2015학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 B형 정답

1	④	2	③	3	④	4	②	5	⑤
6	③	7	④	8	⑤	9	①	10	④
11	②	12	⑤	13	①	14	③	15	①
16	②	17	③	18	①	19	②	20	⑤
21	③	22	20	23	14	24	24	25	12
26	67	27	502	28	13	29	18	30	427

해 설

1. [출제의도] 지수를 계산하여 값을 구한다.

$4^{-\frac{3}{2}}\times 8^{\frac{5}{3}}=(2^2)^{-\frac{3}{2}}\times(2^3)^{\frac{5}{3}}$

$\quad =2^{-3}\times 2^5=2^2=4$

2. [출제의도] 행렬의 곱을 계산하여 성분의 합을 구한다.

$AB=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$

따라서 행렬 AB의 모든 성분의 합은

$1+2+2+4=9$

3. [출제의도] 지수함수의 극한값을 계산한다.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{4x}\times 4$

$\quad =1\times 4=4$

4. [출제의도] 무리방정식의 모든 실근의 곱을 계산한다.

$\sqrt{x^2-4x}=x^2-4x-2 \quad \cdots$ ㉠

$\sqrt{x^2-4x}=t\,(t\ge 0)$이라 하면

주어진 식은

$t=t^2-2$

$t^2-t-2=0$

$(t-2)(t+1)=0$

$t=2$ 또는 $t=-1$

이때 $t\ge 0$이므로 $t=2$

즉, $\sqrt{x^2-4x}=2$

양변을 제곱하면

$x^2-4x=4$

방정식 $x^2-4x-4=0$의 두 근이 ㉠을 만족시키므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

모든 실근의 곱은 -4이다.

5. [출제의도] 행렬과 연립방정식의 해 사이의 관계를 이해하고 상수의 값을 구한다.

$\begin{pmatrix}a&0\\1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}a&0\\1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a&-1\\1&a+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

x, y에 대한 연립방정식이

$x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지므로

행렬 $\begin{pmatrix}a&-1\\1&a+2\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는다.

$a(a+2)-(-1)\times 1=0$

$(a+1)^2=0$

따라서 $a=-1$

6. [출제의도] 로그의 성질을 이해하고 식의 값을 구한다.

$2^x=24$이므로

$x=\log_2 24=\log_2(2^3\times 3)=3+\log_2 3$

따라서 $x-3=\log_2 3$

$3^y=24$이므로

$y=\log_3 24=\log_3(3\times 8)=1+\log_3 8$

따라서 $y-1=\log_3 8$

그러므로 $(x-3)(y-1)$의 값은

$(x-3)(y-1)=\log_2 3\log_3 8$

$\quad =\log_2 3\times\dfrac{\log_2 8}{\log_2 3}$

$\quad =\log_2 8=3$

7. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이해하고 삼각방정식의 모든 해의 합을 구한다.

$\sin 2x=\cos x$

$2\sin x\cos x=\cos x$

$(2\sin x-1)\cos x=0$

이므로 $\sin x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos x=0$

ⅰ) $\sin x=\dfrac{1}{2}$일 때

$\quad 0\le x\le 2\pi$이므로 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$

ⅱ) $\cos x=0$일 때

$\quad 0\le x\le 2\pi$이므로 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 모든 해의 합은

$\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{2}\pi=3\pi$

8. [출제의도] 무한급수와 일반항 사이의 관계를 이해하고 극한값을 구한다.

$b_n=a_n-\dfrac{5n^2+1}{2n+3}$이라 하면

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=4$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

$a_n=b_n+\dfrac{5n^2+1}{2n+3}$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2b_n}{n+1}+\dfrac{2(5n^2+1)}{(2n+3)(n+1)}\right)$

$\quad =\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2b_n}{n+1}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(5n^2+1)}{(2n+3)(n+1)}$

$\quad =0+5=5$

[참고]

문제의 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$의 여러 예 중 하나는 $a_n=\dfrac{5n^2+1}{2n+3}+\dfrac{4}{2^n}$이다.

