2015학년도 4월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[B 형]

1	④	**2**	③	**3**	②	**4**	④	**5**	①
6	①	**7**	②	**8**	⑤	**9**	⑤	**10**	②
11	④	**12**	③	**13**	②	**14**	①	**15**	③
16	⑤	**17**	③	**18**	③	**19**	④	**20**	④
21	①	**22**	6	**23**	13	**24**	8	**25**	23
26	235	**27**	70	**28**	32	**29**	138	**30**	10

1. [출제의도] 지수의 성질을 알고 계산하기

$4^{\frac{3}{4}} \times 8^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$

2. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{3x} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

3. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 계산하기

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{1}{\frac{3}{4}} = \dfrac{4}{3}$

4. [출제의도] 일차변환의 성질 이해하기

$f(A) + 2f(B) = f(A+2B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

5. [출제의도] 로그방정식 이해하기

$\log_3 x = t$라 하면

$\log_9 x = \dfrac{1}{2}\log_3 x = \dfrac{1}{2}t$이므로

$t^2 + 2t - 3 = 0 \quad \therefore t = -3$ 또는 $t = 1$

$\log_3 x = -3$ 또는 $\log_3 x = 1$

$\therefore x = \dfrac{1}{27}$ 또는 $x = 3$

따라서 모든 실근의 곱은 $\dfrac{1}{9}$

6. [출제의도] 등차수열 이해하기

$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 5 \times a_6 = 55$

$\therefore a_6 = 11$

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_6 - a_1 = 5d = 10 \quad \therefore d = 2$

따라서 $a_{11} = a_1 + 10d = 21$

7. [출제의도] 분수부등식 이해하기

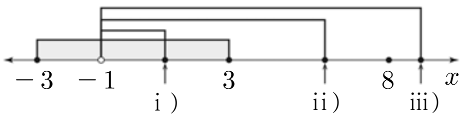
$(x+3)(x-3)(x-8)^2 \le 0$의 해는

$-3 \le x \le 3$ 또는 $x = 8$ …… ㉠

$\dfrac{x-k}{x+1} \le 0$의 해는 $-1 < x \le k$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 주어진 연립부등식의 해는

그림과 같다.



자연수 k의 값의 범위에 따라 정수 x의 개수는 다음

과 같다.

i) $1 \le k < 3$일 때

$-1 < x \le k$이므로 $(k+1)$개

ii) $3 \le k < 8$일 때

$-1 < x \le 3$이므로 4개

iii) $k \ge 8$일 때

$-1 < x \le 3$ 또는 $x = 8$이므로 5개

i), ii), iii)에서 정수 x의 개수가 4가 되도록

하는 자연수 k는 3, 4, 5, 6, 7

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은 25

8. [출제의도] 무한급수와 일반항 사이의 관계 이해하기

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{n+1} - \dfrac{1}{2}\right)$이 수렴하므로

$\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{a_n}{n+1} - \dfrac{1}{2}\right) = 0$

$\dfrac{a_n}{n+1} - \dfrac{1}{2} = b_n$이라 하면 $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$이고

$a_n = (n+1)\left(b_n + \dfrac{1}{2}\right)$

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{4n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(b_n + \frac{1}{2}\right)}{4 + \frac{1}{n}} = \dfrac{1}{8}$

9. [출제의도] 삼각방정식 이해하기

$2\cos^2 x - 1 + 6 \times \dfrac{1+\cos x}{2} = 1$

$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$이므로

$(2\cos x + 1)(\cos x + 1) = 0$

$\therefore \cos x = -\dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos x = -1$

$\therefore x = \dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \dfrac{4}{3}\pi$ 또는 $x = \pi$

따라서 모든 실근의 합은 3π

10. [출제의도] 일차변환의 역변환과 합성변환 이해하기

일차변환 f의 역변환 f^{-1}에 의하여

점 $(2, 4)$가 점 $(-1, 2)$로 옮겨지므로

일차변환 f에 의하여 점 $(-1, 2)$는

점 $(2, 4)$로 옮겨진다.

