2015학년도 7월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

수학 영역

A형 정답

1	③	2	①	3	②	4	④	5	⑤
6	②	7	④	8	③	9	④	10	⑤
11	③	12	②	13	①	14	⑤	15	①
16	②	17	②	18	⑤	19	④	20	①
21	③	22	3	23	10	24	11	25	14
26	9	27	165	28	88	29	27	30	45

수학 영역

A형 해설

1. [출제의도] 로그 계산하기
$\log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 8 = 3$

2. [출제의도] 행렬 계산하기
$A + 2B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$
따라서 모든 성분의 합은 13

3. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기
$\lim_{x \to 0} \frac{x(x+11)}{x} = 11$

4. [출제의도] 조건부확률 이해하기
$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{2}{3}$

5. [출제의도] 수열의 극한 이해하기
$\lim_{n \to \infty} a_n = 5$, $\lim_{n \to \infty} b_n = 4$
따라서 $\lim_{n \to \infty} a_n b_n = 20$

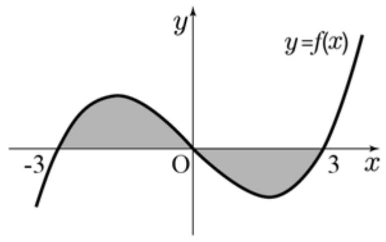
6. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 활용하여 추론하기
$a_n = S_n - S_{n-1} = (n + 2^n) - \{(n-1) + 2^{n-1}\}$
$= 2^{n-1} + 1 \ (n \geq 2)$
따라서 $a_6 = 33$

7. [출제의도] 함수의 좌극한과 우극한 이해하기
$\lim_{x \to -1-0} f(x) + \lim_{x \to 2+0} f(x) = 0 + 1 = 1$

8. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬 이해하기
x, y에 대한 연립일차방정식이 $x = 0$, $y = 0$ 이외의 해를 가지려면 행렬 $\begin{pmatrix} a-1 & a+2 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로
$(a-1)(a+1) - (a+2) = 0$
$a^2 - a - 3 = 0$
따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 -3

9. [출제의도] 이항정리 이해하기
다항식 $(1+3x)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5\mathrm{C}_r\, 1^{5-r}\,(3x)^r \ (r = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$
따라서 $r = 3$일 때 x^3의 계수는 270

10. [출제의도] 정적분과 넓이 이해하기
$f(x) = x^3 - 9x = x(x-3)(x+3)$



함수 $y = f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$$\int_{-3}^{3} |f(x)|\, dx = 2\int_{-3}^{0} f(x)\, dx$$
$$= 2\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right]_{-3}^{0} = \frac{81}{2}$$

11. [출제의도] 지수부등식 이해하기
$2^x = t \ (t > 0)$이라 하면
$t^2 - 10t + 16 \leq 0$, $2 \leq t \leq 8$
$2 \leq 2^x \leq 2^3$, $1 \leq x \leq 3$
따라서 모든 정수 x의 값의 합은 6

12. [출제의도] 미분을 활용하여 추론하기
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4 - k$라 하면
$f'(x) = 3(x+3)(x-1)$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$31-k$ (극댓값)	$\searrow$	$-1-k$ (극솟값)	$\nearrow$

삼차방정식 $f(x) = 0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(-3)f(1) < 0$이어야 하므로
$(31-k)(-1-k) < 0$
$-1 < k < 31$
따라서 모든 정수 k의 개수는 31

13. [출제의도] 등차수열 이해하기
두 점 A, B의 x좌표는 각각 $-\sqrt{k}$, $\sqrt{k}$
세 수 $-\sqrt{k}$, $\sqrt{k}$, 3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $2\sqrt{k} = -\sqrt{k} + 3$, $\sqrt{k} = 1$
따라서 $k = 1$

14. [출제의도] 접선의 방정식 이해하기
$f'(x) = 2x$이고 $f'(1) = 2$이므로
점 P$(1, 1)$에서의 접선 l의 방정식은
$y = 2x - 1$
접점 Q의 좌표를 (a, b)라 하면 $b = 2a - 1$
직선 l에 곡선 $y = g(x)$가 접하므로
$g'(x) = -2x + 6$
$g'(a) = -2a + 6 = 2$
$a = 2$, $b = 3$이므로 점 Q$(2, 3)$
$g(2) = 3$이므로 $k = 4$
원점으로부터 가까운 점을 R라 하면
R$(1, 0)$, S$(5, 0)$
따라서 삼각형 QRS의 넓이는 6

15. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수 이해하기
주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x) = f(x) + xf'(x) - 12x^3 + 4x$
$xf'(x) = 12x^3 - 4x$
$f'(x) = 12x^2 - 4$
$f(x) = 4x^3 - 4x + C$ (C는 적분상수)
$x = 1$일 때, $\int_1^1 f(t)dt = 1 \cdot f(1) - 3 + 2 = 0$
$f(1) = 1$이므로 $C = 1$
따라서 $f(0) = 1$

16. [출제의도] 로그방정식을 활용하여 문제해결하기
$\log C_{\mathrm{A}} = 3 - \log V_0 + \log W_0$ $\cdots$ ㉠
$\log C_{\mathrm{B}} = 3 - \log \frac{1}{9} V_0 + \log \frac{1}{27} W_0$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $\log \frac{C_{\mathrm{A}}}{C_{\mathrm{B}}} = \log \frac{1}{9} - \log \frac{1}{27} = \log 3$
따라서 $\frac{C_{\mathrm{A}}}{C_{\mathrm{B}}} = k$이므로 $k = 3$

17. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

> 주어진 식의 양변을 $a_n a_{n+1}$로 나누면
> $\frac{n+1}{a_{n+1}} = \frac{3n - 2a_n}{a_n}$
> 이다. $b_n = \frac{n}{a_n}$이라 하면
> $b_{n+1} = 3b_n + \boxed{(-2)}$
> 이고, $b_{n+1} - 1 = 3(b_n - 1)$이다.
> $b_1 = 4$이므로 수열 $\{b_n - 1\}$은
> 첫째항이 3이고 공비가 3인 등비수열이다.
> $b_n - 1 = \boxed{3^n}$
> $b_n = \boxed{3^n} + 1$
> 이다. 그러므로
> $a_n = \frac{n}{\boxed{3^n} + 1} \ (n \geq 1)$
> 이다.

$p = -2$, $f(n) = 3^n$
따라서 $-2 + f(3) = 25$

18. [출제의도] 역행렬의 성질을 활용하여 추론하기
ㄱ. $\frac{1}{2}A(B-E) = E = (B-E)\left(\frac{1}{2}A\right)$이므로
$AB - A = BA - A$
$AB = BA$ (참)
ㄴ. $BA^2 - A^2 + B = -E$
$(BA - A)A + B = -E$
ㄱ에 의하여 $(AB - A)A + B = -E$
$2A + B = -E$ (참)
ㄷ. ㄴ에 의하여 $B = -2A - E$
$A(-2A - E) - A = 2E$
$-A^2 - A = E$
$-A(A + E) = E$
그러므로 $A + E$의 역행렬은 존재한다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. [출제의도] 함수의 연속성을 활용하여 문제해결하기

$f(x-1)=\begin{cases} -x & (x \le 1) \\ 2x-2+a & (x>1) \end{cases}$

$g(x)=f(x)f(x-1)$

$=\begin{cases} (-x-1)(-x) & (x \le 0) \\ (2x+a)(-x) & (0<x \le 1) \\ (2x+a)(2x-2+a) & (x>1) \end{cases}$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되기 위하여 $x=0$, $x=1$에서도 연속이 되어야 한다.

(ⅰ) $x=0$일 때

$\lim\limits_{x \to -0} g(x)=g(0)=\lim\limits_{x \to +0} g(x)$이므로

함수 $g(x)$는 a의 값에 관계없이

$x=0$에서 연속이다.

(ⅱ) $x=1$일 때

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되려면

$\lim\limits_{x \to 1-0} g(x)=g(1)=\lim\limits_{x \to 1+0} g(x)$

$-(a+2)=(a+2)a$, $(a+1)(a+2)=0$

$a \ne -1$이므로 $a=-2$

20. [출제의도] 무한급수를 활용하여 추론하기

마름모의 성질에 의하여 마름모 ADEF의

두 대각선이 만나는 점과 원의 중심이 일치하므로

$\overline{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AE}}=2\sqrt{3}$

$\angle \mathrm{EOP}=\frac{\pi}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{PE}}=3$

사각형 OPEQ의 넓이 $S_1=3\sqrt{3}$

그림 R_n에서 새로 그려진 정삼각형의 한 변의

길이를 a_n이라 하면

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

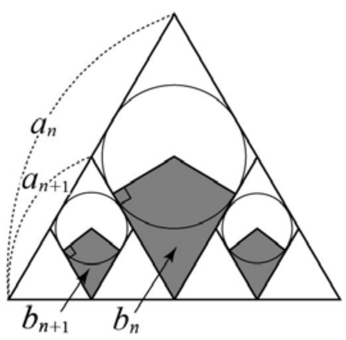


그림 R_n에 색칠한 한 개의 사각형의 넓이를

b_n이라 하면

$b_{n+1}=\frac{1}{4}b_n$

그림 R_{n+1}에서 새로 그려진 사각형의 개수는 그림 R_n에서 새로 그려진 사각형의 개수의 2배이다.