9. [출제의도] 등차수열의 일반항을 이해하고 등차수열의 합이 최대가 되는 항을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=26$

$a_9=a+8d=8$

$6d=-18$이므로 $d=-3$, $a=32$

따라서 $a_n=32-3(n-1)=-3n+35$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 최대가 되도록 하는 자연수 n은 $a_n=-3n+35>0$을 만족시켜야 하므로 $n<\dfrac{35}{3}$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 11이다.

[다른 풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$d=-3$, $a=32$

이므로

$S_n=\dfrac{n\{64+(n-1)(-3)\}}{2}$

$\quad =-\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{67}{2}n$

$\quad =-\dfrac{3}{2}\left(n-\dfrac{67}{6}\right)^2+\dfrac{67^2}{24}$

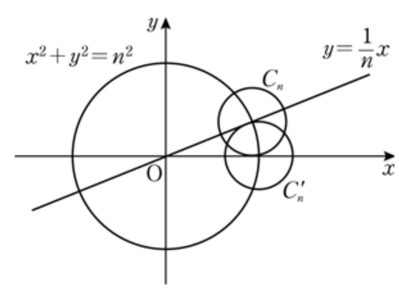
따라서 $\dfrac{67}{6}$에 가장 가까운 자연수는 11이므로

$n=11$일 때 S_n은 최댓값을 갖는다.

10. [출제의도] 원과 직선 사이의 관계를 이용하여 극한값 구하는 문제를 해결한다.

원 $x^2+y^2=n^2$과 직선 $y=\dfrac{1}{n}x$가 제1사분면에서 만나는 점을 중심으로 하고 x축에 접하는 원을 C_n이라 하자.

원 C_n의 넓이 S_n은 그림과 같이 원 $x^2+y^2=n^2$과 x축의 교점 $(n,0)$을 중심으로 하고 직선 $y=\dfrac{1}{n}x$에 접하는 원 C_n'의 넓이 S_n'과 같다.



원 C_n'의 반지름의 길이를 r_n이라 하면 r_n은 점 $(n,0)$과 직선 $y=\dfrac{1}{n}x$ 사이의 거리와 같으므로

$r_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

따라서 $S_n=S_n'=(r_n)^2\pi=\dfrac{n^2}{n^2+1}\pi$

이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}\pi=\pi$

[다른 풀이 1]

원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하면 원 C_n의 중심의 y좌표는 원 C_n의 반지름의 길이 r_n과 같고, 직선의 기울기가 $\dfrac{1}{n}$이므로 원 C_n의 중심의 x좌표는 nr_n이다.

원점에서 원 C_n의 중심까지의 거리가 n이므로

$(nr_n)^2+(r_n)^2=n^2$

$(n^2+1)(r_n)^2=n^2$

$(r_n)^2=\dfrac{n^2}{n^2+1}$

따라서 $S_n=\pi(r_n)^2=\dfrac{n^2}{n^2+1}\pi$

이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\pi$

[다른 풀이 2]

원 $x^2+y^2=n^2$과 직선 $y=\dfrac{1}{n}x$의 교점의 y좌표가 원 C_n의 반지름의 길이이므로

$x^2+y^2=n^2$에 $x=ny$를 대입하면

$(ny)^2+y^2=n^2$

$(n^2+1)y^2=n^2$

$y^2=\dfrac{n^2}{n^2+1}$이므로 원의 넓이 S_n은

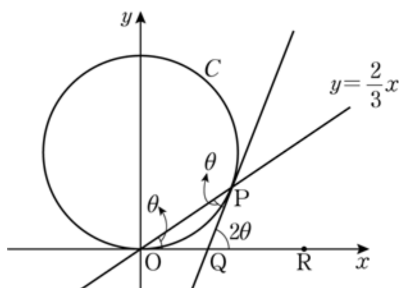
$S_n=\pi y^2=\dfrac{n^2}{n^2+1}\pi$

이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\pi$

11. A형 15번과 동일

12. **[출제의도] 삼각함수의 배각공식을 이용하여 원의 접선의 기울기를 구하는 문제를 해결한다.**

원 C 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하고, 그림과 같이 x축에 점 R를 잡자.
(단, 점 R의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 크다.)
점 Q에서 원 C에 그은 두 접선 OQ, PQ에 대하여 $\overline{OQ}=\overline{PQ}$이므로 $\angle POQ=\theta$라 하면
$\angle POQ=\angle QPO=\theta$이고 $\angle PQR=2\theta$이다.



