\overline{\mathrm{OF}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{DF}}=2$

$\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}=4$이므로

삼각형 OBC와 삼각형 OEF의 닮음비가 2 : 1이고

$\overline{\mathrm{EF}}=\sqrt{6}$

선분 EF의 중점을 H라 하자.

$\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

그러므로 삼각형 DEF의 넓이 S'은

$S'=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DH}}\times\overline{\mathrm{EF}}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{2}\times\sqrt{6}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

평면 OBC와 평면 OEF는 같은 평면이므로

두 평면 DEF와 OBC가 이루는 예각의 크기는

두 평면 DEF와 OEF가 이루는 예각의 크기와 같다.

두 평면 DEF와 OEF가 이루는 예각의 크기 θ는

두 직선 DH, OH가 이루는 예각의 크기와 같다.

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{DH}}^2+\overline{\mathrm{OH}}^2-\overline{\mathrm{OD}}^2}{2\times\overline{\mathrm{DH}}\times\overline{\mathrm{OH}}}=\dfrac{1}{5}$

삼각형 DEF의 평면 OBC 위로의 정사영의 넓이

$S=S'\times\cos\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{10}$

따라서 $100S^2=15$