그러므로 S_n은 첫째항이 $3\sqrt{3}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

따라서 $\lim\limits_{n \to \infty} S_n=\dfrac{3\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}}=6\sqrt{3}$

21. [출제의도] 미분을 활용하여 문제해결하기

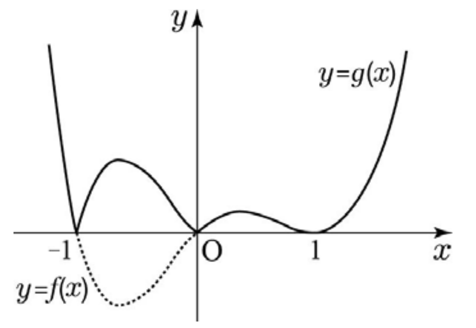
$g(1)=g'(1)$이고 $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$g(1)=g'(1)=0$ … ㉠

㉠에 의하여 $f(1)=f'(1)=0$

$g(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 극솟값을

가지므로



$f(x)=(x-1)^2x(x+1)$

$g(x)=\left|(x-1)^2x(x+1)\right|$

따라서 $g(2)=6$

22. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$\lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{3 \cdot 5^n+2^n}{5^n-2^n}=\lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{3+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}=3$

23. [출제의도] 행렬과 그래프의 관계 이해하기

그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은

(그래프의 변의 개수)×2

따라서 $5 \times 2=10$

(참고) $\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&1&1 \\ 0&0&1&0&1 \\ 0&0&1&1&0 \end{pmatrix}$

24. [출제의도] 미분계수 계산하기

$\lim\limits_{h \to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$

$f'(x)=2x+5$이므로

$\lim\limits_{h \to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=11$

25. [출제의도] 무한급수 이해하기

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{84}{(2n+1)(2n+3)}$

$=\lim\limits_{n \to \infty}\sum\limits_{k=1}^{n}84 \times \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$

$=\lim\limits_{n \to \infty}42\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=14$

26. [출제의도] 독립시행을 활용하여 문제해결하기

$p_1={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

$p_2={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$

따라서 $\dfrac{1}{p_1p_2}=9$

27. [출제의도] 계차수열을 활용하여 추론하기

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{n+1}-a_n=3n+3$이므로

$a_n=3+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(3k+3)=\dfrac{3n(n+1)}{2}$ $(n \ge 2)$

따라서 $a_{10}=165$

28. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제해결하기

직선 $x=2$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 y좌표가 p이므로 $p=k^2\log 2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q의 y좌표가 p이므로

$k^2\log 2=k\log a$를 정리하면 $a=2^k$

직선 $x=2$와 곡선 $y=h(x)$의 만나는 점의 y좌표가 q이므로 $q=4k^2\log 2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 R의 y좌표가 q이므로

$4k^2\log 2=k^2\log b$를 정리하면 $b=2^4$

세 점 $\mathrm{P}(2,\,0)$, $\mathrm{Q}(2^k,\,k^2\log 2)$, $\mathrm{R}(2^4,\,4k^2\log 2)$가 한 직선 위에 있으므로

$\dfrac{k^2\log 2}{2^k-2}=\dfrac{4k^2\log 2}{14}$를 정리하면 $2^k=\dfrac{11}{2}$

$a=\dfrac{11}{2}$, $b=16$

따라서 $ab=88$

29. [출제의도] 정적분의 성질을 활용하여 문제해결하기

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수)

라 하면

조건 (가)에 의하여 $c=0$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서

조건 (나)에 의하여 $a=-6$

$f'(x)=3x^2-12x+b=3(x-2)^2+b-12$

조건 (다)에 의하여 $b \ge 9$이고

$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3(x^3-6x^2+bx)\,dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^3$

$=-\frac{135}{4}+\frac{9b}{2} \ge \frac{27}{4}$ ($\because$ $b \ge 9$)

$b=9$일 때, 최솟값 $m=\dfrac{27}{4}$

따라서 $4m=27$

30. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기

<B형>과 <C형>이 각각 2번 나타나도록 5개의 바둑돌을 나열한 경우는

●○●○● 또는 ○●○●○

(ⅰ) ●○●○●인 경우

1번의 <D형>을 만들기 위해서는 새로운 1개의 ○을 나열되어 있는 ○에 이웃하도록 나열하고, 4번의 <A형>을 만들기 위해서는 새로운 4개의 ●을 나열되어 있는 ●에 이웃하도록 나열하면 되므로

${}_2\mathrm{C}_1 \times {}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_2\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_4=30$

(ⅱ) ○●○●○인 경우

같은 방법으로

${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_{2+4-1}\mathrm{C}_4={}_3\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_4=15$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 경우의 수는 45