이때 $\tan\theta=\frac{2}{3}$이므로 원 C 위의 점 P에서의 접선 PQ의 기울기는

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$
$$=\frac{2\times\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{12}{5}$$

13. **[출제의도] 지수함수의 그래프를 이해하여 지수함수의 밑을 구한다.**

곡선 $y=a^x$이 y축과 만나는 점 A의 좌표는 (0, 1)이고, 점 B의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같으므로 1이다.

$\log_2\left(x+\frac{1}{2}\right)=1$, $x=\frac{3}{2}$

따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$이다.

점 C의 x좌표는 점 B의 x좌표와 같으므로

점 C의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, a^{\frac{3}{2}}\right)$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\left(a^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{21}{4}$

그러므로 $a^{\frac{3}{2}}=8$에서 $a=4$이다.

14. **[출제의도] 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 이용하여 문제를 해결한다.**

$g(x)=a^x$에 대하여 $g'(x)=a^x\ln a$이므로

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 C$\left(\frac{3}{2}, a^{\frac{3}{2}}\right)$에서 이 곡선에 접하는 직선의 방정식은

$y-a^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}\ln a\left(x-\frac{3}{2}\right)$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$-a^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}\ln a\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$x-\frac{3}{2}=-\frac{1}{\ln a}$

$x=\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln a}$

따라서 점 D의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln a}, 0\right)$ … ㉠

조건에서 $\overline{AD}=\overline{BD}$이므로

점 D는 두 점 A(0, 1), B$\left(\frac{3}{2}, 1\right)$에 대하여 선분 AB의 수직이등분선과 x축의 교점이다.

그러므로 점 D의 좌표는 $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$이다.

㉠에서 $\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln a}=\frac{3}{4}$이므로

$\frac{1}{\ln a}=\frac{3}{4}$, $\ln a=\frac{4}{3}$, $a=e^{\frac{4}{3}}$

따라서 $g(x)=e^{\frac{4}{3}x}$이므로 $g(2)=e^{\frac{8}{3}}$이다.

[참고]

A(0, 1), B$\left(\frac{3}{2}, 1\right)$, D$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln a}, 0\right)$에 대하여

$\overline{AD}^2=\overline{BD}^2$이므로

$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln a}\right)^2+1^2=\left(\frac{1}{\ln a}\right)^2+1^2$

$\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}$

$\frac{1}{\ln a}=\frac{3}{4}$, $\ln a=\frac{4}{3}$, $a=e^{\frac{4}{3}}$

따라서 $g(x)=e^{\frac{4}{3}x}$이므로

$g(2)=e^{\frac{8}{3}}$

15. A형 17번과 동일

16. A형 19번과 동일

17. A형 20번과 동일

18. **[출제의도] 다항함수의 그래프를 이용하여 분수방정식 문제를 해결한다.**

$$\frac{\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2}{x^2-4}$$
$$=\frac{\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}}{(x+2)(x-2)}=0 \ \cdots \ ㉠$$

이므로 구하는 근은
방정식 $f(x)=g(x)$ 또는 $f(x)=-g(x)$의 근이다.
(단, $x\neq 2$, $x\neq -2$)

ⅰ) $f(x)=g(x)$일 때
방정식 $f(x)=g(x)$의 근은 -5, -2, 1, 4
이므로 이 중에서 분수방정식 ㉠의 근은
무연근 -2를 제외한 -5, 1, 4이다.

