2015학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역[가형] •

정 답

1	⑤	2	④	3	②	4	①	5	⑤
6	⑤	7	④	8	③	9	④	10	②
11	②	12	④	13	③	14	④	15	②
16	①	17	③	18	②	19	①	20	⑤
21	③	22	3	23	20	24	7	25	22
26	14	27	169	28	80	29	172	30	25

해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$27^{\frac{1}{3}}\times 9^{\frac{1}{2}}=(3^3)^{\frac{1}{3}}\times(3^2)^{\frac{1}{2}}=3^1\times 3^1=3^2=9$

2. [출제의도] 집합의 원소의 개수 계산하기

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 두 부분집합 $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4\}$에 대하여
집합 $A^c\cup B=\{2, 3, 4, 5\}$이므로 원소의 개수는 4개이다.

3. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(8n-1)(3n+1)}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(8-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n}\right)}{2+\frac{1}{n^2}}=12$$

4. [출제의도] 유리함수의 그래프 이해하기

$y=\frac{1}{x+1}-3$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 $y=\frac{1}{x+1}-3+a$의 그래프이다.
이 그래프가 원점을 지나므로
$0=\frac{1}{0+1}-3+a$이다.
따라서 $a=2$이다.

[다른 풀이]

$y=\frac{1}{x+1}-3$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 원점을 지나므로 원점을 y축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 점 $(0,\ -a)$는 $y=\frac{1}{x+1}-3$의 그래프를 지난다.
그러므로 $-a=\frac{1}{0+1}-3$이다.
따라서 $a=2$이다.

5. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax+3 & (x\le 2)\\ -x+a & (x>2)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}f(x)$이다. 따라서
$2^2+2a+3=-2+a$이다.
$\therefore a=-9$

6. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+x+1}=1$이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차다항식이다. …㉠
$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$가 존재하므로 $f(x)=(x-1)(x+a)$이고, 극한값이 2이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+a)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+a)$$
$$=1+a=2$$

에서 $a=1$이다. …㉡
㉠, ㉡에 의해 $f(x)=(x-1)(x+1)$이다.
$\therefore f(4)=15$

7. [출제의도] 등비수열의 일반항 이해하기

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$a_1\times a_9=(a)(ar^8)=(ar^4)^2=8$이다.
그러므로 $ar^4=2\sqrt{2}$이다.

$$\therefore a_2\times a_5\times a_8=(ar)(ar^4)(ar^7)$$
$$=a^3r^{12}=(ar^4)^3$$
$$=16\sqrt{2}$$

8. [출제의도] 수렴하는 급수의 성질 이해하기

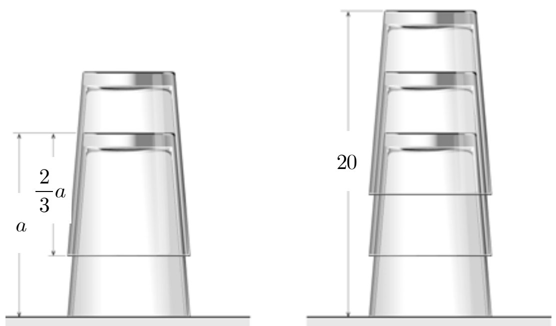
수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5n}{2n-1}\right)$이 수렴하므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5n}{2n-1}\right)=0$이다.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(a_n-\frac{5n}{2n-1}\right)+\left(\frac{5n}{2n-1}\right)\right\}$$
$$=0+\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(4n-1)a_n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-1}{n+1}\right)\times\lim_{n\to\infty}a_n$$
$$=4\times\frac{5}{2}=10$$

9. [출제의도] 역함수 이해하기

$y=f(2x+3)$에서 x, y를 서로 바꾸어 쓰면
$x=f(2y+3)$이다.
그러므로
$2y+3=g(x)$
역함수는 $y=\frac{1}{2}g(x)-\frac{3}{2}$이다.
따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$이다.
$\therefore a+b=-1$

10. [출제의도] 등차수열의 일반항을 이용한 실생활 문제 해결하기



유리컵 n개를 포개어 쌓을 때, 지면으로부터 마지막으로 쌓은 유리컵의 밑면까지의 높이를 a_n이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a이고 공차가 $\frac{1}{3}a$인 등차수열이다.
따라서 $a_n=a+(n-1)\times\frac{1}{3}a=\left(\frac{n+2}{3}\right)a$이다.
그리고 $a_3=20$이므로 $a=12$이다.
따라서 $a_n=4(n+2)$이다.
$\therefore k=a_6=32$

