

수학 영역(B형)

제 2 교시

1

1. $4^{\frac{3}{4}} \times 8^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 4
 ④ 8 ⑤ 16

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{5}{2}$ ② 2 ③ $\frac{3}{2}$
 ④ 1 ⑤ $\frac{1}{2}$

3. $\tan \theta = \frac{1}{2}$ 일 때, $\tan 2\theta$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$
 ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ 1

4. 일차변환 f 를 나타내는 행렬이 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 일 때,

두 행렬 $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $f(A) + 2f(B)$ 는? [3점]

- ① $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$
 ④ $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

5. 방정식 $(\log_3 x)^2 + 4\log_9 x - 3 = 0$ 의 모든 실근의 곱은? [3점]

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{9}$
 ④ $\frac{7}{9}$ ⑤ 1

6. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = 1, a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 55$$

일 때, a_{11} 의 값은? [3점]

- ① 21 ② 24 ③ 27
 ④ 30 ⑤ 33

7. x 에 대한 두 부등식 $\frac{x-k}{x+1} \leq 0, (x+3)(x-3)(x-8)^2 \leq 0$ 을

동시에 만족시키는 정수 x 의 개수가 4가 되도록 하는 모든 자연수 k 의 값의 합은? [3점]

- ① 20 ② 25 ③ 30
 ④ 35 ⑤ 40

8. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n+1} - \frac{1}{2} \right)$ 이 수렴할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{4n+1}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{8}$
 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

9. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\cos 2x + 6\cos^2 \frac{x}{2} = 1$ 의 서로 다른 모든 실근의 합은? [3점]

- ① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π
 ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

10. 좌표평면에서 두 일차변환 f 와 g 를 나타내는 행렬을 각각

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

이라 하자. 일차변환 f 의 역변환 f^{-1} 에 의하여 점 $(2, 4)$ 가 점 $(-1, 2)$ 로 옮겨질 때, 합성변환 $f \circ g$ 에 의하여 점 $(3, 2)$ 가 옮겨지는 점은? (단, a 는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

- ① $(-6, 4)$ ② $(-4, 6)$ ③ $(2, -3)$
 ④ $(3, -2)$ ⑤ $(6, 2)$

11. 어떤 앰프에 스피커를 접속 케이블로 연결하여 작동시키면 접속 케이블의 저항과 스피커의 임피던스(스피커에 교류전류가 흐를 때 생기는 저항)에 따라 전송 손실이 생긴다. 접속 케이블의 저항을 R , 스피커의 임피던스를 r , 전송 손실을 L 이라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$L = 10 \log \left(1 + \frac{2R}{r} \right)$$

(단, 전송 손실의 단위는 dB, 접속 케이블의 저항과 스피커의 임피던스의 단위는 Ω 이다.)

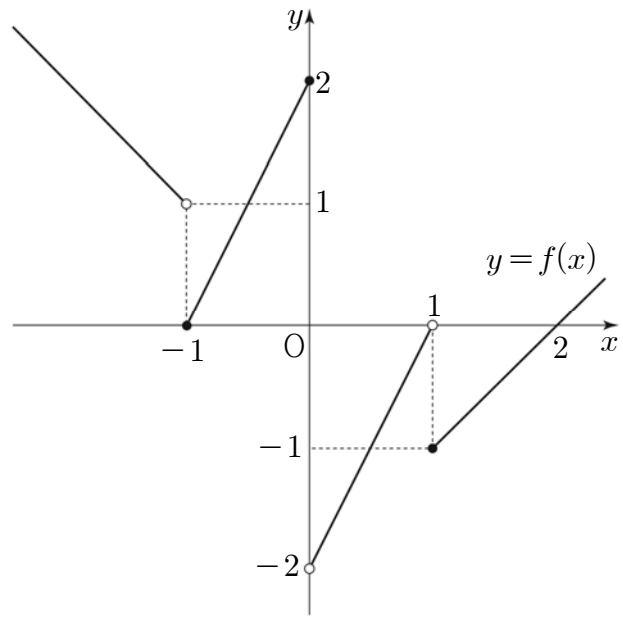
이 앰프에 임피던스가 8인 스피커를 저항이 5인 접속 케이블로 연결하여 작동시켰을 때의 전송 손실은 저항이 a 인 접속 케이블로 교체하여 작동시켰을 때의 전송 손실의 2배이다. 양수 a 의 값은?