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\therefore a = -2$

합성변환 $f \circ g$에 의하여 점 $(3, 2)$가 옮겨지는 점은

$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

따라서 $(-4, 6)$

11. [A형 16번과 동일]

12. [출제의도] 함수의 연속성 추론하기

ㄱ. $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = -2$,

$\lim\limits_{x \to +0} f(-x) = \lim\limits_{x \to -0} f(x) = 2$

$\therefore \lim\limits_{x \to +0}\{f(x) + f(-x)\} = -2 + 2 = 0$ (참)

ㄴ. $f(x) = t$라 하면 $x \to 1+0$일 때 $t \to -1+0$

$\therefore \lim\limits_{x \to 1+0} f(f(x)) = \lim\limits_{t \to -1+0} f(t) = 0$ (거짓)

ㄷ. $\lim\limits_{x \to 1+0}\{f(x-1)\}^2 = \lim\limits_{x \to +0}\{f(x)\}^2$

$= (-2)^2 = 4$

$\lim\limits_{x \to 1-0}\{f(x-1)\}^2 = \lim\limits_{x \to -0}\{f(x)\}^2$

$= 2^2 = 4$

$\{f(1-1)\}^2 = \{f(0)\}^2 = 2^2 = 4$

$\therefore$ 함수 $\{f(x-1)\}^2$은 $x = 1$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

13. [출제의도] 몫의 미분법 이해하기

$\overline{\mathrm{OP}} = t + \dfrac{1}{t}$, $\overline{\mathrm{OQ}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2t}$

$f(t) = \overline{\mathrm{OP}} \times \overline{\mathrm{OQ}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2t^2}$

$f'(t) = -\dfrac{\sqrt{2}}{t^3}$이므로

$f'(\sqrt{2}) = -\dfrac{1}{2}$

14. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$\angle \mathrm{QOP} = \theta$라 하면

$S(t) = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OQ}} \times \overline{\mathrm{OR}} \times \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)$

$= \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2t}\right)^2 \times \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)$

$= \dfrac{1}{4t^2}\cos\theta$

직각삼각형 PQO에서

$\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OP}}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2t}}{t + \frac{1}{t}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2(t^2+1)}$이므로

$S(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{8(t^4 + t^2)}$

따라서 $\lim\limits_{t \to \infty}\{t^4 \times S(t)\} = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\sqrt{2}\,t^4}{8(t^4 + t^2)}$

$= \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\sqrt{2}}{8\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{8}$

15. [A형 19번과 동일]

16. [A형 17번과 동일]

17. [출제의도] 정적분 이해하기

$x^2 = t$라 하면 $2x = \dfrac{dt}{dx}$이고

$x = 1$일 때 $t = 1$, $x = n$일 때 $t = n^2$이므로

$f(n) = \int_1^n \left(x^2 e^{x^2} \times x\right)dx = \int_1^{n^2} \dfrac{1}{2} t e^t dt$

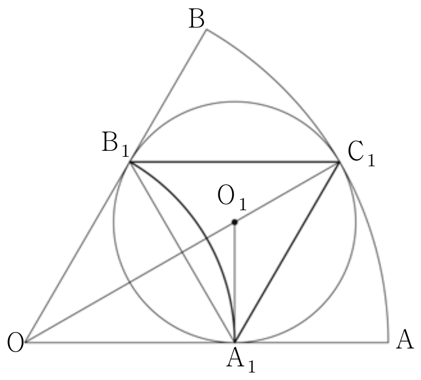
$= \dfrac{1}{2}\left[te^t - e^t\right]_1^{n^2} = \dfrac{1}{2}\left(n^2 e^{n^2} - e^{n^2}\right)$

$= \dfrac{e^{n^2}}{2}(n^2 - 1)$

따라서 $\dfrac{f(5)}{f(3)}=\dfrac{12\times e^{25}}{4\times e^{9}}=3e^{16}$

18. [출제의도] 무한급수를 활용하여 추론하기

부채꼴 OAB에서 원 O_1의 중심을 $\mathrm{O_1}$이라 하자.