11. [출제의도] 집합과 명제 추론하기

ㄱ. $a=0$이면
$p:0\times(x-1)(x-2)<0$이 되어 이 부등식을 만족하는 실수 x는 존재하지 않으므로
$P=\varnothing$이다. ∴참

ㄴ. $a>0$, $b=0$이면
조건 p의 진리집합은 $P=\{x|1<x<2\}$이고,
조건 q의 진리집합은 $Q=\{x|x>0\}$이므로
$P\subset Q$이다. ∴참

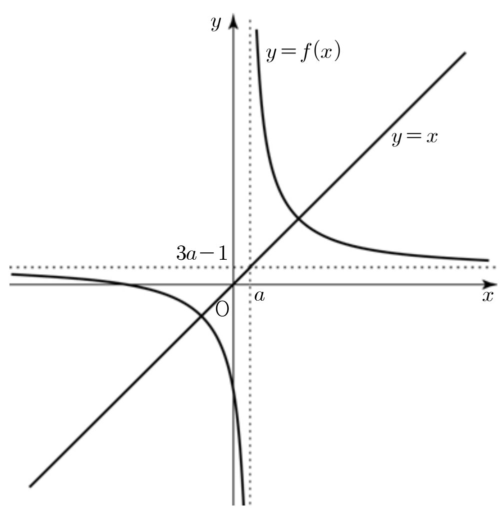
ㄷ. $a<0$, $b=3$이면
조건 p의 진리집합은 $P=\{x|x<1$ 또는 $x>2\}$이므로 조건$\sim p$의 진리집합은
$P^C=\{x|1\le x\le 2\}$이다.
조건 q의 진리집합은 $Q=\{x|x>3\}$이고
$P^C\not\subset Q$이므로 명제 '$\sim p$이면 q이다.'는 거짓이다.
∴거짓

12. [출제의도] 지수법칙을 이용한 실생활 문제 해결하기

두 물체 A, B의 질량을 각각 m_A, m_B라 하고 단면적을 각각 S_A, S_B라 하자.
$m_A:m_B=1:2\sqrt{2}$, $S_A:S_B=1:8$이므로
$m_B=2\sqrt{2}m_A$, $S_B=8S_A$이다.

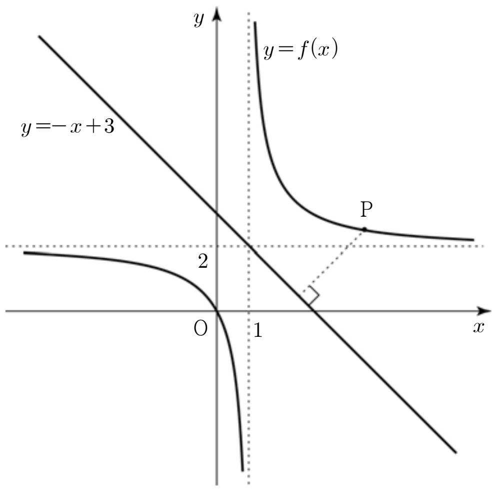
$$\frac{v_A^2}{v_B^2}=\frac{\frac{2m_Ag}{D\rho S_A}}{\frac{4\sqrt{2}m_Ag}{D\rho(8S_A)}}=2\sqrt{2}$$
$$\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2=2^{\frac{3}{2}}$$
$$\left\{\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$\therefore\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^3=2^{\frac{9}{4}}$$

13. [출제의도] 유리함수의 그래프 이해하기



곡선 $y=f(x)$의 두 점근선의 교점은 $(a,\ 3a-1)$이다.
직선 $y=x$가 이 교점을 지나므로
$a=3a-1$이다.
$\therefore a=\frac{1}{2}$

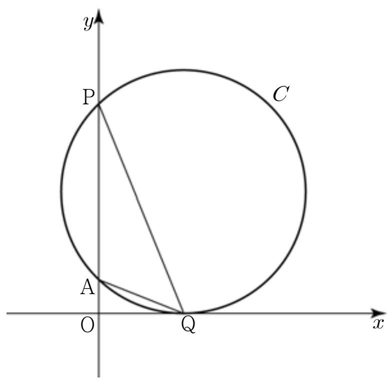
14. [출제의도] 유리함수의 성질을 이용하여 최대, 최소 문제 해결하기



