2016학년도 대학수학능력시험 대비

2015학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 A형 정답

1	⑤	2	①	3	②	4	⑤	5	②
6	③	7	④	8	⑤	9	③	10	⑤
11	④	12	①	13	④	14	③	15	②
16	④	17	①	18	③	19	②	20	③
21	①	22	17	23	99	24	252	25	502
26	25	27	20	28	15	29	30	30	184

해 설

1. [출제의도] 지수를 계산하여 값을 구한다.

$3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=3\times(3^{-1})^{-2}=3\times3^2=27$

2. [출제의도] 행렬의 연산법칙을 이용하여 두 행렬의 합과 실수배를 계산한다.

$A+2B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}4 & -3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & -6\\ 0 & -4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}7 & -4\\ 3 & -5\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 1이다.

[다른 풀이]

(행렬 $A+2B$의 모든 성분의 합)

= (행렬 A의 모든 성분의 합)

+ 2×(행렬 B의 모든 성분의 합)

= $3+2\times(-1)=1$

3. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n-1}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{8-0}{\sqrt{1+0}}=8$$

4. [출제의도] 그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성질을 이해하여 성분의 값을 구한다.

(행렬의 성분 중 1의 개수)

=2×(그래프의 변의 개수)

$=2\times13=26$

5. [출제의도] 무한등비수열의 성질을 이해하고 극한값을 구한다.

$a>b>0$이므로 $0<\frac{b}{a}<1$에서 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a^n}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=\frac{2}{1+0}=2$$

6. [출제의도] 등차수열의 성질을 이해하고 주어진 항의 값을 구한다.

$a_n=a+(n-1)d$ ($a_1=a$, d: 공차)에서

$a_4=a+3d=9$, $a_7=a+6d=21$이므로

위의 두 식을 연립하면 $d=4$

$a_8=a_4+4d$이고 $a_3=a_4-d$이므로

$a_3+a_8=2a_4+3d$

$=2\times9+3\times4=30$

[다른 풀이 1]

$d=4$이므로 $a_4=a+12=9$, $a=-3$

$a_n=-3+(n-1)\times4=4n-7$

$a_3=5$, $a_8=25$

$a_3+a_8=30$

[다른 풀이 2]

a_4는 제4항이고, a_7은 제7항이다.

또, a_3은 제3항이고, a_8은 제8항이다.

$4+7=3+8$이므로 $a_4+a_7=a_3+a_8$

따라서 $a_3+a_8=9+21=30$

7. [출제의도] 지수법칙과 거듭제곱근을 이해하여 식의 값을 구한다.

$2^a=3$이므로 이 식을 $3^b=\sqrt{2}$에 대입하면

$(2^a)^b=\sqrt{2}$

이 식을 정리하면 $2^{ab}=2^{\frac{1}{2}}$이므로 $ab=\frac{1}{2}$

[다른 풀이 1]

로그의 정의에 의해

$a=\log_2 3$, $b=\log_3\sqrt{2}$

따라서 $ab=\log_2 3\cdot\log_3\sqrt{2}=\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$

[다른 풀이 2]

주어진 식의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$a\log_3 2=1$, $b=\frac{1}{2}\log_3 2$

$a=\frac{1}{\log_3 2}$

따라서 $ab=\frac{1}{\log_3 2}\cdot\frac{1}{2}\log_3 2=\frac{1}{2}$

8. [출제의도] 무한급수와 일반항의 관계를 이해하고 이를 활용하여 극한값을 구한다.

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3}{a_n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\frac{5n}{n+1}+\frac{5n}{n+1}+3}{a_n-\frac{5n}{n+1}+\frac{5n}{n+1}-1}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}+\lim_{n\to\infty}3}{\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}-\lim_{n\to\infty}1}$$

$=\frac{0+5+3}{0+5-1}=2$

[다른 풀이]

$b_n=a_n-\frac{5n}{n+1}$이라 하자.

