

2015학년도 6월 고1 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정답

1	④	2	⑤	3	②	4	①	5	④
6	⑤	7	⑤	8	②	9	③	10	②
11	①	12	②	13	①	14	③	15	④
16	③	17	③	18	④	19	①	20	⑤
21	③	22	6	23	11	24	100	25	28
26	38	27	16	28	30	29	26	30	240

해설

1. [출제의도] 다항식 계산하기

$$\begin{aligned} A+B &= (2x^2+3xy)+(x^2-2xy) \\ &= (2x^2+x^2)+(3xy-2xy) \\ &= 3x^2+xy \end{aligned}$$

2. [출제의도] 복소수 계산하기

$$(2-i)+(3+2i) = (2+3)+(-1+2)i = 5+i$$

3. [출제의도] 나머지 정리 이해하기

$f(x) = x^2 - 2x + 5$ 라고 하면 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 $f(1)$ 이다.
따라서 $f(1) = 1 - 2 + 5 = 4$ 이다.

[다른 풀이]

다항식 $x^2 - 2x + 5$ 를 $x-1$ 로 나누면

$$\begin{array}{r} x-1 \overline{) x^2-2x+5} \\ \underline{x^2-x} \\ -x+5 \\ \underline{-x+1} \\ 4 \end{array}$$

이므로 나머지는 4이다.

4. [출제의도] 이차부등식 이해하기

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 12 &= (x-3)(x-4) \leq 0 \\ \text{이므로 해는} \\ 3 &\leq x \leq 4 \end{aligned}$$

이다. 그러므로 $a=3, b=4$ 이다.
따라서 $b-a=1$ 이다.

5. [출제의도] 다항식의 나눗셈 계산하기

$$\begin{array}{r} 3x+1 \overline{) 3x^3-2x^2+3x+7} \\ \underline{3x^3-3x^2+6x} \\ x^2-3x+7 \\ \underline{x^2-x+2} \\ -2x+5 \end{array}$$

이므로 $a=3, b=5$ 이다. 따라서 $a+b=8$ 이다.

6. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기

주어진 항등식을 정리하면

$$6x-5 = (a+b)x - a$$

이므로

$$a=5$$

이고 $6=a+b$ 에서

$$b=1$$

이다. 따라서 $ab=5$ 이다.

[다른 풀이]

주어진 식

$$6x-5 = a(x-1) + bx$$

에 $x=0$ 을 대입하면 $-5 = -a$ 이므로 $a=5$,
 $x=1$ 을 대입하면 $b=1$ 이다.

따라서 $ab=5$ 이다.

7. [출제의도] 이차함수와 이차부등식의 관계 이해하기

이차함수 $y = x^2 + 6x + a$ 의 그래프는 아래로 볼록이므로 모든 실수 x 에 대하여 $y \geq 0$ 가 되려면 이차함수의 그래프가 x 축에 접하거나 만나지 않아야 한다.
즉, $x^2 + 6x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D \leq 0$$

이다. $\frac{D}{4} = 9 - a \leq 0$ 이므로

$$a \geq 9$$

이다. 따라서 실수 a 의 최솟값은 9이다.

8. [출제의도] 이차방정식의 성질을 이용하여 이차함수 문제 해결하기

이차함수 $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + k$ 가 적어도 한 점에서 만나기 위해서는 방정식

$$-x^2 + 4x = 2x + k$$

가 실근을 가져야 한다.
 $x^2 - 2x + k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - k \geq 0$$

이므로

$$k \leq 1$$

이다. 따라서 k 의 최댓값은 1이다.

9. [출제의도] 삼차방정식을 이용하여 근과 계수와의 관계 문제 해결하기

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ & & 1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

조립제법에 의해

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = (x-1)(x^2 - x + 2)$$

이다. 따라서 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0$ 의 두 허근은 이차방정식

$$x^2 - x + 2 = 0$$

의 두 허근과 같다. 두 허근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 2$$

이다. 따라서 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{2}$ 이다.