$\overline{\mathrm{OA_1}}=\overline{\mathrm{OB_1}}$이고 $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$이므로

삼각형 $\mathrm{OA_1B_1}$은 정삼각형이다.

직선 $\mathrm{OC_1}$은 점 $\mathrm{O_1}$을 지나므로

$\angle\mathrm{O_1OA_1}=\dfrac{\pi}{6}$이다.

원 O_1의 반지름의 길이를 a라 하면

$\overline{\mathrm{OA_1}}=\sqrt{3}\,a$, $\overline{\mathrm{OO_1}}=2a$, $\overline{\mathrm{O_1C_1}}=a$이므로

$\overline{\mathrm{OC_1}}=3a=6$, $a=2$이고

$\overline{\mathrm{OA_1}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{A_1C_1}}=\overline{\mathrm{B_1C_1}}=\overline{\mathrm{B_1A_1}}=2\sqrt{3}$

이다.

▽모양의 도형 $\mathrm{A_1C_1B_1}$의 넓이는

두 정삼각형 $\mathrm{OA_1B_1}$, $\mathrm{A_1C_1B_1}$의 넓이의 합에서

부채꼴 $\mathrm{OA_1B_1}$의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\therefore S_1=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2-\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\dfrac{\pi}{3}$

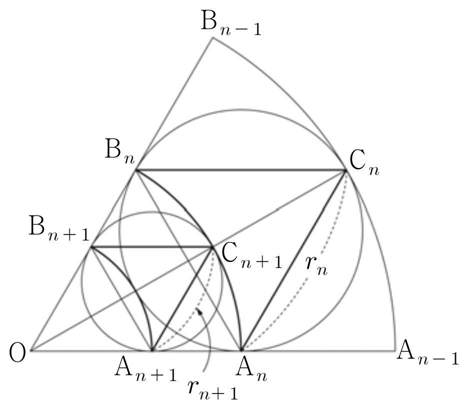
$=6\sqrt{3}-2\pi$

부채꼴 $\mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}$에 내접하는 원 O_n이

두 선분 OA_{n-1}, OB_{n-1}, 호 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}$과

만나는 점을 각각 A_n, B_n, C_n이라 하자.

(단, $\mathrm{A_0}=\mathrm{A}$, $\mathrm{B_0}=\mathrm{B}$이다.)



▽모양의 도형 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n$과

도형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$에서

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}=r_n$, $\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}=r_{n+1}$이라 하자.

$\overline{\mathrm{OC}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OA}_n}=r_n$이고 $\overline{\mathrm{OA}_{n+1}}=r_{n+1}$이므로

삼각형 $\mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$에서

$\angle\mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}=\dfrac{2}{3}\pi$이므로

코사인법칙에 의하여

${r_n}^2={r_{n+1}}^2+{r_{n+1}}^2-2{r_{n+1}}^2\cos\dfrac{2}{3}\pi$

${r_n}^2=3{r_{n+1}}^2$

$r_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}r_n$

두 도형의 닮음비가 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로 넓이의 비는 $\dfrac{1}{3}$이다.

그러므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $6\sqrt{3}-2\pi$이고

공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{6\sqrt{3}-2\pi}{1-\dfrac{1}{3}}=9\sqrt{3}-3\pi$

19. [출제의도] 분수방정식을 활용하여 추론하기

$\dfrac{f(x)-2}{g(x)-2}-\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$

$\dfrac{\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2-2\{f(x)-g(x)\}}{f(x)\{g(x)-2\}}=0$

$\dfrac{\{f(x)-g(x)\}\{f(x)+g(x)-2\}}{f(x)\{g(x)-2\}}=0$

$\{f(x)-g(x)\}\{f(x)+g(x)-2\}=0$이고

$f(x)\{g(x)-2\}\neq 0$이다.