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$a_n=b_n+\frac{5n}{n+1}$이고, $\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}=5$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\frac{5n}{n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}=0+5=5$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3}{a_n-1}=\frac{\lim_{n\to\infty}(a_n+3)}{\lim_{n\to\infty}(a_n-1)}=\frac{5+3}{5-1}=2$$

9. [출제의도] 행렬의 성질을 이해하여 역행렬의 성분의 합을 구한다.

$A^2-A=3E$, $A^2-A-2E=E$

$(A-2E)(A+E)=E$이므로

역행렬의 정의에 의해 $(A-2E)^{-1}=A+E$

$A=\begin{pmatrix}-12 & -a\\ a & 13\end{pmatrix}$이므로

$A+E=\begin{pmatrix}-12 & -a\\ a & 13\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & -a\\ a & 14\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 3이다.

[다른 풀이]

$A^2-A=3E$, $A(A-E)=3E$이므로

$A^{-1}=\frac{1}{3}(A-E)$

$A^{-1}=\frac{1}{a^2-12\cdot13}\begin{pmatrix}13 & a\\ -a & -12\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-13 & -a\\ a & 12\end{pmatrix}$

$a^2-156=-3$, $a^2=153$

$A-2E=\begin{pmatrix}-14 & -a\\ a & 11\end{pmatrix}$

$(A-2E)^{-1}=\frac{1}{a^2-14\cdot11}\begin{pmatrix}11 & a\\ -a & -14\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{153-154}\begin{pmatrix}11 & a\\ -a & -14\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-11 & -a\\ a & 14\end{pmatrix}$

따라서 $A-2E$의 역행렬의 모든 성분의 합은 3이다.

10. [출제의도] 지수함수의 그래프의 성질을 이해하고 내분점을 이용하여 좌표를 구한다.

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 D, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 E라 하자.

점 $\mathrm{A}\left(-1,\ \frac{1}{3}\right)$이므로 점 $\mathrm{D}(-1,\ 0)$이다.

y축 위의 점 C에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{CB}}=1:2$이므로 $\overline{\mathrm{DO}}:\overline{\mathrm{OE}}=1:2$가 되어 점 $\mathrm{E}(2,\ 0)$이다.

따라서 점 B의 y좌표는 9이다.

[다른 풀이]

점 $\mathrm{A}\left(-1,\ \frac{1}{3}\right)$이고 점 B의 x좌표를 b라 놓으면 점 $\mathrm{B}(b,\ 3^b)$이다.

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 $\mathrm{C}\left(\frac{b-2}{3},\ \frac{3^b+\frac{2}{3}}{3}\right)$에 대하여 점 C는 y축 위에 있으므로

$\frac{b-2}{3}=0$에서 $b=2$

따라서 점 B의 y좌표는 $3^2=9$이다.

11. [출제의도] 로그함수의 그래프의 성질을 이해하여 좌표를 구한다.

(삼각형 BCD의 넓이)$=\frac{1}{2}\cdot(2p-p)\cdot\log_2 2p$

$=\frac{p}{2}\cdot\log_2 2p$

(삼각형 ACB의 넓이)$=\frac{1}{2}\cdot(2p-p)\cdot\log_2 p$

$=\frac{p}{2}\cdot\log_2 p$

$\frac{p}{2}\cdot\log_2 2p-\frac{p}{2}\cdot\log_2 p=8$이므로

$\frac{p}{2}(\log_2 2p-\log_2 p)=8$, $\frac{p}{2}\cdot\log_2 2=8$

따라서 $p=16$

[다른 풀이]

선분 CD를 삼각형 BCD와 삼각형 ACB의 높이라 하면, 그 길이는 $2p-p=p$로 같다. 그러므로

(삼각형 BCD와 삼각형 ACB 넓이의 차)

$=\frac{p}{2}\times$(선분 BD와 선분 AC의 길이의 차)

$=8$

삼각형 BCD의 밑변인 선분 BD의 길이는 $\log_2 2p$이고, 삼각형 ACB의 밑변인 선분 AC의 길이는 $\log_2 p$이다.

