제 2 교시 수학 영역 (가형)

5지 선다형(1 ~ 21)

1. $27^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

2. 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 두 부분집합 $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3, 4\}$에 대하여 집합 $A^C \cup B$의 원소의 개수는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{(8n-1)(3n+1)}{2n^2+1}$ 의 값은? [2점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

4. 유리함수 $y=\frac{1}{x+1}-3$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프가 원점을 지날 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

5. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+3 & (x\le 2) \\ -x+a & (x>2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -13 ② -12 ③ -11 ④ -10 ⑤ -9

6. x에 대한 다항식 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+x+1}=1,\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$$

를 만족시킬 때, $f(4)$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

7. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1\times a_9=8$ 일 때, $a_2\times a_5\times a_8$의 값은? [3점]

① $10\sqrt{2}$ ② $12\sqrt{2}$ ③ $14\sqrt{2}$ ④ $16\sqrt{2}$ ⑤ $18\sqrt{2}$

8. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5n}{2n-1}\right)$이 수렴할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-1)a_n}{n+1}$ 의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

9. 일차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수

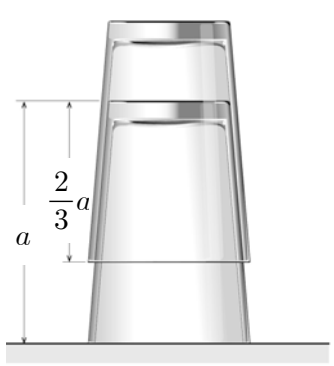
$$y=f(2x+3)$$

의 역함수를 $g(x)$에 대한 식으로 나타내면 $y=ag(x)+b$이다.

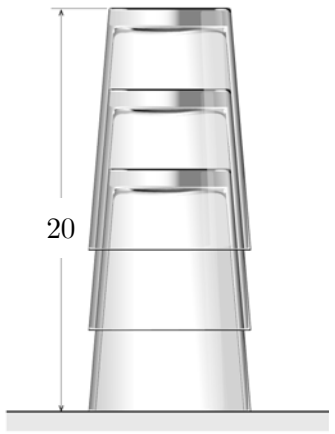
두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

10. 어느 공장에서 생산하는 직원뿔대 모양의 유리컵의 높이는 a(cm)이고 크기와 모양은 모두 일정하다. [그림 1]과 같이 유리컵 두 개를 밑면이 지면과 평행하도록 지면 위에 포개어 쌓으면 유리컵 한 개의 높이의 $\frac{2}{3}$만큼 항상 겹치게 된다. [그림 2]와 같이 유리컵 3개를 이와 같은 방법으로 쌓을 때, 지면으로부터 마지막으로 쌓은 유리컵의 밑면까지의 높이가 20(cm)이다. 유리컵 6개를 이와 같은 방법으로 쌓을 때, 지면으로부터 마지막으로 쌓은 유리컵의 밑면까지의 높이는 k(cm)이다. k의 값은? (단, 유리컵을 쌓은 지면은 평평하다.) [3점]



[그림 1]



[그림 2]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

11. 전체집합 U가 실수 전체의 집합일 때, 실수 x에 대한 두 조건 p, q가

$$p: a(x-1)(x-2)<0, \quad q: x>b$$

이다. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
(단, a, b는 실수이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. $a=0$일 때, $P=\varnothing$이다.
ㄴ. $a>0$, $b=0$일 때, $P\subset Q$이다.
ㄷ. $a<0$, $b=3$일 때, 명제 '$\sim p$이면 q이다.'는 참이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 밀도가 균일한 공기 중에서 자유 낙하하는 물체에 작용하는 중력과 공기 저항력이 평형을 이루게 될 때의 물체의 속력을 종단속력이라 한다. 질량이 m이고 단면적이 S인 구형 물체의 종단속력 v(m/초)는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