10. [출제의도] 연립이차방정식을 이용하여 실생활 문제 해결하기

영화 A를 본 학생의 수를 a , 영화 B를 본 학생의 수를 b , 영화 C를 본 학생의 수를 c 라 하자.

$$\begin{cases} a+b+c=10 & \text{..... ㉠} \\ a=c+3 & \text{..... ㉡} \\ b=c+1 & \text{..... ㉢} \end{cases}$$

이므로 ㉡과 ㉢을 ㉠에 대입하면

$$(c+3) + (c+1) + c = 10$$

$$c = 2$$

이다.

따라서 영화 C를 관람한 학생의 수는 2이다.

11. [출제의도] 다항식의 인수분해 추론하기

다항식 $x^4 + 4x^2 + 16$ 을 인수분해하면

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^2 + 16 &= (x^4 + 8x^2 + 16) - 4x^2 \\ &= (x^2 + 4)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4) \\ &= (x^2 + ax + b)(x^2 - cx + d) \end{aligned}$$

이다.

a, b, c, d 가 양의 실수이므로

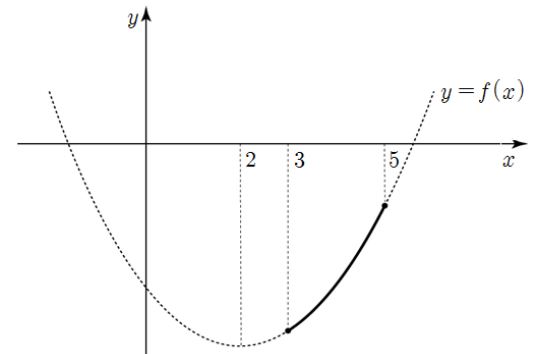
$$a=2, b=4, c=2, d=4 \text{ 이다.}$$

따라서 $a+b+c+d=12$ 이다.

12. [출제의도] 이차함수의 성질을 이용하여 이차부등식 문제 해결하기

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x - 4k + 3 \quad (3 \leq x \leq 5) \text{ 라 하면} \\ f(x) &= (x-2)^2 - 4k - 1 \quad (3 \leq x \leq 5) \end{aligned}$$

이다.



그림과 같이 $f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록이고 대칭축이 $x=2$ 인 그래프의 일부분이므로 $3 \leq x \leq 5$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이 항상 성립하려면

$$f(5) \leq 0 \quad (\because f(3) < f(5))$$

이어야 한다.

$$\begin{aligned} f(5) &= 25 - 20 - 4k + 3 \\ &= 8 - 4k \leq 0 \end{aligned}$$

이므로

$$k \geq 2$$

이다. 따라서 k 의 최솟값은 2이다.

13. [출제의도] 다항식의 성질 이해하기

삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{5}{2}$ 이므로 $\frac{1}{2}ab = \frac{5}{2}$ 이고

$$ab = 5$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a+b)^2 - 2ab \\ &= 5^2 - 2 \times 5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

이다.

14. [출제의도] 이차함수와 직선의 위치 관계를 이용하여 이차방정식 문제 해결하기

$b=2$ 이고 꼭짓점이 $(0, -2)$ 이므로 $f(x) = kx^2 - 2$ 라 하자.
 $f(a) = 2$ 이므로 $k = \frac{4}{a^2}$ 에서

$$f(x) = \frac{4}{a^2}x^2 - 2$$

이다. 또한, $g(a) = 2$ 이므로

$$g(x) = \frac{2}{a}x$$

이다. 또한 $f(x) = g(x)$ 에서

$$\frac{4}{a^2}x^2 - 2 = \frac{2}{a}x$$

이고 양변에 $\frac{a^2}{2}$ 을 곱하여 정리하면

$$\begin{aligned} 2x^2 - ax - a^2 &= 0 \\ (2x+a)(x-a) &= 0 \end{aligned}$$

이다. 따라서 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 두 근은

$$a, -\frac{a}{2}$$

이고 두 근의 차는 $\frac{3}{2}a = 6$ 이므로 $a=4$ 이다.