$a=1$이므로 유리함수 $y=\frac{2}{x-1}+2$의 그래프의 점근

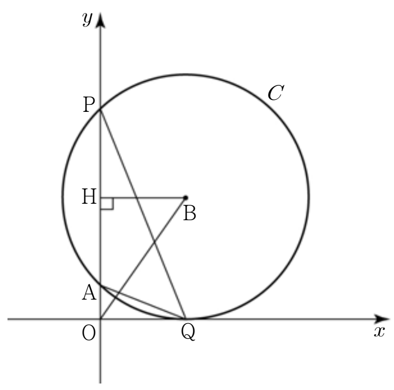
선은 $x=1$, $y=2$이다.
직선 $x+y-3=0$은 두 점근선의 교점 $(1, 2)$를 지나므로 이 유리함수의 그래프는 직선 $x+y-3=0$에 대하여 대칭이다.
따라서 $x>1$인 경우만 생각해도 된다.
유리함수 그래프 위를 움직이는 한 점을
$\mathrm{P}\left(t, \dfrac{2}{t-1}+2\right)$라 하면
점 P와 직선 사이의 거리는
$\dfrac{\left|t+\dfrac{2}{t-1}+2-3\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left|t-1+\dfrac{2}{t-1}\right|}{\sqrt{2}}$ 이다.
$t>1$이므로 $(t-1)+\dfrac{2}{t-1}\geq 2\sqrt{2}$ 이다.
따라서 구하는 거리의 최솟값은 2이다.

15. [출제의도] 함수의 극한을 이용한 도형 문제 해결하기



원의 접선에 대한 성질에 의하여
$\overline{\mathrm{OQ}}^2=\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OP}}$ 이다.
즉, $\overline{\mathrm{OP}}=t^2$이다.
$\therefore r(t)=\dfrac{\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{OP}}}{2}=\dfrac{1}{2}(t^2+1)$
$S(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{OQ}}$
$\quad=\dfrac{1}{2}\times(t^2-1)\times t$
$\therefore \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{S(t)}{t\times r(t)}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}t(t^2-1)}{\frac{1}{2}t(t^2+1)}=1$

[다른 풀이]

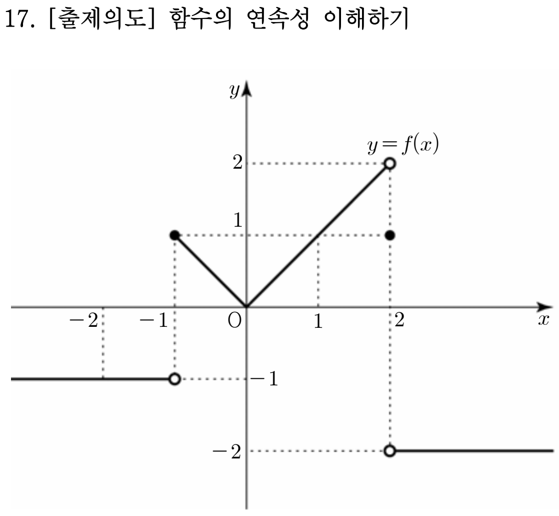


원 C의 중심을 B라 하면, 원 C가 x축과 접하므로 $\mathrm{B}(t, r(t))$이다.
$\overline{\mathrm{AB}}=r(t)=\sqrt{t^2+\{r(t)-1\}^2}$
양변을 제곱하면
$\{r(t)\}^2=t^2+\{r(t)\}^2-2r(t)+1$
이다.
따라서 $r(t)=\dfrac{t^2+1}{2}$ 이다.
원의 중심 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면,
$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{OH}}-\overline{\mathrm{OA}}$
$\quad=\dfrac{t^2+1}{2}-1$
$\quad=\dfrac{t^2-1}{2}$
이다.
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{AH}}=t^2-1$이고
$S(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BH}}$
$\quad=\dfrac{1}{2}\times(t^2-1)\times t$
이다.
$\therefore \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{S(t)}{t\times r(t)}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}t(t^2-1)}{\frac{1}{2}t(t^2+1)}=1$