[3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
- ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$



12. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]



< 보기 >

- ㄱ. $\lim_{x \rightarrow +0} \{f(x) + f(-x)\} = 0$
- ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(f(x)) = 1$
- ㄷ. 함수 $\{f(x-1)\}^2$ 은 $x = 1$ 에서 연속이다.

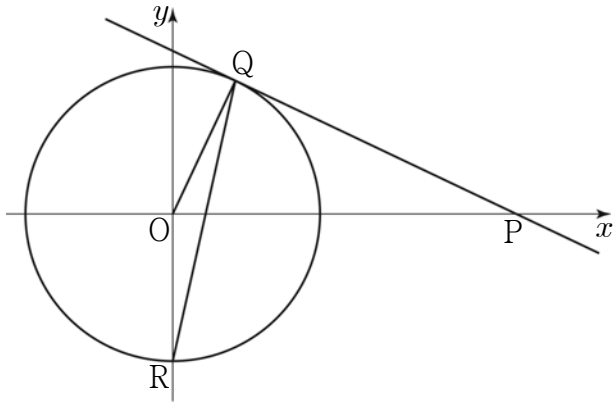
- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[13~14] 1보다 큰 실수 t 에 대하여 그림과 같이 점 $P\left(t + \frac{1}{t}, 0\right)$ 에서

원 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2t^2}$ 에 접선을 그었을 때, 원과 접선이 제1사분면에서

만나는 점을 Q , 원 위의 점 $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}t}\right)$ 을 R 라 하자.

13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. $\overline{OP} \times \overline{OQ}$ 를 $f(t)$ 라 할 때, $f'(\sqrt{2})$ 의 값은? [3점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{4}$
 ④ $-\frac{1}{8}$ ⑤ $-\frac{1}{16}$

14. 삼각형 ORQ의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow \infty} \{t^4 \times S(t)\}$ 의 값은?

[4점]

- ① $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

15. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$AB + E = A^2, AB^3 - BA^3 = 6E$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

— < 보 기 > —

- ㄱ. A 의 역행렬이 존재한다.
 ㄴ. $AB = BA$
 ㄷ. $A^2 + B^2 = 4E$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 할 때,

$$2S_n = 3a_n - 4n + 3 \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

$$2S_n = 3a_n - 4n + 3 \quad \text{..... ㉠}$$

에서 $n=1$ 일 때, $2S_1 = 3a_1 - 1$ 이므로 $a_1 = 1$ 이다.

$$2S_{n+1} = 3a_{n+1} - 4(n+1) + 3 \quad \text{..... ㉡}$$

㉡에서 ㉠을 뺀 식으로부터

$$a_{n+1} = 3a_n + \boxed{\text{가}}$$

이다. 수열 $\{a_n + 2\}$ 가 등비수열이므로

일반항 a_n 을 구하면

$$a_n = \boxed{\text{나}} \quad (n \geq 1)$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p , (나)에 알맞은 식을 $f(n)$ 이라 할 때,
 $p + f(5)$ 의 값은? [4점]

- ① 225 ② 230 ③ 235
 ④ 240 ⑤ 245

17. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(n) = \int_1^n x^3 e^{x^2} dx$ 라 할 때,

$\frac{f(5)}{f(3)}$ 의 값은? [4점]

- ① e^{14} ② $2e^{16}$ ③ $3e^{16}$
 ④ $4e^{18}$ ⑤ $5e^{18}$

18. 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 이고 반지름의 길이가 6인

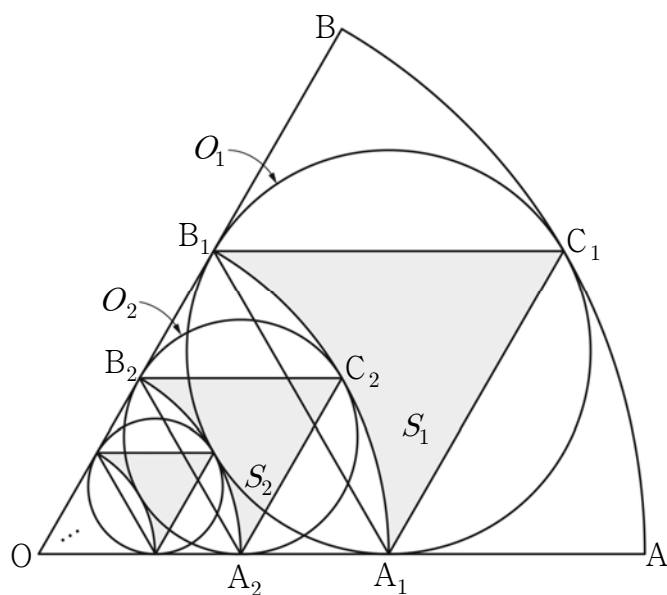
부채꼴 OAB가 있다.