그러므로 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 곱은 -8 이다.

15. [출제의도] 연립부등식 이해하기

$$0 \leq -x^2 + 5x < -x + 9 \text{ 에서}$$

i) $x^2 - 5x \leq 0$ 인 경우

$$x(x-5) \leq 0$$

$$0 \leq x \leq 5 \quad \text{..... ㉠}$$

ii) $-x^2 + 5x < -x + 9$ 인 경우

$$x^2 - 6x + 9 > 0$$

$$(x-3)^2 > 0$$

$$x \neq 3 \text{인 모든 실수} \dots \text{㉔}$$

㉑, ㉔에서 주어진 부등식을 만족시키는 해는

$$0 \leq x < 3, 3 < x \leq 5$$

이다. 따라서 정수해는

$$0, 1, 2, 4, 5$$

이므로 구하는 정수해의 합은 12이다.

16. [출제의도] 다항식의 성질을 이용하여 실생활 문제 해결하기

i) $r = \frac{R}{3}$ 을 주어진 관계식에 대입하면

$$v_1 = \frac{P}{4\eta l} \times \left(R^2 - \left(\frac{R}{3} \right)^2 \right)$$

$$= \frac{P}{4\eta l} \times \frac{8}{9} R^2$$

ii) $r = \frac{R}{2}$ 을 주어진 관계식에 대입하면

$$v_2 = \frac{P}{4\eta l} \times \left(R^2 - \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right)$$

$$= \frac{P}{4\eta l} \times \frac{3}{4} R^2$$

따라서 i), ii)에 의해 $\frac{v_1}{v_2} = \frac{32}{27}$ 이다.

17. [출제의도] 근과 계수와의 관계를 이용하여 이차함수 추론하기

$f(x) + x - 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이고

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -3$$

이므로

$$f(x) + x - 1 = k(x^2 - x - 3) \dots \text{㉑}$$

이다. 또한 $f(1) = -6$ 이므로 $x=1$ 을 ㉑에 대입하면

$$f(1) + 1 - 1 = k(1^2 - 1 - 3)$$

$$-6 + 1 - 1 = k(1^2 - 1 - 3)$$

$$-6 = -3k$$

이다. 그러므로 $k=2$ 이다. ㉑에 대입하여 정리하면

$$f(x) + x - 1 = 2(x^2 - x - 3)$$

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 6 - x + 1$$

$$f(x) = 2x^2 - 3x - 5$$

이다. 따라서 $f(3) = 4$ 이다.

[다른 풀이]

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 라 두자.

$f(x) + x - 1 = ax^2 + (b+1)x + (c-1) = 0$ 의 두 근이 α, β 이다.

근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = -\frac{b+1}{a} = 1, b = -a - 1 \dots \text{㉑}$$

$$\alpha\beta = \frac{c-1}{a} = -3, c = -3a + 1 \dots \text{㉒}$$

이고, $f(1) = -6$ 이므로

$$a + b + c = -6 \dots \text{㉓}$$

이다.

㉑, ㉒, ㉓을 연립하여 정리하면

$$a = 2, b = -3, c = -5$$

이므로 $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$ 이다.

따라서 $f(3) = 4$ 이다.

18. [출제의도] 다항식의 성질을 이용하여 추론하기

$\overline{PQ} = 1, \overline{AR} = a^2$ 이므로

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \times (\overline{PQ} + \overline{AR}) = \frac{1+a^2}{2}$$

이다. 또한

$$\overline{MB} = \overline{MN} - \overline{BN} = \frac{1+a^2}{2} - \left(\frac{a-1}{2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{a+1}{2} \right)^2$$

이다.

따라서 삼각형 PAB의 넓이를 S 라 하면

$$S = 2 \times \Delta MAB$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{MB} \times \overline{NR}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{a+1}{2} \right)^2 \times \frac{a+1}{2}$$

$$= \frac{(a+1)^3}{8}$$

이므로 $f(a) = \frac{1+a^2}{2}, g(a) = \left(\frac{a+1}{2} \right)^2, k=8$ 이다.