ⅱ) $f(x)=-g(x)$일 때
함수 $f(x)$가 원점에 대하여 대칭이므로
$f(x)=-f(-x)$이고,
함수 $g(x)$가 y축에 대하여 대칭이므로
$g(x)=g(-x)$이다.
따라서 $f(x)=-g(x)$는 $f(-x)=g(-x)$이다.
방정식 $f(-x)=g(-x)$의 근은 5, 2, -1, -4
이므로 이 중에서 분수방정식 ㉠의 근은
무연근 2를 제외한 5, -1, -4이다.

ⅰ), ⅱ)에 의하여

분수방정식 $\frac{\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2}{x^2-4}=0$의 근은

-5, -4, -1, 1, 4, 5이다.

따라서 모든 근의 곱은 -400이다.

19. **[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항 구하는 과정을 증명한다.**

주어진 식에서 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n+1}=a_{2n}-2a_{2n-1}$ … ㉠
$a_{2n+2}=6a_{2n+1}-a_{2n}$ … ㉡
$a_{2n+3}=a_{2n+2}-2a_{2n+1}$ … ㉢

이므로 ㉠, ㉡, ㉢을 연립하면

$$a_{2n+3}=a_{2n+2}-2a_{2n+1}$$
$$=(6a_{2n+1}-a_{2n})-2a_{2n+1}$$
$$=4a_{2n+1}-(a_{2n+1}+2a_{2n-1})$$
$$=3a_{2n+1}-2a_{2n-1}$$

이다. 즉,

$$a_{2n+3}-a_{2n+1}=2(a_{2n+1}-a_{2n-1})$$
$$=2^n(a_3-a_1)$$

이고, ㉠에서 $a_3=a_2-2a_1=3$이므로 $a_3-a_1=2$

따라서

$a_{2n+1}-a_{2n-1}=2^n$ $(n\geq 1)$

$$a_{2n-1}=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k$$
$$=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$$
$$=2^n-1 \ (n\geq 2)$$

이고, $a_1=1$이므로

$a_{2n-1}=2^n-1 (n\geq 1)$

㉠으로부터

$a_{2n}=a_{2n+1}+2a_{2n-1}$

이므로

$$a_{2n}=(2^{n+1}-1)+2(2^n-1)$$
$$=2^{n+2}-3 \ (n\geq 1)$$

이다.

즉, 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n-1}=2^n-1$, $a_{2n}=2^{n+2}-3$

이다.

(가)에 알맞은 식은 2^n이므로 $f(n)=2^n$

(나)에 알맞은 식은 2^n-1이므로 $g(n)=2^n-1$

(다)에 알맞은 식은 $2^{n+2}-3$이므로 $h(n)=2^{n+2}-3$

따라서

$$\frac{f(5)g(10)}{h(10)-1}=\frac{2^5(2^{10}-1)}{(2^{12}-3)-1}=\frac{2^5(2^{10}-1)}{2^2(2^{10}-1)}=8$$

20. **[출제의도] 미분법을 이용하여 삼각형의 넓이의 최댓값 구하는 문제를 해결한다.**

점 P의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이므로

삼각형 OQP의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 2\cos\theta\times\sin\theta=\sin\theta\cos\theta$$
$$=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

점 R의 좌표는 $\left(2\cos\frac{1}{2}\theta, -2\sin\frac{1}{2}\theta\right)$이므로

삼각형 ORS의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 4\cos\frac{1}{2}\theta\times 2\sin\frac{1}{2}\theta=4\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$$
$$=2\sin\theta$$

따라서 삼각형 OQP와 삼각형 ORS의 넓이의 합을 $f(\theta)$라 하면

$f(\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta+2\sin\theta$

$$f'(\theta)=\cos 2\theta+2\cos\theta$$
$$=2\cos^2\theta+2\cos\theta-1$$

이므로

$f'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta>0$이므로

$\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

$f'(\theta)=0$인 θ의 값을 $\theta_1\left(0<\theta_1<\frac{\pi}{2}\right)$라 할 때,

$f(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	θ_1	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗	$f(\theta_1)$	↘	

그러므로 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_1$에서 극대이면서 최대이다.