16. [출제의도] 수학적 귀납법 추론하기

(1) $n=1$일 때, (좌변)$=6\times1\times1^2=6$이고,
(우변)$=5\times1^4+1^2=6$이므로 $(*)$이 성립한다.
(2) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면
$$6\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}k^2\right)=5\sum_{k=1}^{m}k^4+\sum_{k=1}^{m}k^2$$
이다.
$n=m+1$일 때, $(*)$이 성립함을 보이자.
$6\left(\sum_{k=1}^{m+1}k\right)\left(\sum_{k=1}^{m+1}k^2\right)$
$=6\left\{\sum_{k=1}^{m}k+\left(\boxed{(m+1)}\right)\right\}\left\{\sum_{k=1}^{m}k^2+(m+1)^2\right\}$
$=6\left\{\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}k^2\right)+(m+1)\sum_{k=1}^{m}k^2+(m+1)^2\sum_{k=1}^{m}k+(m+1)^3\right\}$
$=6\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}k^2\right)$
$\quad+\left(\boxed{(m+1)}\right)\times\left\{6\sum_{k=1}^{m}k^2+6(m+1)\sum_{k=1}^{m}k+6(m+1)^2\right\}$
$=6\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}k^2\right)$
$\quad+(m+1)\times\{m(m+1)(2m+1)+3m(m+1)^2+6(m+1)^2\}$
$=6\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}k^2\right)$
$\quad+(m+1)^2\times\{m(2m+1)+3m(m+1)+6(m+1)\}$
$=6\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}k^2\right)+(m+1)^2\times\left(\boxed{5m^2+10m+6}\right)$
$=6\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}k^2\right)+(m+1)^2\times\{5(m+1)^2+1\}$
$=6\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}k^2\right)+5(m+1)^4+(m+1)^2$
$=5\sum_{k=1}^{m}k^4+\sum_{k=1}^{m}k^2+5(m+1)^4+(m+1)^2$
$=5\sum_{k=1}^{m}k^4+5(m+1)^4+\sum_{k=1}^{m}k^2+(m+1)^2$
$=5\sum_{k=1}^{m+1}k^4+\sum_{k=1}^{m+1}k^2$
그러므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
따라서 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.
$f(m)=m+1$, $g(m)=5m^2+10m+6$이므로
$\dfrac{g(10)}{f(5)}=\dfrac{606}{6}=101$이다.

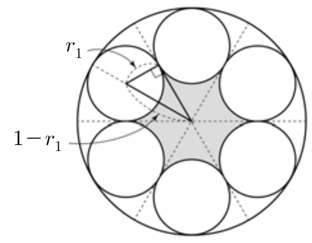
17. [출제의도] 함수의 연속성 이해하기



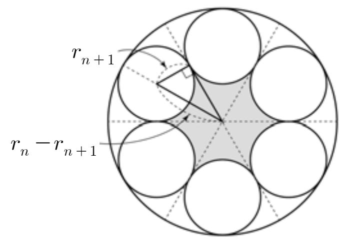
ㄱ. $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=1$ (참)
ㄴ. $t=x-3$으로 두자.
(ⅰ) $x\to2+$ 일 때 $t\to-1+$ 이므로
$\lim\limits_{x\to2+}f(x)f(x-3)$
$=\lim\limits_{x\to2+}f(x)\times\lim\limits_{t\to-1+}f(t)=-2$
이다.
(ⅱ) $x\to2-$ 일 때, $t\to-1-$ 이므로
$\lim\limits_{x\to2-}f(x)f(x-3)=\lim\limits_{x\to2-}f(x)\times\lim\limits_{t\to-1-}f(t)=-2$
이다.
따라서 (ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여
$\lim\limits_{x\to2}f(x)f(x-3)=-2$ 이다. (거짓)
ㄷ. $x\to-1+$ 일 때 $f(x)\to1-$ 이므로
$\lim\limits_{x\to-1+}(f\circ f)(x)=\lim\limits_{t\to1-}f(t)=1$이다.
$x\to-1-$일 때, $f(x)=-1$이므로
$\lim\limits_{x\to-1-}(f\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to-1-}f(-1)=f(-1)=1$이다.
또한 $(f\circ f)(-1)=1$이다.
$\therefore \lim\limits_{x\to-1}(f\circ f)(x)=(f\circ f)(-1)=1$ (참)

18. [출제의도] 등비급수를 이용하여 도형 문제 추론하기

그림 R_n에서 가장 작은 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하고, 그림 R_n을 얻는 과정에서 그린 모든 모양들의 넓이의 합을 a_n이라 하자.