따라서 $f(3) + g(5) + k = 5 + 9 + 8 = 22$ 이다.

19. [출제의도] 이차함수의 성질을 이용하여 이차함수 문제 해결하기

$f(x) = x^2 - 7, g(x) = -2x^2 + 5$ 이므로

$$\overline{AD} = \overline{BC} = (a - (-a)) = 2a$$

$$\overline{BA} = \overline{CD} = g(a) - f(a)$$

$$= (-2a^2 + 5) - (a^2 - 7)$$

$$= -3a^2 + 12$$

이다. 따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를

$h(a)$ 라 하면

$$h(a) = \overline{AD} + \overline{BC} + \overline{BA} + \overline{CD}$$

$$= 2(\overline{AD} + \overline{BA})$$

$$= 2(2a - 3a^2 + 12)$$

$$= -6a^2 + 4a + 24$$

이고

$$h(a) = -6 \left(a - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{74}{3}$$

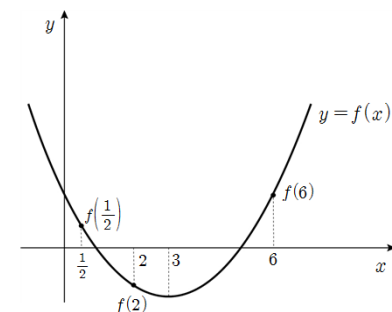
이다. 따라서 $a = \frac{1}{3}$ 일 때, 직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 최대가 된다.

20. [출제의도] 이차함수의 그래프 추론하기

조건 (나)에서 이차함수 $f(x)$ 는 '모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq f(3)$ '이므로 $x=3$ 에서 최솟값을 가지고, $x=3$ 이 대칭축이며 아래로 볼록이다.

ㄱ. $x=3$ 이 대칭축이고 $f(1)=0$ 이므로 $f(5)=0$ 이다. (참)

ㄴ. 그림과 같이 이차함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에 대칭이고 아래로 볼록이므로 $f(2) < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(6)$ 이다. (참)



ㄷ. $f(x)=0$ 의 두 근이 1, 5이므로

$$f(x) = a(x-1)(x-5)$$

$$= a(x^2 - 6x + 5)$$

$$= ax^2 - 6ax + 5a$$

이다. $f(0) = k$ 이므로

$$k = 5a$$

이다.

$f(x) = kx$ 에서

$$ax^2 - 6ax + 5a = 5ax$$

이고 $a > 0$ 이므로

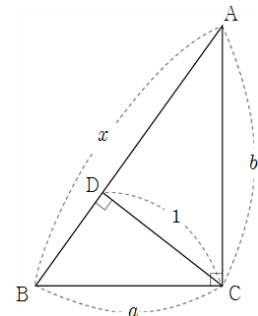
$$x^2 - 11x + 5 = 0$$

이다. 근과 계수의 관계에 의해 두 실근의 합은 11이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21. [출제의도] 연립방정식을 이용하여 추론하기

그림과 같이 $\overline{AB} = x, \overline{BC} = a, \overline{CA} = b$ 라 두자.



삼각형 ABC의 넓이를 구하는 두 가지 방법을 비교

해 보면 $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}x$ 이므로

$$ab = x \dots \text{㉑}$$

이다.

삼각형 ABC의 세 변의 길이의 합은 5이므로

$$a + b + x = 5$$

$$a + b = 5 - x \dots \text{㉒}$$

이다.

한편, 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의해

$$a^2 + b^2 = x^2$$

이고 $x^2 = (a+b)^2 - 2ab$ 에 ㉑과 ㉒을 대입하면

$$x^2 = (5-x)^2 - 2x$$

$$x^2 = 5^2 - 10x + x^2 - 2x$$

$$25 - 12x = 0$$

$$x = \frac{25}{12}$$

이다.

22. [출제의도] 근과 계수와의 관계 이해하기

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

$x^2 - 6x + 3 = 0$ 의 두 근의 합은 6이다.