ⅰ) $f(x)=g(x)$일 때

$x=-1$ 또는 $x=2$

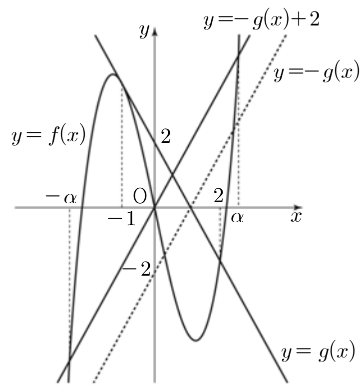
$f(-1)\neq 0$이고 $g(-1)-2>0$

$f(2)\neq 0$이고 $g(2)-2<0$

$\therefore x=-1$과 $x=2$는 무연근이 아니므로

서로 다른 실근의 개수는 2

ⅱ) $f(x)=-g(x)+2$일 때



$y=-g(x)+2$의 그래프는 $y=g(x)$의 그래프를

x축에 대하여 대칭이동시킨 후, y축의 방향으로

2만큼 평행이동시켜 얻은 그래프이다.

$y=f(x)$의 그래프와 $y=-g(x)+2$의 그래프의

세 교점의 x좌표는 $-\alpha$, 0, $\alpha\,(\alpha>0)$이다.

$f(-\alpha)<0$이고 $g(-\alpha)-2>0$

$f(\alpha)>0$이고 $g(\alpha)-2<0$

$f(0)=0$이므로

$x=-\alpha$, $x=\alpha$는 무연근이 아니고,

$x=0$은 무연근이다.

$\therefore$ 서로 다른 실근의 개수는 2

ⅰ), ⅱ)에서 서로 다른 실근의 개수는 4

20. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 문제해결하기

점 P의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$

직선 $y=x$가 x축과 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{4}$

$\angle\mathrm{POQ}=\theta-\dfrac{\pi}{4}$이므로

직각삼각형 OQP에서

$\overline{\mathrm{OQ}}=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\mathrm{Q}\left(\overline{\mathrm{OQ}}\cos\dfrac{\pi}{4},\ \overline{\mathrm{OQ}}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\mathrm{Q}\left(\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\dfrac{\pi}{4},\ \cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$이므로

점 M의 y좌표는

$\dfrac{1}{2}\left\{\sin\theta+\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\dfrac{\pi}{4}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\sin\theta+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{2}\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$\sin(\theta+\alpha)=1$, 즉 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$일 때

점 M의 y좌표는 최댓값을 갖는다.

따라서 $\tan\theta=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$

$=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=3$

21. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

$x\geq 0$일 때

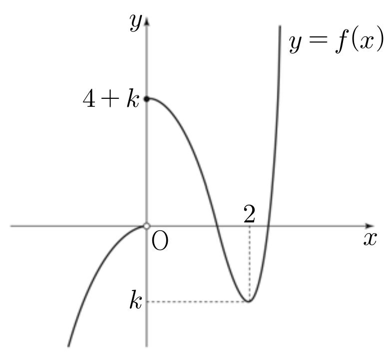
$f'(x)=x(x-2)e^x\ (x>0)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

$f(0)=4+k$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$4+k$	↘	k	↗

$y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

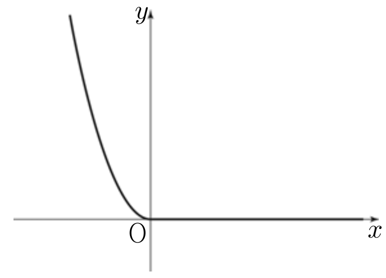


$g(x)=\begin{cases}0 & (f(x)\geq 0)\\ -2f(x) & (f(x)<0)\end{cases}$이므로

k의 값의 범위에 따라 $y=g(x)$의 그래프를 그리면

다음과 같다.

ⅰ) $k\geq 0$일 때



$x=0$에서 연속이고,

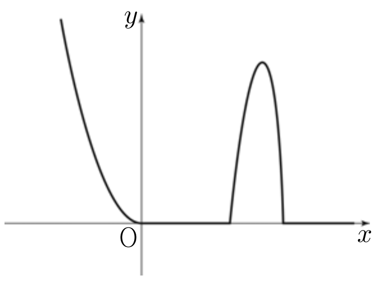
$\displaystyle\lim_{x\to-0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to-0}\dfrac{2x^2}{x}=0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\dfrac{0}{x}=0$이므로

$x=0$에서 미분가능하다.