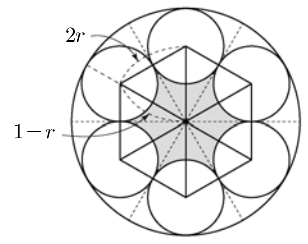


위의 그림에서 $(1-r_1):r_1=2:1$이므로 $r_1=\dfrac{1}{3}$이다. S_1은 직각삼각형의 넓이에서 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{3}$이고 중심각의 크기가 60°인 부채꼴의 넓이를 뺀 값의 12배와 같으므로
$S_1=\left\{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\pi\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{60^\circ}{360^\circ}\right\}\times12=\dfrac{6\sqrt{3}-2\pi}{9}$
이다.



$(r_n-r_{n+1}):r_{n+1}=2:1$이므로 $r_{n+1}=\dfrac{1}{3}r_n$이다.
$a_{n+1}:a_n=6(r_{n+1})^2:(r_n)^2$이므로
$a_{n+1}=6\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2a_n=\dfrac{2}{3}a_n$, $a_1=S_1$이다.
$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$
$\quad=\dfrac{a_1}{1-\frac{2}{3}}=\dfrac{S_1}{1-\frac{2}{3}}$
$\quad=2\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\pi$
따라서 $a=2$, $b=-\dfrac{2}{3}$이므로 $a+b=\dfrac{4}{3}$이다.

[다른 풀이]



반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 작은 원의 반지름의 길이를 r라 하면 $1-r=2r$이므로 $r=\frac{1}{3}$이다.

S_1은 한 변의 길이가 $\frac{2}{3}$인 정삼각형 6개의 넓이의 합에서 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}$이고 중심각의 크기가 $120°$인 부채꼴 6개의 넓이의 합을 뺀 것과 같으므로

$$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times 6-\pi\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{120°}{360°}\times 6=\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{9}$$

이다.

$$S_2=S_1+\left(\frac{S_1}{9}\right)\times 6=S_1+\frac{2}{3}S_1$$

$$S_3=S_1+\left(\frac{S_1}{9}\right)\times 6+\left(\frac{S_1}{9}\right)^2\times 6^2=S_1+\frac{2}{3}S_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2S_1$$

$$\vdots$$

$$S_n=S_1+\left(\frac{S_1}{9}\right)\times 6+\left(\frac{S_1}{9}\right)^2\times 6^2+\cdots+\left(\frac{S_1}{9}\right)^{n-1}\times 6^{n-1}$$

$$=S_1+\frac{2}{3}S_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2S_1+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}S_1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{3}=2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$$

따라서 $a=2$, $b=-\frac{2}{3}$이므로 $a+b=\frac{4}{3}$이다.

19. [출제의도] 등비급수의 성질 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=x$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=y$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\frac{9}{4}$이므로 $x+y=\frac{9}{4}$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\frac{3}{4}$이므로 $x-y=\frac{3}{4}$이다.

따라서 $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{3}{4}$이다.

첫째항이 1인 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 p, q라 하면

$\frac{1}{1-p}=\frac{3}{2}$, $\frac{1}{1-q}=\frac{3}{4}$이다.

따라서 $p=\frac{1}{3}$, $q=-\frac{1}{3}$이다.

그러므로 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $b_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}=\frac{2}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{4}$$

[다른 풀이]

첫째항이 1인 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 p, q라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{1-p}+\frac{1}{1-q}=\frac{9}{4}\cdots㉠$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{1-p}-\frac{1}{1-q}=\frac{3}{4}\cdots㉡$$

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $p=\frac{1}{3}$, $q=-\frac{1}{3}$이다.

첫째항이 1인 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비가 각각 p, q이므로 두 등비수열 $\{a_n^2\}$, $\{b_n^2\}$의 공비는 각각 p^2, q^2이다.

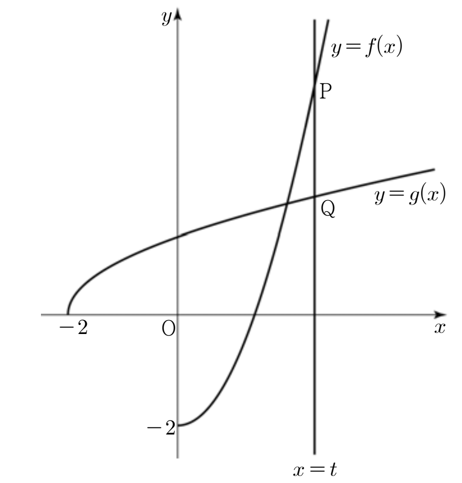
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2=\frac{1}{1-p^2}+\frac{1}{1-q^2}=\frac{1}{1-\frac{1}{9}}+\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{9-1}+\frac{9}{9-1}=\frac{9}{4}$$