부채꼴 OAB에 내접하는 원 O_1 이 두 선분 OA, OB, 호 AB와 만나는 점을 각각 A_1, B_1, C_1 이라 하고, 부채꼴 OA_1B_1 의 외부와 삼각형 $A_1C_1B_1$ 의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1 이라 하자.

부채꼴 OA_1B_1 에 내접하는 원 O_2 가 두 선분 OA_1, OB_1 , 호 A_1B_1 과 만나는 점을 각각 A_2, B_2, C_2 라 하고, 부채꼴 OA_2B_2 의 외부와 삼각형 $A_2C_2B_2$ 의 내부의 공통부분의 넓이를 S_2 라 하자.

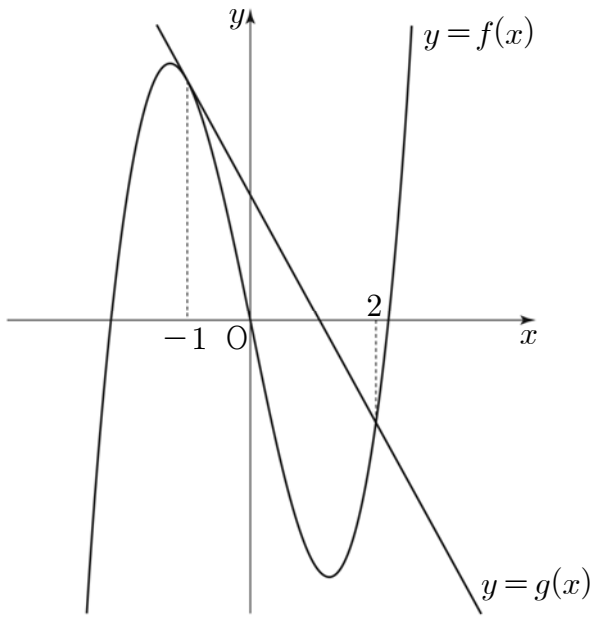
위와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 부채꼴 OA_nB_n 의 외부와 삼각형 $A_nC_nB_n$ 의 내부의 공통부분의 넓이를 S_n 이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



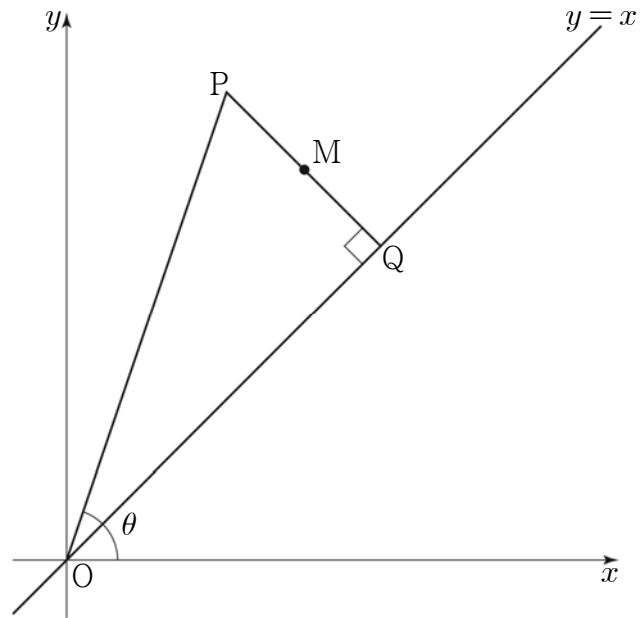
- ① $8\sqrt{3} - 3\pi$ ② $8\sqrt{3} - 2\pi$ ③ $9\sqrt{3} - 3\pi$
 ④ $9\sqrt{3} - 2\pi$ ⑤ $10\sqrt{3} - 3\pi$