그러므로 $\log_2 2p - \log_2 p = \log_2 2 = 1$

따라서 $p=16$

12. [출제의도] 무한등비급수의 성질을 이해하여 귀납적으로 정의된 수열의 공비를 구한다.

$a_n a_{n+1} + a_{n+1} = ka_n^2 + ka_n$ 에서

$(a_n+1)a_{n+1} = ka_n(a_n+1)$ 이고 $a_n+1 \neq 0$ 이므로

양변을 a_n+1 로 나누면 $a_{n+1} = ka_n$

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = k$, 공비가 k 인 등비수열

그러므로 $a_n = k^n$

수열 $\{a_n\}$ 의 공비 k 가 $0<k<1$ 이므로

무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 $\frac{k}{1-k}$ 로 수렴한다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} k^n = \frac{k}{1-k} = 5$

따라서 $k = \frac{5}{6}$

13. [출제의도] 등차수열과 로그의 성질을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$\log 3$, $\log(3^t+3)$, $\log 12$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\log(3^t+3) = \frac{\log 12 + \log 3}{2} = \frac{\log 36}{2} = \log\sqrt{36}$

$3^t + 3 = \sqrt{36} = 6$, $3^t = 3$

따라서 $t=1$

14. [출제의도] 지표와 가수의 성질을 이해하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구한다.

$f(n) = \log n = 1 + \alpha$

조건에 의해 $1 \le 2\alpha < 2$ 에서 $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$

$1 + \frac{1}{2} \le \log n < 2$, $10^{\frac{3}{2}} \le n < 10^2$

문제에서 $3.1 < \sqrt{10} < 3.2$, $31 < 10\sqrt{10} < 32$

즉, $10\sqrt{10} = 31.\cdots$ 이므로 $31.\cdots \le n < 10^2$

그런데 n 은 자연수이므로 $32 \le n < 100$

따라서 자연수 n 의 개수는 68 이다.

15. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 실생활과 관련된 외적 문제를 해결한다.

마우스 커서가 아이콘 A 까지 이동하는 시간이 0.71 초이므로

$0.71 = a + \frac{1}{10}\log_2(D_A+1)$ … ㉠

마우스 커서가 아이콘 B 까지 이동하는 시간이 0.66 초이므로

$0.66 = a + \frac{1}{10}\log_2(D_B+1)$ … ㉡

㉠−㉡에서

$0.05 = \frac{1}{10}\log_2(D_A+1) - \frac{1}{10}\log_2(D_B+1)$

$= \frac{1}{10}\log_2\frac{D_A+1}{D_B+1}$

즉, $0.5 = \log_2\frac{D_A+1}{D_B+1}$

따라서 $\frac{D_A+1}{D_B+1} = 2^{0.5} = \sqrt{2}$

16. [출제의도] 행렬의 성질을 이용하여 연립방정식의 해를 추론한다.

$A(\alpha, \beta)$ 가 제1사분면의 점이므로 $\alpha>0$, $\beta>0$

조건에 의해 $\begin{pmatrix} -3-k & 1 \\ 5 & 1-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 은

$x=y=0$ 이외의 해 $x=\alpha$, $y=\beta$ 를 가진다.

그러므로 $\begin{pmatrix} -3-k & 1 \\ 5 & 1-k \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않는다.

$(-3-k)(1-k)-5 = k^2+2k-8 = (k-2)(k+4) = 0$

$k=-4$ 또는 $k=2$

i) $k=-4$ 인 경우

연립방정식 $\begin{pmatrix} -3-k & 1 \\ 5 & 1-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 은

$x+y=0$ 과 같다.

