2015학년도 4월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[A 형]

1	②	**2**	③	**3**	⑤	**4**	②	**5**	③
6	①	**7**	⑤	**8**	③	**9**	④	**10**	⑤
11	④	**12**	①	**13**	④	**14**	③	**15**	①
16	④	**17**	⑤	**18**	②	**19**	③	**20**	②
21	①	**22**	10	**23**	8	**24**	3	**25**	30
26	15	**27**	5	**28**	123	**29**	16	**30**	65

1. [출제의도] 지수법칙을 활용하여 계산하기

$4^{\frac{1}{2}}\times 8^{\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}\times(2^3)^{\frac{1}{3}}=2\times2=4$

2. [출제의도] 행렬의 실수배와 덧셈 계산하기

$A+2B=\begin{pmatrix}2&2\\0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\4&3\end{pmatrix}$

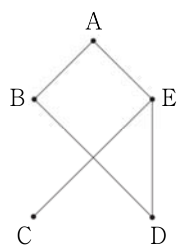
따라서 행렬 $A+2B$의 모든 성분의 합은 13

3. [출제의도] 무한수열의 극한 이해하기

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\times6^{n+1}+3}{6^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\times6+\dfrac{3}{6^n}\right)=12$

4. [출제의도] 그래프와 행렬의 관계 이해하기

그림과 같이 주어진 그래프의 꼭짓점을 A, B, C, D, E라 할 때, 그래프를 행렬로 나타내면 다음과 같다.



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}\mathrm{A}&\mathrm{B}&\mathrm{C}&\mathrm{D}&\mathrm{E}\end{matrix} \\ \begin{matrix}\mathrm{A}\\\mathrm{B}\\\mathrm{C}\\\mathrm{D}\\\mathrm{E}\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\1&0&1&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$

따라서 행렬의 성분 중 1의 개수는 10

[다른 풀이]

그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는 그래프의 변의 개수의 2배이므로 $5\times2=10$

5. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_5 27\times\log_3 5=\dfrac{\log27}{\log5}\times\dfrac{\log5}{\log3}$

$=\dfrac{3\log3}{\log5}\times\dfrac{\log5}{\log3}=3$

6. [출제의도] 지수함수 이해하기

$y=a\times2^x$에 $(0,4)$를 대입하면

$4=a\times2^0=a\times1=a$

$\therefore\ a=4$

$y=4\times2^x$에 $(b,16)$을 대입하면

$16=4\times2^b$

$\therefore\ b=2$

따라서 $a+b=4+2=6$

7. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=6$ …… ㉠

$a_4+a_6=a+3d+a+5d=2a+8d=20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a=2,\ d=2$

따라서 $a_7=2+6\times2=14$

8. [출제의도] 무한급수와 일반항 사이의 관계 이해하기

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\dfrac{3n+1}{n}\right)$이 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\dfrac{3n+1}{n}\right)=0$

$a_n-\dfrac{3n+1}{n}=b_n$이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$이고 $a_n=b_n+\dfrac{3n+1}{n}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(b_n+\dfrac{3n+1}{n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}b_n+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{n}=3$