19. 그림과 같이 원점에 대하여 대칭인 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 $x=-1$ 에서 접하고 $x=2$ 에서 만난다. $g(0)=2$ 이고 $g(2)<0$ 일 때, 방정식 $\frac{f(x)-2}{g(x)-2} - \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는? [4점]



- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

20. 그림과 같이 원점 O로부터의 거리가 1인 점 P에 대하여 선분 OP가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ ($\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$)라 하자. 점 P에서 직선 $y=x$ 에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 선분 PQ의 중점을 M이라 하자. 점 M의 y 좌표가 최대일 때, $\tan \theta$ 의 값은? [4점]



- ① 2
- ② $\frac{7}{3}$
- ③ $\frac{8}{3}$
- ④ 3
- ⑤ $\frac{10}{3}$

21. 함수 $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 e^x + k & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여

함수 $g(x) = |f(x)| - f(x)$ 가 다음 조건을 만족하도록 하는 정수 k 의 개수는? [4점]

- (가) 함수 $g(x)$ 는 모든 실수에서 연속이다.
 (나) 함수 $g(x)$ 는 미분가능하지 않은 점이 2개다.

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

단답형

22. x, y 에 대한 연립일차방정식 $\begin{pmatrix} k-1 & -1 \\ 2 & k-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이

$x=0, y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 모든 실수 k 의 값의 곱을 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x) = (x+1)^3 + \ln x$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값을 구하시오.

[3점]

24. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) = 1$ 일 때,

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x)$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 모든 실수 x 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$f'(x) = \begin{cases} 3\sqrt{x} & (x > 1) \\ 2x & (x < 1) \end{cases}$$

이다. $f(4) = 13$ 일 때, $f(-5)$ 의 값을 구하시오. [3점]

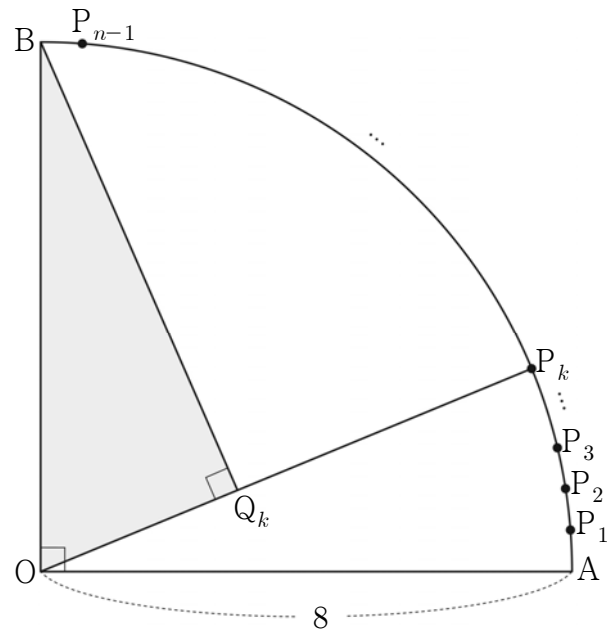
26. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 3$ 이고,

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & (a_n \text{은 짝수}) \\ \frac{a_n + 93}{2} & (a_n \text{은 홀수}) \end{cases}$$

가 성립한다. $a_k = 3$ 을 만족시키는 50 이하의 모든 자연수 k 의 값의 합을 구하시오. [4점]

27. 양수 x 에 대하여 $\log x$ 의 지표와 가수를 각각 $f(x), g(x)$ 라 하자.
 $\{f(x)\}^2 + 3g(x)$ 의 값이 3이 되도록 하는 모든 x 의 값의
 곱은 $10^{\frac{q}{p}}$ 이다. $10^{(p+q)}$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인
 자연수이다.) [4점]