[다른 풀이]

이차방정식의 근의 공식에 의해 $x^2 - 6x + 3 = 0$ 의 근은

$$x = 3 \pm \sqrt{3^2 - 3} = 3 \pm \sqrt{6}$$

이다. 따라서 $(3 + \sqrt{6}) + (3 - \sqrt{6}) = 6$ 이다.

23. [출제의도] 절댓값을 포함한 부등식 계산하기

부등식 $|x-1| \leq 5$ 를 풀면

$$-5 \leq x-1 \leq 5$$

$$-4 \leq x \leq 6$$

이므로 만족시키는 정수의 개수는 11이다.

24. [출제의도] 다항식 계산하기

$$(a+b+2c)^2 = a^2 + b^2 + (2c)^2 + 2ab + 2b(2c) + 2(2c)a$$

$$= a^2 + b^2 + 4c^2 + 2(ab + 2bc + 2ca)$$

$$= 44 + 2 \times 28$$

$$= 100$$

25. [출제의도] 연립부등식 이해하기

i) $2x - 1 \geq 7$

$$x \geq 4 \dots \text{㉑}$$

ii) $(x-3)(x-7) \leq 0$

$$3 \leq x \leq 7 \dots \text{㉒}$$

㉑, ㉒에서 공통 범위를 구하면 $4 \leq x \leq 7$ 이므로 x 의 최댓값 $M=7$ 이고 최솟값 $m=4$ 이다.

따라서 $M \times m = 28$ 이다.

26. [출제의도] 복소수의 성질 이해하기

$$(a-bi)^2 = 8i$$

$$(a-bi)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$$

이므로 $(a^2 - b^2) - 2abi = 8i$ 에서

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \dots \textcircled{A} \\ -2ab = 8 \dots \textcircled{B} \end{cases}$$

을 만족한다. ㉠에서 $a=b$ 또는 $a=-b$ 이다.

i) $a=b$ 일 때, ㉡에서 $a^2=-4$ 이므로 만족하는 a 값은 존재하지 않는다.

ii) $a=-b$ 일 때, ㉡에서 $a^2=4$ 이므로 $a=2, b=-2$ ($\because a>0$)

이다. 따라서 $20a+b=40-2=38$ 이다.

27. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 규칙성 문제 해결하기

$$\begin{aligned} & (i+i^2)+(i^2+i^3)+\dots+(i^{18}+i^{19}) \\ &= (i+i^2+\dots+i^{18})+(i^2+i^3+\dots+i^{19}) \\ &= (i-1)+(-1-i)=-2 \end{aligned}$$

그러므로 $a=-2, b=0$ 이다.

따라서 $4(a+b)^2=16$ 이다.

[다른 풀이]

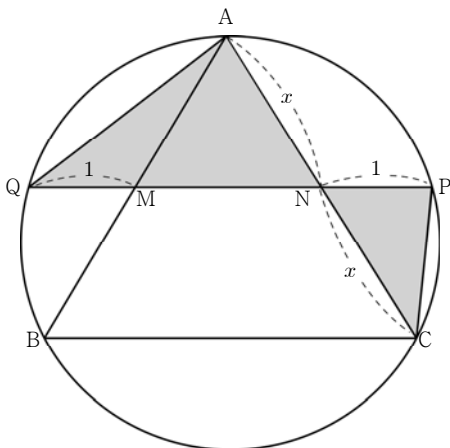
$i+i^{19}=0$ 이므로

$$\begin{aligned} & i+\{(i+i^2)+(i^2+i^3)+\dots+(i^{18}+i^{19})\}+i^{19} \\ &= (i+i)+(i^2+i^2)+\dots+(i^{19}+i^{19}) \\ &= 2(i+i^2+i^3+\dots+i^{19}) \\ &= 2(i+i^2+i^3+\dots+i^{19}+i^{20}-i^{20}) \\ &= 2(-i^{20}) \\ &= -2 \end{aligned}$$

이다. 그러므로 $a=-2, b=0$ 이다.

따라서 $4(a+b)^2=16$ 이다.