따라서 $f(\theta)$가 최대가 되도록 하는 θ에 대하여

$\cos\theta$의 값은 $\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ 이다.

21. [출제의도] 함수의 연속성을 이해하여 합성함수의 연속성을 추론한다.

ㄱ. 함수 $g(x)$는 $x<-\dfrac{\pi}{2}$ 에서 0이므로

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}-0} g(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}-0} 0=0$ (참)

ㄴ. $a=2$이므로 $f(x)=\sin^2 x+2\cos x$ 이다.

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

임의의 실수 α에 대하여

$\lim\limits_{x\to\alpha-0} f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha+0} f(x)=f(\alpha)$를 만족한다.

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}-0}(f\circ g)(x)=f(0)$$
$$=\sin^2 0+2\cos 0$$
$$=2$$
$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} f(x)$$
$$=\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=1$$
$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}-0}(f\circ g)(x)\neq\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0}(f\circ g)(x)$$

이므로 합성함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to\pi-0}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to\pi-0} f(x)$

$=\sin^2\pi+a\cos\pi=-a$

$\lim\limits_{x\to\pi+0}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to\pi+0} f(bx)$

$=\sin^2 b\pi+a\cos b\pi$

$(f\circ g)(\pi)=f(b\pi)=\sin^2 b\pi+a\cos b\pi$

합성함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=\pi$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to\pi-0}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to\pi+0}(f\circ g)(x)$

$=(f\circ g)(\pi)$

그러므로

$\sin^2 b\pi+a\cos b\pi=-a$

$1-\cos^2 b\pi+a\cos b\pi+a=0$

$1-\cos^2 b\pi+a(1+\cos b\pi)=0$ ⋯ ㉠

㉠이 a에 대한 항등식이므로

$1-\cos^2 b\pi=0$이고 $\cos b\pi+1=0$이다.

$\cos b\pi=-1$이므로

$b\pi=(2n-1)\pi$ (n은 정수)

$b=2n-1$ (n은 정수) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

22. [출제의도] 초월함수의 미분계수를 계산한다.

$f(x)=20x^2\ln x$에서

$f'(x)=40x\ln x+20x^2\times\dfrac{1}{x}$

$=40x\ln x+20x$

이므로 $f'(1)=20$

23. [출제의도] 그래프를 이해하여 행렬의 모든 성분의 합을 구한다.

변의 개수가 n인 그래프를 행렬로 나타내었을 때, 행렬의 모든 성분의 합은 $2n$이다.

주어진 그래프의 변의 개수가 7이므로

구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$2\times7=14$

24. [출제의도] 삼각함수의 합성을 이해하여 최댓값을 구한다.

$y=2\sin x+\cos x-1$

$=\sqrt{5}\sin(x+\theta)-1$

$\left(\text{단, } \sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

주어진 함수가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가지므로

$\alpha+\theta=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$\alpha=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로

$$30\sin2\alpha=30\sin2\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=30\sin(4n\pi+\pi-2\theta)$$
$$=30\sin2\theta$$
$$=60\sin\theta\cos\theta$$
$$=60\times\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=24$$

25. [출제의도] 분수부등식을 이해하여 조건을 만족시키는 실수의 최솟값을 구한다.

ⅰ) $\dfrac{(x-4)(x-7)}{x-9}\geq0$

양변에 $(x-9)^2$을 곱하면

$(x-4)(x-7)(x-9)\geq0,\ x\neq9$

이므로 $4\leq x\leq7$ 또는 $x>9$

ⅱ) $\dfrac{x-k}{x-2}\leq0$

양변에 $(x-2)^2$을 곱하면

$(x-k)(x-2)\leq0,\ x\neq2$

따라서 부등식의 해는

$k<2$인 경우 $k\leq x<2$,

$k=2$인 경우 해가 없고,

$k>2$인 경우 $2<x\leq k$이다.

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 7이므로 ⅱ)의 해는 $2<x\leq k$이고, $k>9$이다.