20. [출제의도] 함수의 극한을 이용한 도형 문제 해결하기

$x=t$와 $y=f(x)$가 만나는 점 P의 좌표는 $(t,\ t^2-2)$이고

$x=t$와 $y=g(x)$가 만나는 점 Q의 좌표는 $(t,\ \sqrt{t+2})$이므로

선분 PQ의 길이는 $h(t)=t^2-2-\sqrt{t+2}$이다.



$$\lim_{t\to 2+}\frac{h(t)}{t-2}=\lim_{t\to 2+}\frac{t^2-2-\sqrt{t+2}}{t-2}$$

$$=\lim_{t\to 2+}\frac{(t^2-4)+(2-\sqrt{t+2})}{t-2}$$

$$=\lim_{t\to 2+}\left\{(t+2)+\frac{2-\sqrt{t+2}}{t-2}\right\}$$

$$=\lim_{t\to 2+}\left\{(t+2)+\frac{2-t}{(t-2)(2+\sqrt{t+2})}\right\}=\frac{15}{4}$$

[다른 풀이]

$$\lim_{t\to 2+}\frac{h(t)}{t-2}=\lim_{t\to 2+}\frac{t^2-2-\sqrt{t+2}}{t-2}$$

$$=\lim_{t\to 2+}\frac{(t^2-2-\sqrt{t+2})(t^2-2+\sqrt{t+2})}{(t-2)(t^2-2+\sqrt{t+2})}$$

$$=\lim_{t\to 2+}\frac{(t-2)(t^3+2t^2-1)}{(t-2)(t^2-2+\sqrt{t+2})}$$

$$=\lim_{t\to 2+}\frac{t^3+2t^2-1}{t^2-2+\sqrt{t+2}}=\frac{15}{4}$$

21. [출제의도] 등비수열의 극한을 이용하여 방정식 문제 해결하기

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}$에서

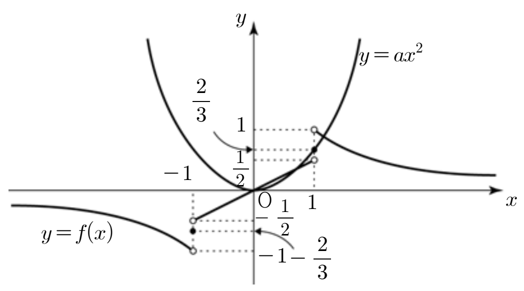
ⅰ) $|x|>1$일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{x}{x^{2n}}}{1+\frac{2}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$

ⅱ) $x=1$일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$

ⅲ) $x=-1$일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{-1-1}{1+2}=-\frac{2}{3}$

ⅳ) $|x|<1$일 때, $f(x)=\frac{0+x}{0+2}=\frac{x}{2}$

주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지기 위해서는 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $y=ax^2(a>0)$의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로 그림과 같이 $y=ax^2(a>0)$의 그래프는 점 $\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$을 지나야 한다.



따라서 $a=\frac{2}{3}$이다.

$\therefore 60a=40$

[참고]

닫힌구간 $[0,1]$에서

$y=ax^2$과 $y=\frac{x}{2}$을 연립하여

풀면 $x=0,\ \frac{1}{2a}$이다.

$0<\frac{1}{2a}<1$이면

$y=ax^2$과 $y=\frac{1}{2}x$의 그래프는 구간 $[0,1)$에서 서로 다른 두 점에서 만나므로 구간 $[1,\infty)$에서 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나면 된다.

22. [출제의도] 합성함수를 이용한 함숫값 계산하기

$(g\circ f)(\sqrt{7})=g(7+3)=\sqrt{10-1}=3$

23. [출제의도] 로그값 계산하기

$(\log_2 81)\times(\log_3 32)=(4\log_2 3)\times(5\log_3 2)=20$

24. [출제의도] 연속함수의 성질 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 모든 실수 x에 대하여 분모가 0이 아니어야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+2a\neq 0$이다.

$D=a^2-8a<0$이므로 $0<a<8$이다.

따라서 정수 a의 개수는 7이다.

[참고]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\frac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq 0$)도 $x=a$에서 연속이다.

즉, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속함수일 때, 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)\neq 0$인 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

25. [출제의도] 일반항과 부분합과의 관계 이해하기

$\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이라 하면, $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$이므로

$$na_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n-1}ka_k=\frac{n^2(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)^2}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}\ (n\geq 2)$$

이다.