28. [출제의도] 이차방정식을 이용하여 다항식의 연산 문제 해결하기



그림과 같이 반직선 NM이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 AQN과 삼각형 PCN이 닮음이므로

$$1+x : x = x : 1$$

이다. 따라서

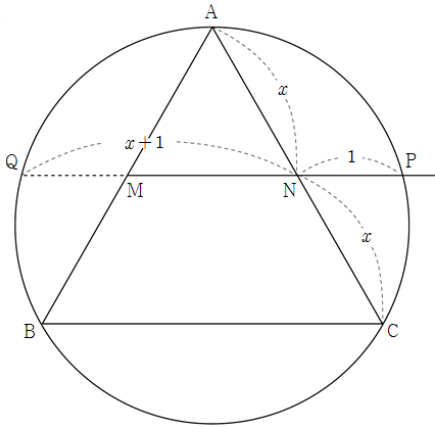
$$\begin{aligned} 1+x &= x^2 \\ x^2-x-1 &= 0 \end{aligned}$$

이므로 $x-1-\frac{1}{x}=0$ 에서 $x-\frac{1}{x}=1$ 이다.

그러므로 $x^2+\frac{1}{x^2}=(x-\frac{1}{x})^2+2=3$ 이다.

따라서 $10(x^2+\frac{1}{x^2})=30$ 이다.

[다른 풀이]



원의 성질에 의해 $\overline{NA} \times \overline{NC} = \overline{NP} \times \overline{NQ}$ 에서

$$x \times x = 1 \times (x+1)$$

이다. 따라서

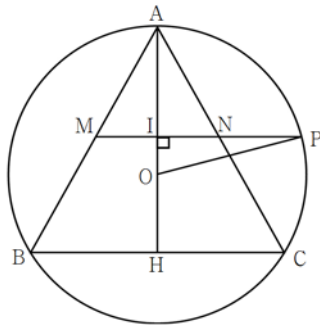
$$\begin{aligned} x^2 &= x+1 \\ x^2-x-1 &= 0 \end{aligned}$$

이므로 $x-1-\frac{1}{x}=0$ 에서 $x-\frac{1}{x}=1$ 이다.

그러므로 $x^2+\frac{1}{x^2}=(x-\frac{1}{x})^2+2=3$ 이다.

따라서 $10(x^2+\frac{1}{x^2})=30$ 이다.

[다른 풀이]



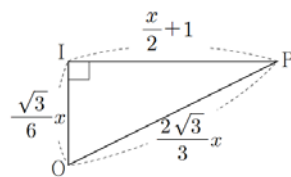
그림과 같이 삼각형 ABC의 외심을 O, 선분 MN의 중점을 I라 하면 $\overline{AH} = \sqrt{3}x$ 이므로

$$\overline{IO} = \frac{1}{6} \overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{6}x$$

$$\overline{IP} = \overline{IN} + \overline{NP} = \frac{x}{2} + 1$$

$$\overline{OP} = \overline{OA} = \frac{2}{3} \overline{AH} = \frac{2\sqrt{3}}{3}x$$

이다.



그림과 같이 삼각형 POI에서 피타고라스의 정리에 의해

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2 + \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x\right)^2$$

이고 식을 정리하면 $x^2-x-1=0$

이므로 $x-1-\frac{1}{x}=0$ 에서 $x-\frac{1}{x}=1$ 이다.

그러므로 $x^2+\frac{1}{x^2}=(x-\frac{1}{x})^2+2=3$ 이다.

따라서 $10(x^2+\frac{1}{x^2})=30$ 이다.

29. [출제의도] 항등식의 성질을 이용하여 나머지 정리 문제 해결하기

(나)조건에 의해

$$f(x) = (x-1)^2(ax+b) + (ax+b) \dots \textcircled{A}$$

라 둘 수 있다.

$f(1)=2$ 이므로 $ax+b=a(x-1)+2$ 이다.

㉠에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2\{a(x-1)+2\} + a(x-1)+2 \\ &= a(x-1)^3 + 2(x-1)^2 + a(x-1)+2 \end{aligned}$$

이다.