그런데 α, β 는 모두 양의 실수이므로

$x=\alpha$, $y=\beta$ 는 $x+y=0$ 을 만족시키지 않는다.

ii) $k=2$ 인 경우

연립방정식 $\begin{pmatrix} -3-k & 1 \\ 5 & 1-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 은

$-5x+y=0$ 과 같다.

α, β 는 모두 양의 실수이므로

$x=\alpha$, $y=\beta$ 는 $-5x+y=0$ 을 만족시킨다.

따라서 $k=2$

17. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = S_n$ 이라 하면

$a_n + b_n = S_n - S_{n-1}\ (n \ge 2)$

$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$= -\frac{1}{n(n+1)}$

$\lim_{n\to\infty} n^2(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}(n^2a_n + n^2b_n)$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n(n+1)}$

$= -1$

또, 조건에 의해 $\lim_{n\to\infty} n^2 b_n = 2$

따라서 $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to\infty}(n^2a_n + n^2b_n - n^2b_n)$

$= \lim_{n\to\infty}(n^2a_n + n^2b_n) - \lim_{n\to\infty} n^2b_n$

$= -3$

18. [출제의도] 비례식의 성질과 로그함수의 성질을 활용하여 좌표 구하는 문제를 해결한다.

직선이 y 축과 만나는 점을 D 라 하면

두 곡선 $y=2^x$ 과 $y=\log_2 x$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 점 C $(a, 0)$ 이라 하면 점 D $(0, a)$ 이고, $\overline{BC} = \overline{AD}$

조건에 의해 $\overline{AB} : \overline{BC} = 3:1$ 에서

$\triangle OBC = \frac{1}{5}\triangle OCD = \frac{1}{10}a^2 = 40$ 이므로 $a=20$

점 A 는 직선 $y=-x+a$ 위의 점이다.

따라서 $p+q=a=20$

[다른 풀이]

두 곡선 $y=2^x$ 과 $y=\log_2 x$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 점 A 와 점 B 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 점 A (p, q) 이므로 점 B (q, p) 이고, 점 C $(a, 0)$ 이다.

조건에 의해 $\overline{AB} : \overline{BC} = 3:1$

점 B 는 선분 AC 를 $3:1$ 로 내분하는 점이므로

$q = \frac{3a+p}{4}$, $p = \frac{q}{4}$ 에서 $a=5p$, $q=4p$

또, 삼각형 OBC 의 넓이가 40 이므로

$\frac{1}{2}ap = \frac{5}{2}p^2 = 40$

$p^2 = 16$ 에서 $p=4$ 이므로 $a=20$

($p<0$ 인 경우에는 문제의 조건을 만족시킬 수 없다.)

점 A 는 직선 $y=-x+a$ 위의 점이다.

따라서 $p+q=a=20$

19. [출제의도] 지수함수의 성질과 비례관계를 활용하여 미지수의 값 구하는 문제를 해결한다.

$a^{f(t)} = t$ 이므로 $f(t) = \log_a t$

$b^{g(t)} = t$ 이므로 $g(t) = \log_b t$

$2f(a) = 3g(a)$ 이므로 $2\log_a a = 3\log_b a$ 에서

$\log_b a = \frac{2}{3}$ 즉, $\log_a b = \frac{3}{2}$

$f(c) = g(27)$

$= \log_b 27 = \frac{\log_a 27}{\log_a b} = \frac{2}{3}\log_a 27$

$= \log_a 27^{\frac{2}{3}} = \log_a 9$

따라서 $c=9$

20. [출제의도] 주어진 조건을 활용하여 행렬과 관련된 명제의 참, 거짓을 추론한다.