ⅰ), ⅱ)에 의하여 주어진 연립부등식의 해는

$4\leq x\leq7$ 또는 $9<x\leq k$

이때 정수 x의 개수가 7이므로 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12가 포함되어야 한다.

따라서 $12\leq k<13$이므로 실수 k의 최솟값은 12이다.

26. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수를 이해하고 가수의 합을 구한다.

ⅰ) $1\leq k\leq3$일 때, $1\leq2^k<10$이므로

$\log2^k$의 지표는 0이고,

$f(2^k)=\log2^k=k\log2$

ⅱ) $4\leq k\leq6$일 때, $10\leq2^k<10^2$이므로

$\log2^k$의 지표는 1이고,

$f(2^k)=\log2^k-1=k\log2-1$

ⅲ) $7\leq k\leq9$일 때, $10^2\leq2^k<10^3$이므로

$\log2^k$의 지표는 2이고,

$f(2^k)=\log2^k-2=k\log2-2$

ⅳ) $k=10$일 때, $10^3\leq2^k<10^4$이므로

$\log2^k$의 지표는 3이고,

$f(2^k)=\log2^k-3=k\log2-3$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}f(2^k)=\sum_{k=1}^{10}k\log2-(1\times3+2\times3+3\times1)$$
$$=55\log2-12$$

이므로 $m=55,\ n=12$

따라서 $m+n=67$

27. [출제의도] 등비수열과 등비수열의 합의 관계를 이해하고 수열의 합을 구한다.

모든 항이 양의 실수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 $r\,(r>0)$이라 하면

$S_3=7a_3$에서 $a+ar+ar^2=7ar^2$

$a>0$이므로

$1+r+r^2=7r^2$

$6r^2-r-1=0$

$(3r+1)(2r-1)=0$

$r>0$이므로 $r=\dfrac{1}{2}$

따라서

$a_n=a\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$S_n=\frac{a\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2a\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{8}\frac{2a\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{a\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{8}(2^n-1)$$
$$=\frac{2(2^8-1)}{2-1}-8=502$$

[다른 풀이]

모든 항이 양의 실수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 $r\,(r>0)$이라 하면

ⅰ) $r=1$일 때

$S_3=7a_3$에서 $a+a+a=7a$

$4a=0$에서 $a=0$

$a>0$이므로 조건을 만족하지 않는다.

ⅱ) $r\neq1$일 때

$S_3=7a_3$에서 $\dfrac{a(1-r^3)}{1-r}=7ar^2$

$\dfrac{a(1-r)(1+r+r^2)}{1-r}=7ar^2$

$r\neq1$이므로 $a(1+r+r^2)=7ar^2$

$a>0$이므로

$1+r+r^2=7r^2$

$6r^2-r-1=0$

$(3r+1)(2r-1)=0$

$r>0$이므로 $r=\dfrac{1}{2}$

따라서 $\sum\limits_{n=1}^{8}\dfrac{S_n}{a_n}=502$

28. [출제의도] 함수의 대칭성을 이용하여 미분가능성 문제를 해결한다.

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 직선 $x=k$에 대하여 대칭인 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $x=k$에서 미분가능하면 된다.

$$\lim_{x\to k-0}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k-0}\frac{f(2k-x)-f(k)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k-0}\left[\frac{\{(2k-x)^3-(2k-x)^2-9(2k-x)+1\}}{x-k}-\frac{(k^3-k^2-9k+1)}{x-k}\right]$$
$$=\lim_{x\to k-0}\left[(k-x)\times\frac{\{(2k-x)^2+k(2k-x)+k^2-(3k-x)-9\}}{x-k}\right]$$
$$=-3k^2+2k+9$$

또, $\lim\limits_{x\to k+0}\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}$

$$=\lim_{x\to k+0}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k+0}\frac{(x^3-x^2-9x+1)-(k^3-k^2-9k+1)}{x-k}$$

$= \lim_{x \to k+0} \dfrac{(x-k)\{x^2+kx+k^2-(x+k)-9\}}{x-k}$

$= 3k^2-2k-9$

$\lim_{x \to k-0} \dfrac{g(x)-g(k)}{x-k} = \lim_{x \to k+0} \dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}$

이므로

$-3k^2+2k+9 = 3k^2-2k-9$

$3k^2-2k-9=0$

그러므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 $\dfrac{2}{3}$이다.