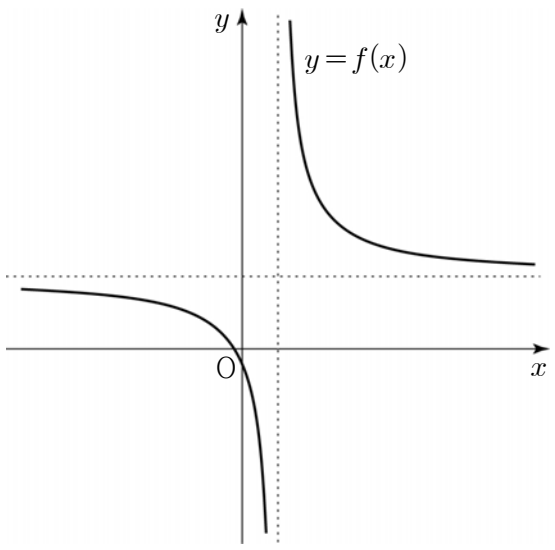
$$v^2=\frac{2mg}{D\rho S}$$

(단, D는 끌림 계수, ρ는 공기 밀도, g는 중력가속도이며, 질량 단위는 kg, 단면적 단위는 m^2이다.)

밀도가 균일한 공기 중에서 자유 낙하하는 구형의 두 물체 A와 B에 작용하는 끌림 계수(D), 공기 밀도(ρ), 중력가속도(g)가 서로 같다. 두 물체 A와 B의 질량의 비는 $1:2\sqrt{2}$이고 단면적의 비는 $1:8$일 때, 두 물체 A, B의 종단속력을 각각 v_A, v_B라 하자. $\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^3$의 값은? [3점]

① $2^{\frac{9}{8}}$ ② $2^{\frac{3}{2}}$ ③ $2^{\frac{15}{8}}$ ④ $2^{\frac{9}{4}}$ ⑤ $2^{\frac{21}{8}}$

[13 ~ 14] a는 상수이고, 유리함수 $f(x)=\dfrac{2}{x-a}+3a-1$에 대하여 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



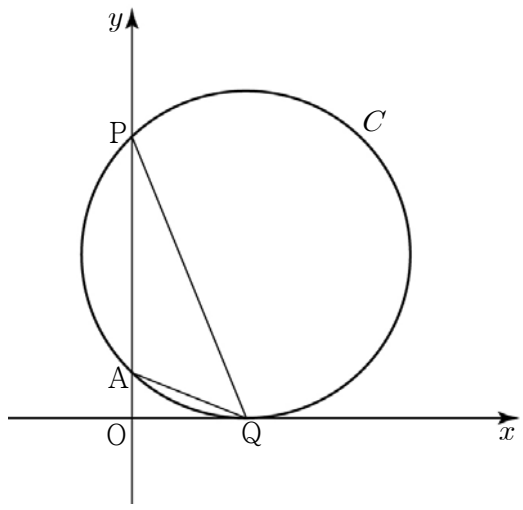
13. 직선 $y=x$가 곡선 $y=f(x)$의 두 점근선의 교점을 지날 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

14. $a=1$일 때, 유리함수 $y=f(x)$의 그래프 위를 움직이는 점 P와 직선 $y=-x+3$ 사이의 거리의 최솟값은? [4점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

15. 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(0,1)$을 지나고 x축에 접하는 원 C가 있다. 원 C가 y축과 만나는 또 다른 점을 P라 하고, x축과 접하는 점을 $\mathrm{Q}(t,0)$이라 하자. 삼각형 APQ의 넓이를 $S(t)$, 원 C의 반지름의 길이를 $r(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\dfrac{S(t)}{t\times r(t)}$의 값은? (단, $t>1$이다.) [4점]



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

16. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$6\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)=5\sum_{k=1}^{n}k^4+\sum_{k=1}^{n}k^2 \quad \cdots\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정의 일부이다.

<증명>

(1) $n=1$일 때, (좌변)$=6\times1\times1^2=6$이고,
(우변)$=5\times1^4+1^2=6$이므로 $(*)$이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$6\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}k^2\right)=5\sum_{k=1}^{m}k^4+\sum_{k=1}^{m}k^2$$

이다.