ㄱ. $A^2 + AB = 2E$ 에서 $\frac{1}{2}A(A+B) = E$ 이므로 A 의 역행렬은 존재하고 $A^{-1} = \frac{1}{2}(A+B)$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 A 의 역행렬은 존재하고 역행렬의 정의에 의해

$\frac{1}{2}A(A+B) = \frac{1}{2}(A+B)A = E$

$A(A+B) = (A+B)A$

$A^2 + AB = A^2 + BA$

$AB = BA$

A 의 역행렬이 존재하므로 $BA \neq O$

즉, $BA \neq -BA$

그러므로 $AB \neq -BA$ (거짓)

ㄷ. $A^2 - 2A = B^2 + 2B$, $A^2 - B^2 = 2(A+B)$

$AB = BA$ 이므로 $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

ㄱ의 풀이에서 $\frac{1}{2}A(A+B) = E$ 이므로

$(A+B)^{-1} = \frac{1}{2}A$

$(A+B)(A-B) = 2(A+B)$ 의 양변에

$(A+B)$ 의 역행렬 $\frac{1}{2}A$ 를 곱하면

$A - B = 2E$, $A = B + 2E$

$A^2 + AB = 2E$ 에 $A = B+2E$ 를 대입하면

$2E = (B+2E)^2 + (B+2E)B$

$= 2B^2 + 6B + 4E$

그러므로 $B^2 = -3B - E$

$= -3(A-2E) - E$

$= -3A + 5E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄷ은 다음과 같이 확인할 수도 있다.

$A^2 = 2E - AB = B^2 + 2B + 2A$

$B^2 + 2B + 2A + AB = 2E$

$(A+B)(B+2E) = 2E$

$\frac{1}{2}(B+2E) = (A+B)^{-1}$

ㄱ의 풀이에서 $\frac{1}{2}A(A+B) = E$ 이므로

$(A+B)^{-1} = \frac{1}{2}A$

즉, $A = B+2E$

$A^2 + AB = 2E$ 에 $B = A - 2E$ 를 대입하면

$A^2 + A(A-2E) = 2E$

$2A^2 - 2A = 2E$

$A^2 = A + E$

그러므로 $B^2 = (A-2E)^2$

$= A^2 - 4A + 4E$

$= (A+E) - 4A + 4E$

$= -3A + 5E$

21. [출제의도] 수열의 규칙을 추론하여 수열의 합을

구한다.

$1 \le n \le 15$ 를 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로소인 자연수 8개

$16 \le n \le 30$ 을 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로소인 자연수 8개

⋮

$15(k-1)+1 \le n \le 15k$ 를 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로소인 자연수 8개 ($k=1,2,3,\cdots$)

a_{16} 은 $16 \le n \le 30$ 을 만족시키는 15와 서로소인 자연수 n 중 가장 큰 수이다.

$\sum_{n=1}^{16} a_n$ 은 1부터 30까지 자연수 중 15와 서로소인 자연수들의 합이다.

1부터 30까지 자연수 중에는 10개의 3의 배수, 6개의 5의 배수, 2개의 15의 배수가 있다.

따라서 $\sum_{n=1}^{16} a_n = \sum_{n=1}^{30} n - \sum_{n=1}^{10} 3n - \sum_{n=1}^{6} 5n + \sum_{n=1}^{2} 15n$

$= 240$

[다른 풀이]

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=7$, $a_5=8$, $a_6=11$, $a_7=13$, $a_8=14$ 이고

$k\,(k=1,2,3,\cdots,14)$가 15와 서로소이면 $15+k$도 15와 서로소이므로

$a_9=a_1+15$, $a_{10}=a_2+15$, $\cdots$, $a_{16}=a_8+15$

$\sum_{n=1}^{8} a_n = 1+2+4+7+8+11+13+14=60$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{16} a_n &= \sum_{n=1}^{8} a_n + \sum_{n=9}^{16} a_n \\ &= 2\sum_{n=1}^{8} a_n + 15\times 8 \\ &= 2\times 60+120 \\ &= 240\end{aligned}$$