따라서 $p=3$, $q=2$이므로 $p^2+q^2=13$이다.

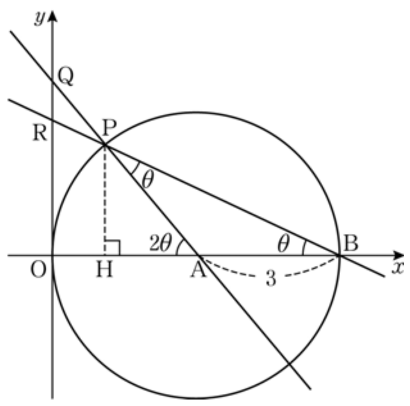
[참고]

함수 $y=f(2k-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=k$에 대하여 대칭이다. 따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=k$에 대하여 대칭이고, 함수 $y=g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $f'(k)=0$이어야 한다.

29. **[출제의도] 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한 문제를 해결한다.**

$\angle \mathrm{PBO} = \theta$이므로 $\angle \mathrm{PAO} = 2\theta$이다.

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=3$, $\overline{\mathrm{AH}}=3\cos 2\theta$, $\overline{\mathrm{HO}}=3-3\cos 2\theta$이다.



$\overline{\mathrm{OA}}=3$, $\angle \mathrm{PAO}=2\theta$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}} = 3\tan 2\theta$

$\overline{\mathrm{OB}}=6$, $\angle \mathrm{PBO}=\theta$이므로

$\overline{\mathrm{OR}} = 6\tan\theta$

$\overline{\mathrm{RQ}} = \overline{\mathrm{OQ}} - \overline{\mathrm{OR}}$

$\quad = 3\tan 2\theta - 6\tan\theta$

$\overline{\mathrm{HO}} = 3-3\cos 2\theta$이므로

$S(\theta) = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{RQ}} \times \overline{\mathrm{HO}}$

$\quad = \dfrac{1}{2}(3\tan 2\theta - 6\tan\theta)(3-3\cos 2\theta)$

$\quad = \dfrac{9}{2}(\tan 2\theta - 2\tan\theta)(1-\cos 2\theta)$

$\quad = 9\left(\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} - 2\tan\theta\right)\sin^2\theta$

$\quad = \dfrac{18\tan^3\theta\sin^2\theta}{1-\tan^2\theta}$

따라서

$\lim_{\theta \to +0} \dfrac{S(\theta)}{\theta^5} = \lim_{\theta \to +0} \dfrac{18\tan^3\theta\sin^2\theta}{\theta^5(1-\tan^2\theta)}$

$\quad = \lim_{\theta \to +0}\left(\dfrac{18}{1-\tan^2\theta} \times \dfrac{\tan^3\theta}{\theta^3} \times \dfrac{\sin^2\theta}{\theta^2}\right)$

$\quad = 18 \times 1 \times 1 = 18$

[다른 풀이]

$\triangle \mathrm{PAH} \backsim \triangle \mathrm{QAO}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{AH}} : \overline{\mathrm{HO}}$

$3 : \overline{\mathrm{PQ}} = 3\cos 2\theta : 3-3\cos 2\theta$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}} = \dfrac{3(3-3\cos 2\theta)}{3\cos 2\theta}$

또, $\triangle \mathrm{PBH} \backsim \triangle \mathrm{RBO}$이므로

$\overline{\mathrm{BP}} : \overline{\mathrm{PR}} = \overline{\mathrm{BH}} : \overline{\mathrm{HO}}$

$6\cos\theta : \overline{\mathrm{PR}} = 3+3\cos 2\theta : 3-3\cos 2\theta$이므로

$\overline{\mathrm{PR}} = \dfrac{6\cos\theta(3-3\cos 2\theta)}{3+3\cos 2\theta}$

$\angle \mathrm{QPR} = \angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{PBA} = \theta$이므로