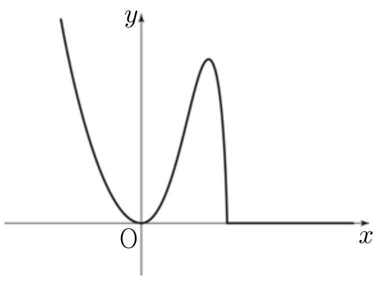
$\therefore$ 미분가능하지 않은 점의 개수는 0

ⅱ) $-4<k<0$일 때



$\therefore$ 미분가능하지 않은 점의 개수는 2

iii) $k=-4$일 때



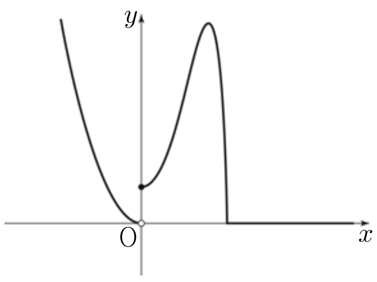
$x=0$에서 연속이고

$$\lim_{x\to -0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$$

이므로 $x=0$에서 미분가능하다.

$\therefore$ 미분가능하지 않은 점의 개수는 1

iv) $k<-4$일 때



$\therefore$ $x=0$에서는 불연속이고,

연속이면서 미분가능하지 않은 점의 개수는 1

i)~iv)에 의하여 $-4<k<0$이고

정수 k의 개수는 3

22. [출제의도] 행렬과 연립일차방정식의 관계 이해하기

$\begin{pmatrix} k-1 & -1 \\ 2 & k-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지려면

행렬 $\begin{pmatrix} k-1 & -1 \\ 2 & k-4 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

$\therefore (k-1)(k-4)+2=0$

$k^2-5k+6=0,\ k=2$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 6

23. [출제의도] 여러 가지 함수의 미분법 이해하기

$f'(x)=3(x+1)^2+\dfrac{1}{x}$

따라서 $f'(1)=13$

24. [출제의도] 삼각함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x\to 0}x^2f(x)=\lim_{x\to 0}\left\{f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\times\frac{x^2}{1-\cos\frac{x}{2}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\times\frac{x^2\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}{\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\times\frac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2\frac{x}{2}}\times 4\times\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\right\}$$

$=1\times 1\times 4\times 2=8$

25. [출제의도] 부정적분 이해하기

$$f(x)=\begin{cases} 2x^{\frac{3}{2}}+C_1 & (x>1) \\ x^2+C_2 & (x<1) \end{cases}$$

(단, $C_1,\ C_2$는 적분상수)

$f(4)=16+C_1=13$

$C_1=-3$

$x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1-0}(x^2+C_2)=\lim_{x\to 1+0}\left(2x^{\frac{3}{2}}-3\right)$$

$1+C_2=-1$

$C_2=-2$

따라서 $f(-5)=25-2=23$

26. [출제의도] 여러 가지 수열을 이용하여 추론하기

$a_1=3$

$a_2=\dfrac{3+93}{2}=48$

$a_3=\dfrac{48}{2}=24$

$a_4=\dfrac{24}{2}=12$

$a_5=\dfrac{12}{2}=6$

$a_6=\dfrac{6}{2}=3$

$\vdots$

$a_k=3$을 만족시키는 50이하의 모든 자연수 k는

$1,\ 6,\ 11,\ 16,\ \cdots,\ 46$

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$$\sum_{m=1}^{10}(5m-4)=5\times\frac{10\times(10+1)}{2}-4\times 10$$