22. **[출제의도] 연립방정식의 성질을 이용하여 행렬의 성분을 계산한다.**

연립방정식을 전개하면

$$\begin{cases} ax+\ y=8 \\ -x+by=9 \end{cases}$$

해 $x=1$, $y=1$ 을 위 식에 대입하면

$$\begin{cases} a+1=8 \\ -1+b=9 \end{cases}$$

이므로 $a=7$, $b=10$

따라서 $a+b=17$

23. **[출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하여 제50항의 값을 계산한다.**

$$\begin{aligned}a_{50} &= S_{50}-S_{49}=50^2-49^2 \\ &=(50-49)(50+49)=99\end{aligned}$$

[다른 풀이]

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \ (n \ge 2) \\ &= n^2-(n-1)^2 \\ &= 2n-1\end{aligned}$$

따라서 $a_{50}=99$

24. **[출제의도] 거듭제곱근의 성질을 이해하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수를 구한다.**

$\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}$ 이 자연수가 되기 위해서는 a는 어떤 자연수의 제곱 꼴이고 b는 세제곱 꼴이다.

$5^2<30 \le a \le 40 < 7^2$ 이므로 $a=6^2$

또, $5^3<150=5^2\times 6<6^3$ 이고

$6^3<294=7^2\times 6<7^3$

이므로 $5<\sqrt[3]{b}<7$, $b=6^3$

따라서 $a+b=36+216=252$

25. **[출제의도] 양의 약수와 등비수열의 합을 활용하여 주어진 문제를 해결한다.**

2^{n-1} 의 모든 양의 약수 : 1, 2, 2^2, $\cdots$, 2^{n-1}

$a_n = 1+2+\cdots+2^{n-1} = \dfrac{1\times(2^n-1)}{2-1} = 2^n-1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{8} a_n &= \sum_{n=1}^{8}(2^n-1) \\ &= \sum_{n=1}^{8} 2^n - \sum_{n=1}^{8} 1 \\ &= \frac{2\times(2^8-1)}{2-1}-8 \\ &= 2^9-2-8=502\end{aligned}$$

26. **[출제의도] 상용로그의 성질을 이해하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 합을 구한다.**

4^m 이 8자리의 정수이기 때문에 4^m 의 상용로그의 지표는 7이다. 따라서

$7 \le \log 4^m < 8$

$7 \le m \log 4 < 8$

$\dfrac{7}{\log 4} \le m < \dfrac{8}{\log 4}$

$\dfrac{7}{2\log 2} \le m < \dfrac{8}{2\log 2}$

$\dfrac{7}{0.602} \le m < \dfrac{4}{0.301}$

$11.6\cdots \le m < 13.2\cdots$ 이므로 $m=12$, 13

따라서 $12+13=25$

27. **[출제의도] 행렬의 거듭제곱과 $\sum$의 성질을 활용하여 로그와 관련된 문제를 해결한다.**

행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여

$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$,

$A^3=\begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}$ 이므로

$A^n=\begin{pmatrix} 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ 이 되어

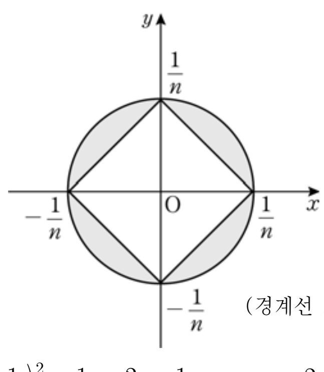
$(1,1)$성분과 $(2,2)$성분의 곱 $p_n=3^n\times 2^n=6^n$

$$\begin{aligned}\log_{36} p_1 p_2 \cdots p_n &= \log_{36} 6^1\times 6^2\times\cdots\times 6^n \\ &= \log_{36} 6^{1+2+\cdots+n} \\ &= \log_{6^2} 6^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= \frac{n(n+1)}{4}=105\end{aligned}$$

이므로 $n(n+1)=420=20\times 21$

따라서 $n=20$

28. **[출제의도] 연립부등식의 영역으로 주어진 도형과 관련된 무한급수의 문제를 해결한다.**



(경계선 포함)