9. [출제의도] 여러 가지 수열 이해하기

$\sum\limits_{k=2}^{m}a_{k+1}=\sum\limits_{k=2}^{m}\{2(k+1)-3\}$

$=\sum\limits_{k=2}^{m}(2k-1)$

$=\sum\limits_{k=1}^{m}(2k-1)-(2\times1-1)$

$=2\times\dfrac{m(m+1)}{2}-m-1$

$=m^2-1=48$

따라서 $m=7$

10. [출제의도] 알고리즘과 순서도를 활용하여 추론하기

n	S
1	10
2	10+9
3	10+9+8
4	10+9+8+7
5	10+9+8+7+6
6	10+9+8+7+6+5

따라서 인쇄되는 S의 값은 $10+9+8+7+6+5=45$

11. [출제의도] 함수의 우극한과 좌극한 이해하기

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)=-2$이므로 $a=-2$

$x+3=t$라 하면 $x\to-2+0$일 때, $t\to1+0$이므로

$\lim\limits_{x\to-2+0}f(x+3)=\lim\limits_{t\to1+0}f(t)=1$

12. [출제의도] 로그방정식 이해하기

(가)에서 $\log ab=2$이므로 $\log a+\log b=2$

(나)에서 $\log a\times\log b=-3$

$\log a$, $\log b$를 두 근으로 하는 이차방정식은

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$t=3$ 또는 $t=-1$

$\log a=-1,\ \log b=3$ ($\because\ a<b$)

따라서 $\log\dfrac{b}{a}=\log b-\log a=3-(-1)=4$

13. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬 이해하기

점 P_n은 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\sqrt{n}\,x$가 만나는 점이므로 $x^2=\sqrt{n}\,x$

$x=\sqrt{n}$ ($\because\ x>0$)

$\therefore\ \mathrm{P}_n(\sqrt{n},\,n)$

$\mathrm{P}_4(2,4)$에서 $a=2,\ b=4$

$\begin{pmatrix}k&2\\4&k-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지려면 행렬 $\begin{pmatrix}k&2\\4&k-2\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$k(k-2)-8=0$

$k^2-2k-8=0$

$(k-4)(k+2)=0$

$\therefore\ k=4$ 또는 $k=-2$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 -8

14. [출제의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제해결하기

점 $\mathrm{P}_n(\sqrt{n},\,n)$을 지나고 직선 $y=\sqrt{n}\,x$와 수직인 직선의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{n}}(x-\sqrt{n})+n$이므로

$\mathrm{Q}_n((n+1)\sqrt{n},\,0)$, $\mathrm{R}_n(0,\,n+1)$

$S_n=\dfrac{1}{2}\times(n+1)\sqrt{n}\times(n+1)$

따라서 $\sum\limits_{n=1}^{5}\dfrac{2S_n}{\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{5}\left\{\dfrac{2}{\sqrt{n}}\times\dfrac{(n+1)^2\sqrt{n}}{2}\right\}$

$=\sum\limits_{n=1}^{5}(n+1)^2=\sum\limits_{n=1}^{5}(n^2+2n+1)$

$=\dfrac{5\times6\times11}{6}+2\times\dfrac{5\times6}{2}+5=90$

15. [출제의도] 지수부등식 이해하기

ⅰ) $2^x-32>0$이고 $\dfrac{1}{3^x}-27>0$일 때,

$2^x>32$이므로 $x>5$

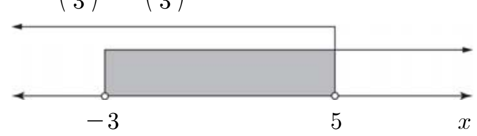
$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$이므로 $x<-3$

$\therefore$ 해가 없다.

ⅱ) $2^x-32<0$이고 $\dfrac{1}{3^x}-27<0$일 때,

$2^x<32$이므로 $x<5$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$이므로 $x>-3$



$\therefore\ -3<x<5$

ⅰ), ⅱ)에서

$-3<x<5$를 만족시키는

정수는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

따라서 개수는 7

16. [출제의도] 로그를 활용하여 문제해결하기

임피던스가 8인 스피커를 저항이 5인 접속 케이블로 연결하여 작동시켰을 때의 전송 손실은 저항이 a인 접속 케이블로 교체하여 작동시켰을 때의 전송 손실의 2배이므로

$10\log\left(1+\dfrac{2\times5}{8}\right)=2\times10\log\left(1+\dfrac{2a}{8}\right)$

$\log\dfrac{9}{4}=\log\left(1+\dfrac{2a}{8}\right)^2$

$\left(1+\dfrac{a}{4}\right)^2=\dfrac{9}{4}$

$1+\dfrac{a}{4}=\dfrac{3}{2}$ ($\because$ $a>0$)