$$=235$$

27. [출제의도] 지표와 가수의 성질을 활용하여 문제해결하기

$\{f(x)\}^2+3g(x)=3$에서

$g(x)=\dfrac{3-\{f(x)\}^2}{3}$이고 $0\le g(x)<1$이므로

$0\le\dfrac{3-\{f(x)\}^2}{3}<1$

$0<\{f(x)\}^2\le 3$

$\therefore f(x)=1$ 또는 $f(x)=-1$

i) $f(x)=1$일 때

$g(x)=\dfrac{2}{3}$이므로 $\log x=\dfrac{5}{3}$ $\therefore x=10^{\frac{5}{3}}$

ii) $f(x)=-1$일 때

$g(x)=\dfrac{2}{3}$이므로 $\log x=-\dfrac{1}{3}$ $\therefore x=10^{-\frac{1}{3}}$

i), ii)에 의하여 $x=10^{\frac{5}{3}}$ 또는 $x=10^{-\frac{1}{3}}$

모든 x의 값의 곱은 $10^{\frac{4}{3}}$

따라서 $p=3,\ q=4$이고 $10(p+q)=70$

28. [출제의도] 무한급수와 정적분을 활용하여 문제 해결하기

삼각형 $\mathrm{OQ}_k\mathrm{B}$에서

$\angle\mathrm{OBQ}_k=\angle\mathrm{AOP}_k=\dfrac{k\pi}{2n}$이고 $\overline{\mathrm{OB}}=8$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}_k}=8\sin\dfrac{k\pi}{2n},\ \overline{\mathrm{BQ}_k}=8\cos\dfrac{k\pi}{2n}$

$S_k=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}_k}\times\overline{\mathrm{BQ}_k}$

$=\dfrac{1}{2}\times 8\sin\dfrac{k\pi}{2n}\times 8\cos\dfrac{k\pi}{2n}=16\sin\dfrac{k\pi}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=16\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

$$=16\int_0^1\sin\pi x\,dx=16\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=\frac{32}{\pi}$$

따라서 $\alpha=32$

29. [출제의도] 일차변환을 활용하여 문제해결하기

주어진 일차변환은 원점을 중심으로 $\dfrac{n\pi}{24}$만큼 회전하는 회전변환이다.

세 직선 OA, OB, OC가 x축과 이루는 각의 크기는 각각 $\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{6},\ \alpha\ \left(단,\ \dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}\right)$이므로

직선 OA가 직선 $y=-\sqrt{3}x$와 이루는 각의 크기는 $\dfrac{5\pi}{12}$ 또는 $\dfrac{17\pi}{12}$이고,

직선 OB가 직선 $y=-\sqrt{3}x$와 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{3\pi}{2}$이다.

삼각형 A′B′C′과 직선 $y=-\sqrt{3}x$가 만나도록 하려면

i) $\dfrac{5\pi}{12}\le\dfrac{n\pi}{24}\le\dfrac{\pi}{2}$이므로

$10\le n\le 12$ $\therefore n=10,\ 11,\ 12$

ii) $\dfrac{17\pi}{12}\le\dfrac{n\pi}{24}\le\dfrac{3\pi}{2}$이므로

$34\le n\le 36$ $\therefore n=34,\ 35,\ 36$

i), ii)에 의하여 모든 자연수 n의 값의 합은 138

30. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

t초가 되는 순간 점 P의 좌표는 $(2t,\ 0)$

$\angle\mathrm{QOP}=\theta$라 하면, $\angle\mathrm{AOQ}=\dfrac{\pi}{3}-\theta$

부채꼴 OQA의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 10^2\times\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)=50\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)$

삼각형 OPQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 10\times 2t\times\sin\theta=10t\sin\theta$

$S=50\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)+10t\sin\theta$

양변을 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dS}{dt}=-50\dfrac{d\theta}{dt}+10\sin\theta+10t\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}$ …… ㉠

점 $\mathrm{P}(2t,0)$을 지나고 직선 $y=\sqrt{3}x$에 평행한 직선을 l이라 하면

직선 l의 방정식은 $y=\sqrt{3}(x-2t)$이고

직선 l과 원이 만나는 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(10\cos\theta,\ 10\sin\theta)$이므로 직선 l에 대입하면

$10\sin\theta=\sqrt{3}(10\cos\theta-2t)$ …… ㉡

㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면

$10\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} = \sqrt{3}\left(-10\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt} - 2\right)$ …… ㉢

점 Q의 y좌표가 5이므로

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이고

㉡에서 $t = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$이고

㉢에서 $\dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{1}{5}$이다.

㉠에 의하여 $\dfrac{dS}{dt} = 10$