$S_n=\pi\left(\dfrac{1}{n}\right)^2-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{1}{n}\cdot 2=\dfrac{\pi-2}{n^2}$ 이므로

$S_{n+2}=\dfrac{\pi-2}{(n+2)^2}$

$$\begin{aligned}&\frac{20}{\pi-2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{S_n S_{n+2}} \\ &= \frac{20}{\pi-2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi-2}{n^2}\cdot\frac{\pi-2}{(n+2)^2}} \\ &= 20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} \\ &= 20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) \\ &= 10\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) \\ &= 10\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \\ &= 10\times\left(1+\frac{1}{2}\right) \\ &= 15\end{aligned}$$

29. **[출제의도] 로그의 정의와 이차함수의 성질을 활용하여 자연수의 개수 구하는 문제를 해결한다.**

$f(x)=-x^2+ax+4$ 라 하면

로그의 진수 조건에 의해 $f(x)>0$

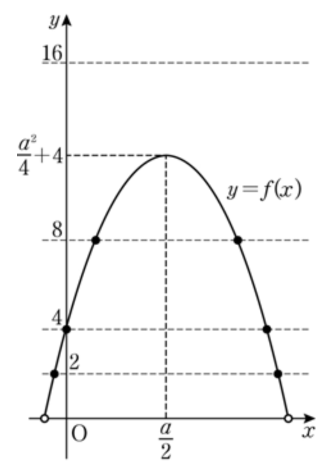
$$\begin{aligned}f(x) &= -x^2+ax+4 \\ &= -\left(x^2-ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\right)+4 \\ &= -\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+4\end{aligned}$$

$\log_2(-x^2+ax+4)$ 의 값이 자연수가 되는 실수 x의 개수가 6이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 $y=2^1$, $y=2^2$, $y=2^3$ 과 각각 2개의 점에서 만나고 $y=2^n$ ($n \ge 4$)와는 만나지 않는다.

즉, $2^3<\dfrac{a^2}{4}+4<2^4$

$16<a^2<48$ 이고, a가 자연수이므로 $a=5$, 6

따라서 $5\times 6=30$



30. **[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 수열의 규칙을 추론하여 수열의 합을 구한다.**

조건 (가)에서 두 원소의 합이 31이 아니므로 집합 A에 속하지 않는 원소는 $31-a_i\,(1 \le i \le 15)$이다.

그러므로 $\sum_{i=1}^{15} a_i^2$ 과 $\sum_{i=1}^{15}(31-a_i)^2$ 의 합은 집합 U의 모든 원소의 제곱의 합과 같다.

$\sum_{i=1}^{15} a_i^2+\sum_{i=1}^{15}(31-a_i)^2=\sum_{i=1}^{30} i^2$

$\sum_{i=1}^{15} a_i^2+\sum_{i=1}^{15}31^2-62\sum_{i=1}^{15}a_i+\sum_{i=1}^{15}a_i^2=\dfrac{30\times 31\times 61}{6}$

조건 (나)에 의해

$2\sum_{i=1}^{15} a_i^2+15\times 31^2-62\times 264=5\times 31\times 61$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{15} a_i^2 &= \frac{1}{2}(5\times 31\times 61-15\times 31^2+62\times 264) \\ &= \frac{31}{2}(5\times 61-15\times 31+2\times 264) \\ &= \frac{31}{2}(-5\times 32+2\times 264) \\ &= 31\times 184\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{1}{31}\sum_{i=1}^{15} a_i^2=184$

[참고]

두 원소의 합이 31이 되는 쌍은 (1, 30), (2, 29),

$\cdots$, $(15,\ 16)$ 이므로 집합 A는 각 순서쌍에서 원소를 하나씩 택하여 얻을 수 있다. 이와 같은 방법으로 찾은 집합 A의 여러 예 중 하나는 다음과 같다.
$\{5, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 23, 25, 27, 28, 29, 30\}$