$a_n=\frac{3n-1}{2}(n\geq 2)$

그런데 $a_1=\sum_{k=1}^{1}ka_k=\frac{1^2(1+1)}{2}=1$이다.

따라서 $a_n=\frac{3n-1}{2}\ (n\geq 1)$이다.

$\therefore a_{15}=22$

[다른 풀이]

$$15a_{15}=\sum_{k=1}^{15}ka_k-\sum_{k=1}^{14}ka_k$$

$$15a_{15}=\frac{15^2\times 16-14^2\times 15}{2}=\frac{15(15\times 16-14\times 14)}{2}=15\times 22$$

$\therefore a_{15}=22$

26. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$3^{-2a}\times\sqrt{7}=2^{a-\frac{1}{2}}$ 에서 $\dfrac{\sqrt{7}}{9^a}=\dfrac{2^a}{\sqrt{2}}$ 이다.

따라서 $18^a=\sqrt{14}$ 이다.

$\therefore 324^a=(18^2)^a=(18^a)^2=(\sqrt{14})^2=14$

[다른 풀이]

$3^{-2a}\times\sqrt{7}=2^{a-\frac{1}{2}}$ 의 양변을 제곱하면,

$(3^{-2a}\times\sqrt{7})^2=\left(2^{a-\frac{1}{2}}\right)^2$

$3^{-4a}\times7=2^{2a-1}$

$3^{-4a}\times7=4^a\times\dfrac{1}{2}$

이다.

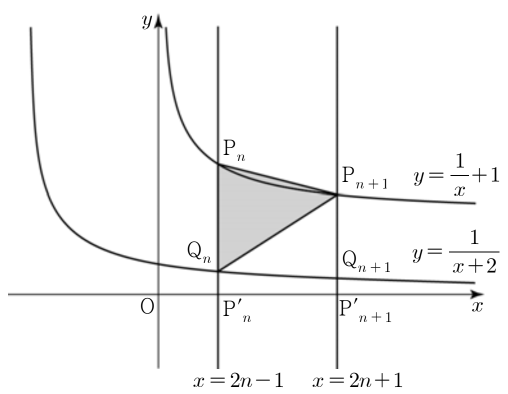
양변에 2×3^{4a} 를 곱하면

$$\begin{aligned}14&=4^a\times3^{4a}\\&=(4\times81)^a\\&=324^a\end{aligned}$$

이다.

$\therefore (324)^a=14$

27. [출제의도] 여러 가지 수열의 성질을 이용하여 도형 문제 해결하기



$x=2n-1$ 과 $x=2n+1$ 이 x축과 만나는 점을 각각 P'_n, P'_{n+1}라 하자.

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}\times\overline{\mathrm{P}'_n\mathrm{P}'_{n+1}}\\&=\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+1\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{8}S_n=\sum_{n=1}^{8}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+8$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{17}\right)+8$$

$$=1-\frac{1}{17}+8=\frac{152}{17}$$

$\therefore p+q=17+152=169$

28. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 미지수 구하는 문제 해결하기

조건 (나)에서 $n^2=16^2m$, $m=\left(\dfrac{n}{16}\right)^2$ 이고

m은 자연수이므로 n은 16의 배수이어야 한다.

그리고 10보다 크고 100보다 작은 16의 배수는 $16, 32, 48, 64, 80, 96$ 이므로 n은 이들 값 중에서 선택할 수 있다.

조건 (가)로부터

$\log_m n=\dfrac{q}{p}$ (단, p, q는 서로소인 자연수)

라 둘 수 있고, 로그의 정의로부터 $n=m^{\frac{q}{p}}$ 로 나타낼 수 있다. 식을 변형하면 $n^p=m^q$ 이고 m, n은 자연수이므로 $m=c^p$, $n=c^q$ (단, c는 자연수)로 둘 수 있다.

n은 $16, 32, 48, 64, 80, 96$ 값들 중 c^q 꼴로 표현할 수 있는 값이므로 $16, 32, 64$ 세 수뿐이다.

그러므로 $n=16, 32, 64$ 이고 각각에 대하여

$m=\left(\dfrac{n}{16}\right)^2$ 에서 m을 구하면 $m=1, 4, 16$ 이다.

조건에서 m, n이 10보다 크고 100보다 작은 자연수이므로 $n=64$, $m=16$ 이다.

따라서 $m+n=80$ 이다.