$n=m+1$일 때, $(*)$이 성립함을 보이자.

$$6\left(\sum_{k=1}^{m+1}k\right)\left(\sum_{k=1}^{m+1}k^2\right)$$

$$=6\left\{\sum_{k=1}^{m}k+(\boxed{\text{(가)}})\right\}\left\{\sum_{k=1}^{m}k^2+(m+1)^2\right\}$$

$$=6\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}k^2\right)$$

$$+(\boxed{\text{(가)}})\times\left\{6\sum_{k=1}^{m}k^2+6(m+1)\sum_{k=1}^{m}k+6(m+1)^2\right\}$$

$$=6\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}k^2\right)+(m+1)^2\times(\boxed{\text{(나)}})$$

$$\vdots$$

$$=5\sum_{k=1}^{m+1}k^4+\sum_{k=1}^{m+1}k^2$$

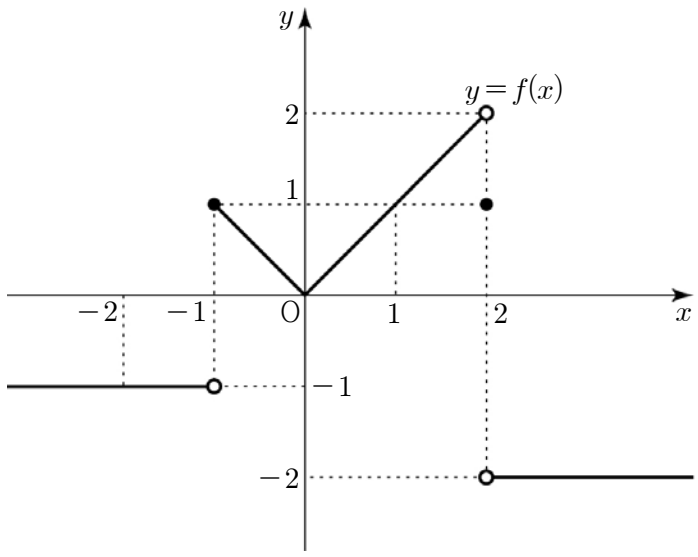
그러므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\dfrac{g(10)}{f(5)}$의 값은? [4점]

① 101 ② 103 ③ 105 ④ 107 ⑤ 109

17. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to -1+} f(x)=1$

ㄴ. $\lim_{x\to 2} f(x)f(x-3)=2$

ㄷ. 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

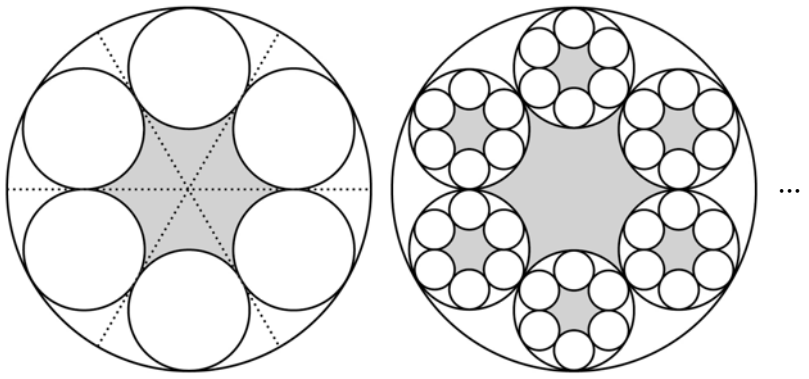
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원을 부채꼴로 6등분하여 각각의 부채꼴에 내접하는 원을 하나씩 그려 넣는다. 이 6개의 원에 의해 만들어지는 ✡ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 합동인 6개의 원 안에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 6개의 ✡ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n=a\sqrt{3}+b\pi$이다.

$a+b$의 값은? (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



R_1 R_2 ...

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

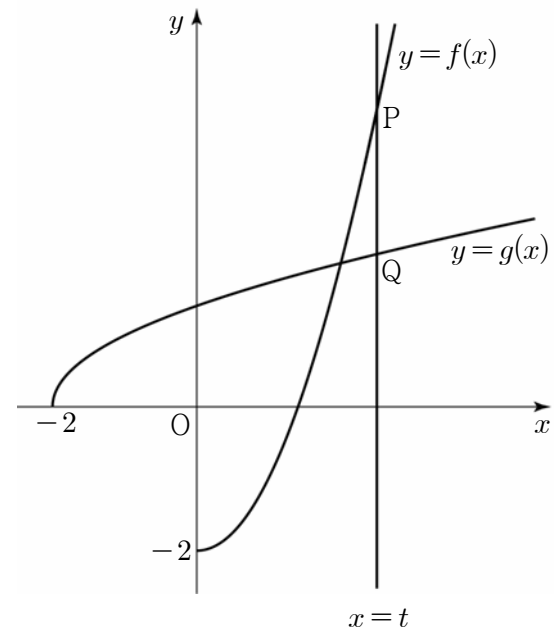
19. 첫째항이 1인 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$의 값은? [4점]

(가) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 각각 수렴한다.