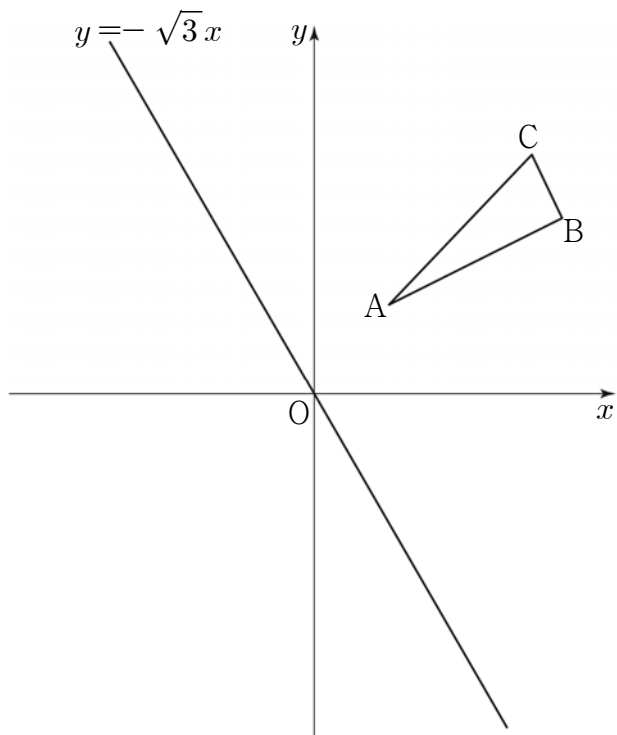
28. 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고, 반지름의 길이가 8인
 부채꼴 OAB가 있다. 2 이상의 자연수 n 에 대하여
 호 AB를 n 등분한 각 분점을 점 A에서 가까운 것부터
 차례로 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$ 이라 하자. $1 \leq k \leq n-1$ 인
 자연수 k 에 대하여 점 B에서 선분 OP_k 에 내린 수선의 발을 Q_k 라
 하고, 삼각형 OQ_kB 의 넓이를 S_k 라 하자. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k = \frac{\alpha}{\pi}$ 일 때,
 α 의 값을 구하시오. [4점]



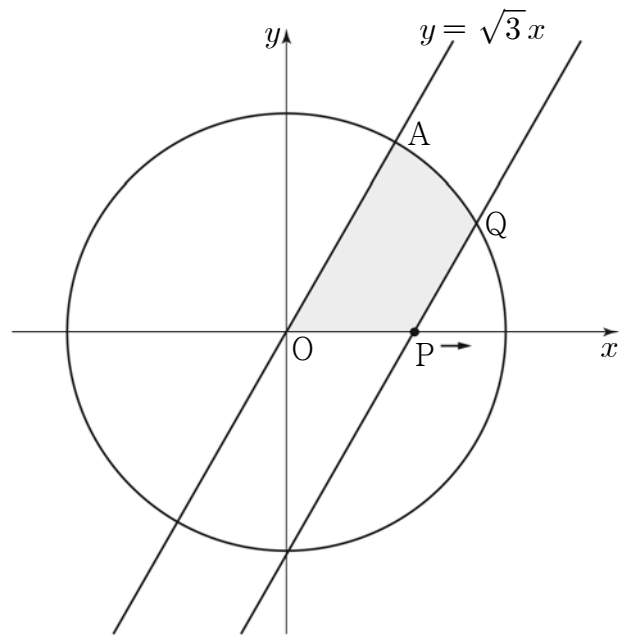
29. 그림과 같이 좌표평면 위에 세 점 $A(1, 1)$, $B(2\sqrt{3}, 2)$, $C(3, 2\sqrt{2})$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 가 있다.

행렬 $\begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{24} & -\sin \frac{n\pi}{24} \\ \sin \frac{n\pi}{24} & \cos \frac{n\pi}{24} \end{pmatrix}$ ($0 < n < 48$)로 나타내어지는

일차변환에 의하여 세 점 A, B, C 가 옮겨지는 점을 각각 A', B', C' 이라 하자. 삼각형 $A'B'C'$ 과 직선 $y = -\sqrt{3}x$ 가 만나도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오. [4점]



30. 그림과 같이 원점 O 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 10인 원이 있다. 직선 $y = \sqrt{3}x$ 와 원이 제1사분면에서 만나는 점을 A 라 하자. 점 P 는 원점 O 를 출발하여 x 축을 따라 양의 방향으로 매초 2의 일정한 속력으로 움직인다. 점 P 가 원점 O 를 출발하여 t 초가 되는 순간, 점 P 를 지나고 직선 $y = \sqrt{3}x$ 에 평행한 직선이 제1사분면에서 원과 만나는 점을 Q 라 하자. 세 선분 AO, OP, PQ 와 호 QA 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 할 때, 점 Q 의 y 좌표가 5가 되는 순간, 넓이 S 의 시간(초)에 대한 변화율을 구하시오. (단, $0 < t < 5$) [4점]



※ 확인사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.