따라서 $a=2$

17. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

$2S_n=3a_n-4n+3$ …… ㉠

에서 $n=1$일 때, $2S_1=3a_1-1$이므로

$a_1=1$

$2S_{n+1}=3a_{n+1}-4(n+1)+3$ …… ㉡

㉡ − ㉠을 하면

$2(S_{n+1}-S_n)=3a_{n+1}-3a_n-4$

$2a_{n+1}=3a_{n+1}-3a_n-4$

$a_{n+1}=3a_n+\boxed{4}$

$a_{n+1}+2=3(a_n+2)$

이다. 수열 $\{a_n+2\}$는 첫째항이 a_1+2, 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n+2=(a_1+2)\times 3^{n-1}$

일반항 a_n을 구하면

$a_n=3\times 3^{n-1}-2=\boxed{3^n-2}$ $(n\geq 1)$

이다.

$\therefore$ $p=4$, $f(n)=3^n-2$

따라서 $p+f(5)=4+(3^5-2)=245$

18. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

점 A는 곡선 $y=-x^2+6$과 직선 $y=x$가 만나는 점이므로 $-x^2+6=x$

$x=2$ ($\because$ $x>0$)

$\therefore$ $\mathrm{A}(2,2)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=2-a$

$\overline{\mathrm{PR}}=-a^2+6-a$

$$\therefore \lim_{a\to 2-0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PR}}}=\lim_{a\to 2-0}\frac{2-a}{-a^2-a+6}=\lim_{a\to 2-0}\frac{2-a}{(a+3)(2-a)}=\lim_{a\to 2-0}\frac{1}{a+3}=\frac{1}{5}$$

19. [출제의도] 행렬의 연산을 활용하여 추론하기

ㄱ. $AB+E=A^2$에서 $A(A-B)=E$이므로

$A^{-1}=A-B$

$\therefore$ A의 역행렬이 존재한다. (참)

ㄴ. $A(A-B)=(A-B)A=E$이므로

$A^2-AB=A^2-BA$

$\therefore$ $AB=BA$ (참)

ㄷ.
$$\begin{aligned}AB^3-BA^3&=(B^2-A^2)AB\\&=(B+A)(B-A)AB\\&=-(B+A)B\\&=-B^2-AB\\&=-B^2-(A^2-E)\\&=-B^2-A^2+E=6E\end{aligned}$$

$\therefore$ $A^2+B^2=-5E$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

20. [출제의도] 무한수열의 극한을 활용하여 문제해결하기

그림과 같이 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$에 내접하는 원의 중심을 $\mathrm{C}_n(r_n, r_n)$이라 하고 내접하는 원이 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 세 변과 만나는 점을 각각 D_n, E_n, F_n이라 하자.

$\triangle\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n\mathrm{C}_n \backsim \triangle\mathrm{B}_n\mathrm{OP}_n$

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n}:\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{O}}=\overline{\mathrm{F}_n\mathrm{C}_n}:\overline{\mathrm{OP}_n}$

$n+1-r_n : n+1 = r_n : \overline{\mathrm{OP}_n}$

$\overline{\mathrm{OP}_n}=\dfrac{(n+1)r_n}{n+1-r_n}$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n}=\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{E}_n}$, $\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{A}_n}=\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{A}_n}$이고

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{E}_n}+\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{A}_n}=\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{A}_n}$이므로

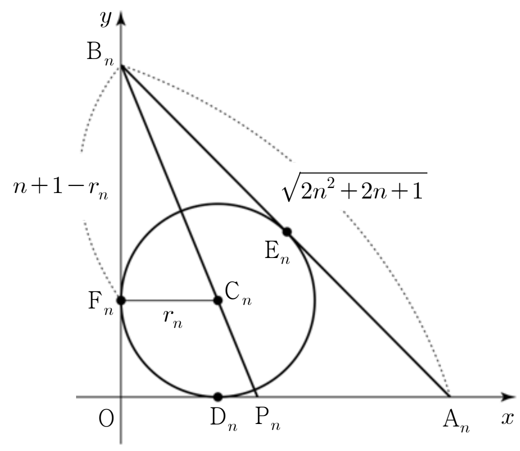
$(n+1-r_n)+(n-r_n)=\sqrt{2n^2+2n+1}$

$r_n=\dfrac{1}{2}\left(2n+1-\sqrt{2n^2+2n+1}\right)$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 계산하면