그러므로 $f(x)$ 를 $(x-1)^3$ 으로 나눈 나머지

$R(x) = 2(x-1)^2 + a(x-1) + 2$ 이다.

$R(0) = R(3)$ 이므로

$$2-a+2 = 8+2a+2$$

$$a = -2$$

이다.

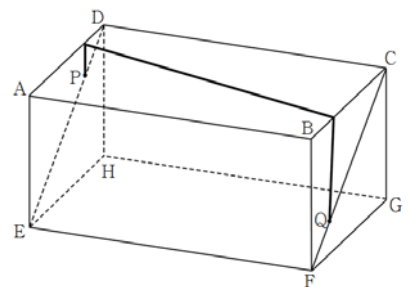
따라서 $R(x) = 2(x-1)^2 - 2(x-1) + 2$ 이므로

$R(5) = 26$ 이다.

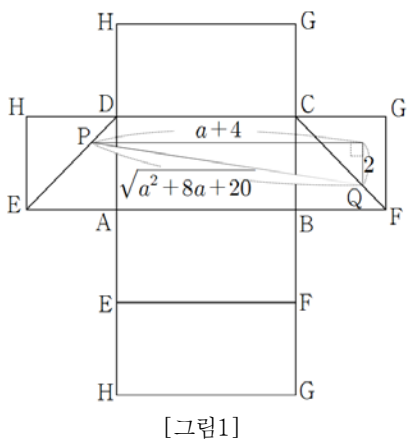
30. [출제의도] 이차방정식을 이용하여 최단거리 문제 해결하기

점 P에서 직육면체의 겹면을 따라 점 Q에 도달하는 최단거리를 구하기 위해 고려해야 할 경로는 아래와 같이 두 가지가 있다.

i) 아래 그림과 같은 경로로 이동하는 경우



그림의 전개도는 아래 [그림1]과 같다.

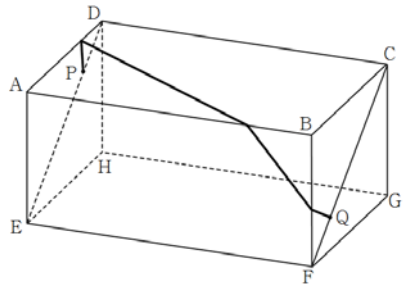


[그림1]에서

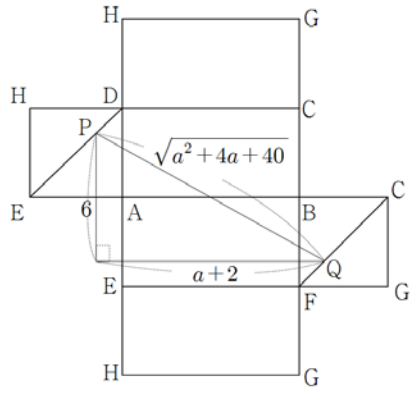
$$\overline{PQ} = \sqrt{(a+4)^2 + 2^2} = \sqrt{a^2 + 8a + 20}$$

이다.

ii) 아래 그림과 같은 경로로 이동하는 경우



그림의 전개도는 아래 [그림2]와 같다.



[그림2]

[그림2]에서

$$PQ = \sqrt{(a+2)^2 + 6^2} = \sqrt{a^2 + 4a + 40}$$

이다.

$a > 5$ 이므로 i), ii) 에 의해

$$(a^2 + 4a + 40) - (a^2 + 8a + 20) = -4a + 20 < 0$$

이 되어 $\sqrt{a^2 + 4a + 40}$ 이 최단거리이다.

정리하면

$$\sqrt{a^2 + 4a + 40} = 2\sqrt{34}$$

$$a^2 + 4a + 40 = 136$$

$$a^2 + 4a - 96 = 0$$

$$(a-8)(a+12) = 0$$

이므로 $a = 8$ 이다.

따라서 $30a = 240$ 이다.

무거운 원소가 만들어진다.