29. [출제의도] 함수의 성질을 이용하여 함숫값 추측하기

조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned}f(2015)&=f\left(3\times\frac{2015}{3}\right)\\&=3f\left(\frac{2015}{3}\right)\\&=3^2f\left(\frac{2015}{3^2}\right)\\&\ \ \vdots\\&=3^6f\left(\frac{2015}{3^6}\right)\end{aligned}$$

이다.

$\dfrac{2015}{3^6}$ 의 범위는 $2<\dfrac{2015}{3^6}<3$ 이므로 조건 (가)에 의하여 $f\left(\dfrac{2015}{3^6}\right)=3-\dfrac{2015}{3^6}$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore 3^6f\left(\frac{2015}{3^6}\right)&=3^6\left(3-\frac{2015}{3^6}\right)\\&=3^7-2015=172\end{aligned}$$

30. [출제의도] 규칙성을 이용하여 수열의 극한 문제 해결하기

$a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n-1}}M(2k)=M(2)+M(4)+M(6)+\cdots+M(2^n)$

이므로 a_n은 집합 B의 원소 중에서 집합 A의 원소인 $2,4,6,8,\cdots,2^n$ 에서 각각 가장 큰 약수를 찾아 합한 것과 같다.

그리고 $2,4,6,8,\cdots,2^n$ 의 개수는 2^{n-1} 개이다.

$n=1$ 이면 $a_1=M(2)=2$ 이다.

$n\geq2$ 일 때,

(i) $M(2k)=2$ 인 k의 개수는 $2,4,6,8,\cdots,2^n$ 을 $2\times$(홀수)로 나타낼 수 있는 수의 개수와 같으므로 2의 배수 중 4의 배수가 아닌 것의 개수와 같다.

따라서 k의 개수는

$\dfrac{2^n}{2}-\dfrac{2^n}{2^2}=\dfrac{2^{n-1}}{2}=2^{n-2}\ (n\geq2)$

개이다.

(ii) $M(2k)=4$ 인 k의 개수는 $2,4,6,8,\cdots,2^n$ 을 $4\times$(홀수)로 나타낼 수 있는 수의 개수와 같으므로 4의 배수 중 8의 배수가 아닌 것의 개수와 같다.

따라서 k의 개수는

$\dfrac{2^n}{2^2}-\dfrac{2^n}{2^3}=\dfrac{2^{n-1}}{2^2}=2^{n-3}\ (n\geq3)$

개이다.

(iii) $M(2k)=8$ 인 k의 개수는 $2,4,6,8,\cdots,2^n$ 을 $8\times$(홀수)로 나타낼 수 있는 수의 개수와 같으므로 8의 배수 중 16의 배수가 아닌 것의 개수와 같다.

따라서 k의 개수는

$\dfrac{2^n}{2^3}-\dfrac{2^n}{2^4}=\dfrac{2^{n-1}}{2^3}=2^{n-4}\ (n\geq4)$

개이다.

이와 같은 방법으로 계속하면 $n\geq2$ 인 n에 대하여 $M(2k)=2^i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$ 인 k의 개수는 $2,4,6,8,\cdots,2^n$ 중에서 $2^i\times$(홀수)로 나타낼 수 있는 수의 개수와 같으므로 2^i 의 배수 중 2^{i+1} 의 배수가 아닌 것의 개수와 같다.

따라서 k의 개수는

$\dfrac{2^n}{2^i}-\dfrac{2^n}{2^{i+1}}=\dfrac{2^{n-1}}{2^i}=2^{n-i-1}\ (n\geq i+1)$

개이다.

또한, $M(2k)=2^n$ 을 만족하는 k는 2^{n-1} 뿐이므로 k의 개수는 1개이다.

따라서 $n\geq2$일 때

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{2^{n-1}}M(2k)=M(2)+M(4)+M(6)+\cdots+M(2^n)\\&=(2\times2^{n-2}+2^2\times2^{n-3}+\ \cdots\ +2^{n-1}\times2^0)+2^n\times1\\&=\sum_{i=1}^{n-1}(2^i\cdot2^{n-i-1})+2^n\cdot1\\&=\sum_{i=1}^{n-1}2^{n-1}+2^n\cdot1\\&=2^{n-1}(n-1)+2^n\\&=2^{n-1}(n+1)\end{aligned}$$

이다.

그러므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{150a_n}{(3n+1)\times2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{150(n+1)2^{n-1}}{(3n+1)\times2^n}=25$ 이다.