$$\overline{\mathrm{OP}_n}=\frac{(n+1)\left(2n+1-\sqrt{2n^2+2n+1}\right)}{1+\sqrt{2n^2+2n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OP}_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(2n+1-\sqrt{2n^2+2n+1}\right)}{n\left(1+\sqrt{2n^2+2n+1}\right)}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$$



21. [출제의도] 등비수열을 활용하여 추론하기

종이 ABCD를 접는 선은 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형이므로, S_1을 펼친 그림에서 접힌 모든 선들의 길이의 합은 $4\sqrt{2}$이다.

S_1을 접는 선은 한 변의 길이가 1인 정사각형이고 종이가 2겹이므로, S_2를 펼친 그림에서 새로 접힌 모든 선들의 길이의 합은 8이다.

S_2를 접는 선은 한 변의 길이가 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$인 정사각형이고 종이가 4겹이므로, S_3을 펼친 그림에서 새로 접힌 모든 선들의 길이의 합은 $8\sqrt{2}$이다.

그러므로 새로 접힌 모든 선들의 길이의 합은 첫째항이 $4\sqrt{2}$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이다.

따라서 S_n을 펼친 그림에서 접힌 모든 선들의 길이의 합 l_n은 첫째항이 $4\sqrt{2}$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열의 제n항까지의 합이다.

$$\therefore\ l_5=\frac{4\sqrt{2}\times\left\{(\sqrt{2})^5-1\right\}}{\sqrt{2}-1}=24+28\sqrt{2}$$

22. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+6)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+6)=10$$

23. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$이므로

$(A^{-1})^2=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&6\\0&1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $(A^{-1})^2$의 모든 성분의 합은 8

24. [출제의도] 지수방정식 이해하기

$2^x=t$ $(t>0)$라 하면

$t^2+8t-128=0$

$(t-8)(t+16)=0$

$\therefore$ $t=8$

따라서 $x=3$

25. [출제의도] 로그함수 그래프의 평행이동 이해하기

함수 $y=\log x$의 그래프를 x축의 방향으로 a, y축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨 그래프의 방정식은 $y=\log(x-a)+b$이다.

함수 $y=\log(x-a)+b$의 그래프는 점 $(4, b)$를 지나므로

$\log(4-a)+b=b$

$\log(4-a)=0$

$4-a=1$

$\therefore$ $a=3$

함수 $y=\log(x-3)+b$의 그래프는 점 $(13, 11)$을 지나므로

$\log 10+b=11$

$\therefore$ $b=10$

따라서 $ab=30$

26. [출제의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제해결하기

수열 $\{a_n\}$은

$a_1=36$, 계차수열의 일반항이 $2n-14$인 수열이다.

$a_n=36+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k-14)=n^2-15n+50$

$a_n=n^2-15n+50=6$

$n^2-15n+44=0$

$(n-4)(n-11)=0$

$\therefore$ $n=4$ 또는 $n=11$

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은 15

27. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제해결하기

점 A_n은 곡선 $y=\log_2 x+1$과 직선 $y=n$이 만나는 점이므로 $\log_2 x+1=n$

$x=2^{n-1}$ $\therefore$ $\mathrm{A}_n(2^{n-1}, n)$

점 B_n은 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 $y=n$이 만나는 점이므로 $\log_2 x=n$