$S(\theta) = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{PR}} \times \overline{\mathrm{PQ}} \times \sin\theta$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{6\cos\theta(3-3\cos 2\theta)}{(3+3\cos 2\theta)} \times \dfrac{3(3-3\cos 2\theta)}{3\cos 2\theta} \times \sin\theta$

$= \dfrac{9\cos\theta(1-\cos 2\theta)^2\sin\theta}{(1+\cos 2\theta)\cos 2\theta}$

$= \dfrac{9\cos\theta\,(2\sin^2\theta)^2\sin\theta}{(1+\cos 2\theta)\cos 2\theta}$

$= \dfrac{36\cos\theta\sin^5\theta}{(1+\cos 2\theta)\cos 2\theta}$

따라서

$\lim_{\theta \to +0} \dfrac{S(\theta)}{\theta^5} = \lim_{\theta \to +0} \dfrac{36\cos\theta\sin^5\theta}{\theta^5(1+\cos 2\theta)\cos 2\theta}$

$= \lim_{\theta \to +0}\left\{\dfrac{36\cos\theta}{(1+\cos 2\theta)\cos 2\theta} \times \dfrac{\sin^5\theta}{\theta^5}\right\}$

$= \dfrac{36}{2 \times 1} \times 1$

$= 18$

30. **[출제의도] 주어진 함수의 그래프와 조건을 이해하여 수열의 합을 추측한다.**

닫힌 구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $g(x) = x + f(x)$는

$g(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x < 1) \\ 2x-1 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$

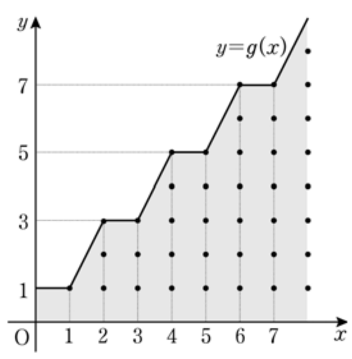
이고, 모든 실수 x에 대하여

$g(x+2) = (x+2) + f(x+2)$

$\qquad = x+2+f(x)$

$\qquad = g(x)+2$

이므로 제1사분면에서 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 a, b는 자연수이므로 순서쌍 (a, b)는 그림에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점으로 나타내어진다. 또, $a=n$일 때 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는 $g(n)$과 같다. 따라서

$a_1 = g(1)+g(2)+g(3) = 1+3+3 = 7$,

$a_2 = g(2)+g(3)+g(4) = 3+3+5 = 11$,

$a_3 = g(3)+g(4)+g(5) = 3+5+5 = 13$,

$a_4 = g(4)+g(5)+g(6) = 5+5+7 = 17$,

$a_5 = g(5)+g(6)+g(7) = 5+7+7 = 19$,

$a_6 = g(6)+g(7)+g(8) = 7+7+9 = 23$,

$a_7 = g(7)+g(8)+g(9) = 7+9+9 = 25$,

$a_8 = g(8)+g(9)+g(10) = 9+9+11 = 29$

$\vdots$

여기서

$a_3 - a_1 = a_5 - a_3 = a_7 - a_5 = \cdots = 6$,

$a_4 - a_2 = a_6 - a_4 = a_8 - a_6 = \cdots = 6$

이므로

자연수 n에 대하여 a_{2n-1}과 a_{2n}을 추론하면

$a_{2n-1} = a_1 + 6(n-1) = 7 + 6(n-1) = 6n+1$

$a_{2n} = a_2 + 6(n-1) = 11 + 6(n-1) = 6n+5$

따라서

$\sum_{n=1}^{15} a_n = \sum_{n=1}^{8} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{7} a_{2n}$

$\quad = \sum_{n=1}^{8}(6n+1) + \sum_{n=1}^{7}(6n+5)$

$\quad = \left(6 \times \dfrac{8 \times 9}{2} + 1 \times 8\right) + \left(6 \times \dfrac{7 \times 8}{2} + 5 \times 7\right)$

$\quad = 427$