(나) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\frac{9}{4}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\frac{3}{4}$이다.

① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{11}{4}$ ③ $\frac{13}{4}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ $\frac{17}{4}$

20. 함수 $f(x)=x^2-2\,(x\geq 0)$의 역함수를 $g(x)$라 하고, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 직선 $x=t\,(t>2)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 선분 PQ의 길이를 $h(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 2+}\frac{h(t)}{t-2}$의 값은? [4점]



① $\frac{7}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{11}{4}$ ④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

21. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}$$

이다. x에 대한 방정식 $f(x)-ax^2=0$이 서로 다른 네 실근을 가지도록 하는 양수 a에 대하여 $60a$의 값은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

단답형(22 ~ 30)

22. 두 함수 $f(x)=x^2+3$, $g(x)=\sqrt{x-1}$에 대하여 $(g\circ f)(\sqrt{7})$의 값을 구하시오. [3점]

23. $(\log_2 81)\times(\log_3 32)$의 값을 구하시오. [3점]

24. 함수

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+ax+2a}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오. [3점]

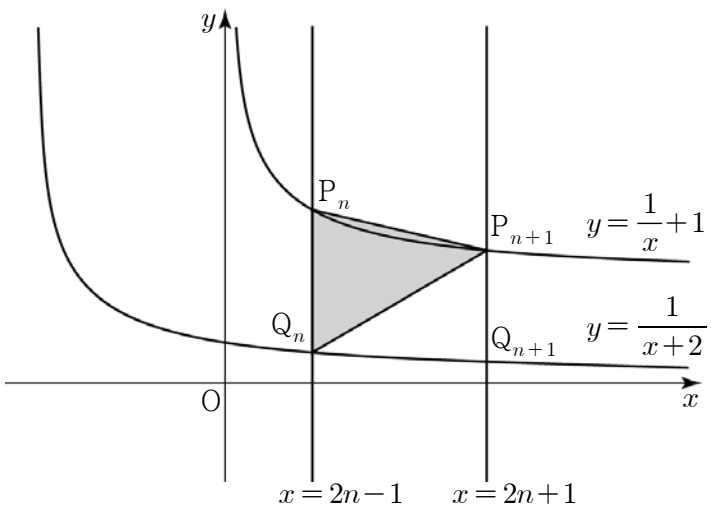
25. 수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = \frac{n^2(n+1)}{2} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, a_{15}의 값을 구하시오. [3점]

26. 상수 a에 대하여 $3^{-2a}\times\sqrt{7}=2^{a-\frac{1}{2}}$일 때, 324^a의 값을 구하시오. [4점]

27. 자연수 n에 대하여 그림과 같이 직선 $x=2n-1$과 두 곡선 $y=\frac{1}{x}+1$, $y=\frac{1}{x+2}$의 교점을 각각 P_n, Q_n이라 하고, 직선 $x=2n+1$과 두 곡선 $y=\frac{1}{x}+1$, $y=\frac{1}{x+2}$의 교점을 각각 P_{n+1}, Q_{n+1}이라 하자. 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{8} S_n=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



28. 10보다 크고 100보다 작은 두 자연수 m, n이 다음 조건을 만족시킬 때, $m+n$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\log_m n$은 유리수이다.
(나) 세 수 m, n, 256은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

29. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2015)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $f(x)=1-|x-2|\ \ (1\le x\le 3)$
(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(3x)=3f(x)$이다.

30. 두 집합 $A=\{2l\mid l\text{은 자연수}\}$, $B=\{2^m\mid m\text{은 자연수}\}$가 있다. 집합 A의 원소 a에 대하여 집합 B의 원소 중 a의 약수의 최댓값을 $M(a)$라 하자.

예를 들어, $M(2)=2$, $M(12)=4$이다.

수열 $\{a_n\}$을

$$a_n=\sum_{k=1}^{2^{n-1}}M(2k)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{150a_n}{(3n+1)\times 2^n}$의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.