$x=2^n$ $\therefore$ $\mathrm{B}_n(2^n, n)$

점 C_n은 곡선 $y=\log_2(x-4^n)$과 직선 $y=n$이 만나는 점이므로 $\log_2(x-4^n)=n$

$x=2^n+4^n$ $\therefore$ $\mathrm{C}_n(2^n+4^n, n)$

$S_n=\dfrac{1}{2}\times n\times\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$, $T_n=\dfrac{1}{2}\times n\times\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}$

$$\therefore\ \frac{T_n}{S_n}=\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}}{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}=\frac{2^n+4^n-2^n}{2^n-2^{n-1}}=\frac{4^n}{(2-1)\times 2^{n-1}}=2^{n+1}=64$$

따라서 $n=5$

28. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

(가)에서 $a_1=1$, $a_2=2$

(나)에서 $n\geq 3$인 자연수에 대하여

a_n은 a_{n-2}와 a_{n-1}의 합을 4로 나눈 나머지이므로

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=1$, $a_5=0$, $a_6=1$,

$a_7=1$, $a_8=2$, ⋯

$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}a_k=8$, $a_{n+6}=a_n$이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6n}a_k=8n$

$n=20$일 때, $\sum_{k=1}^{120} a_k = 160$

$a_{121}=a_1=1$, $a_{122}=a_2=2$, $a_{123}=a_3=3$

$\therefore \sum_{k=1}^{m} a_k = 160+1+2+3 = \sum_{k=1}^{120} a_k + a_{121}+a_{122}+a_{123}$

따라서 $m=123$

29. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

$\lim_{x\to 2-0} f(x)=5$, $\lim_{x\to 2+0} f(x)=-1$

$-x=t$라 하면

$x\to 2-0$일 때, $t\to -2+0$

$x\to 2+0$일 때, $t\to -2-0$이므로

$\lim_{x\to 2-0} f(-x) = \lim_{t\to -2+0} f(t) = 5$

$\lim_{x\to 2+0} f(-x) = \lim_{t\to -2-0} f(t) = 7$

함수 $f(-x)\{f(x)+k\}$가

$\lim_{x\to 2-0} f(-x)\{f(x)+k\} = 5(5+k)$,

$\lim_{x\to 2+0} f(-x)\{f(x)+k\} = 7(-1+k)$,

$f(-2)\{f(2)+k\} = 5(5+k)$

이므로 $x=2$에서 연속이 되기 위해서는

$5(5+k)=7(-1+k)$

따라서 $k=16$

30. [출제의도] 지표와 가수를 활용하여 문제해결하기

정수 $k(k\geq 0)$에 대하여

$10^k \leq x < 10^{k+1}$에서 $\log x$의 지표와 가수는

$f(x)=k$, $g(x)=\log x - k$이므로

$y=\{f(x)+1\}g(x) = (k+1)(\log x - k)$가

$y=n$과 만나는 점의 x좌표는

$(k+1)(\log x - k) = n$

$\log x = k+\frac{n}{k+1}$ (단, $n<k+1$)

$\therefore x = 10^{k+\frac{n}{k+1}}$

$n=1$일 때, $x=10^{1+\frac{1}{2}}$, $10^{2+\frac{1}{3}}$, $10^{3+\frac{1}{4}}$, $\cdots$

$\therefore a_1 = 10^{1+\frac{1}{2}}$

$n=2$일 때, $x=10^{2+\frac{2}{3}}$, $10^{3+\frac{2}{4}}$, $10^{4+\frac{2}{5}}$, $\cdots$

$\therefore a_2 = 10^{2+\frac{2}{3}}$

$n=3$일 때, $x=10^{3+\frac{3}{4}}$, $10^{4+\frac{3}{5}}$, $10^{5+\frac{3}{6}}$, $\cdots$

$\therefore a_3 = 10^{3+\frac{3}{4}}$

$\vdots$

$\therefore a_n = 10^{n+\frac{n}{n+1}}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}\left(\log a_n + \frac{1}{n+1}\right) &= \sum_{n=1}^{10}\left(\log 10^{n+\frac{n}{n+1}} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{10}(n+1) = 65\end{aligned}$$