2015학년도 대학수학능력시험

수학영역 A형 정답 및 풀이

01. ①	02. ⑤	03. ④	04. ③	05. ④
06. ③	07. ②	08. ④	09. ②	10. ③
11. ①	12. ②	13. ③	14. ①	15. ⑤
16. ⑤	17. ④	18. ②	19. ⑤	20. ①
21. ⑤	22. 7	23. 11	24. 54	25. 20
26. 12	27. 5	28. 33	29. 16	30. 120

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$5\times 8^{\frac{1}{3}}=5\times(2^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$=5\times 2$$
$$=10$$

<답> ①

2. **출제의도** : 행렬의 덧셈을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

따라서 모든 성분의 합은

$2+2+3+2=9$

<답> ⑤

3. **출제의도** : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6}{n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{6}{n^2}}{1+\frac{3}{n}}$$
$$=\frac{4+0}{1+0}$$
$$=4$$

<답> ④

4. **출제의도** : 그래프를 나타내는 행렬을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

꼭짓점이 5개이므로

그래프를 나타내는 행렬은 5×5행렬이다.

이때, 1의 개수는 변의 개수의 두 배이므로 1의 개수는

2×6

따라서, 0의 개수는

$5\times5-2\times6=13$

<답> ③

5. **출제의도** : 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_5=a_1\times r^4=3r^4$이므로

$3r^4=48$에서 $r^4=16$

$r^2>0$이므로 $r^2=4$

$\therefore\ a_3=a_1\times r^2$

$=3\times4$

$=12$

<답> ④

[다른 풀이]

세 수 a_1, a_3, a_5는 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_3{}^2=a_1\times a_5$

$=3\times48$

$=144$

등비수열 $\{a_n\}$에서

$a_1>0$이므로 $a_3>0$이다.

$\therefore\ a_3=12$

6. **출제의도** : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^1(2x+a)dx=\left[x^2+ax\right]_0^1$$

$=1+a$

$=4$

$\therefore\ a=3$

<답> ③

7. **출제의도** : 이항정리를 이용하여 다항식의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(x+a)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r\,a^{6-r}x^r$이므로

x^4항은 $r=4$일 때이다.

따라서 x^4의 계수는

${}_6\mathrm{C}_4\,a^2=15a^2$

이므로

$15a^2=60$에서 $a^2=4$

$a>0$이므로 $a=2$

<답> ②

8. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\to-0$일 때, $f(x)\to2$이므로

$\lim\limits_{x\to-0}f(x)=2$

또, $x\to1+0$일 때, $f(x)\to2$이므로

$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=2$

따라서,

$\lim\limits_{x\to-0}f(x)+\lim\limits_{x\to1+0}f(x)$

$=2+2$

$=4$

<답> ④

9. **출제의도** : 수열의 합과 일반항의 관계를 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$S_n=\dfrac{n}{n+1}$에서

$a_4=S_4-S_3$

$= \frac{4}{5} - \frac{3}{4}$

$= \frac{1}{20}$

<답> ②

10. **출제의도** : 실생활 문제를 로그를 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 원본 A, B를 압축했을 때, 최대 신호 대 잡음비는 각각 P_A, P_B이고 평균제곱오차는 각각 E_A, E_B이므로

주어진 식에 대입하면

$P_A = 20\log 255 - 10\log E_A$

$P_B = 20\log 255 - 10\log E_B$

이때, 두 식을 변끼리 빼면

$P_A - P_B = -10\log E_A + 10\log E_B$

$P_A - P_B = 10\log \frac{E_B}{E_A}$

이때, $E_B = 100E_A$이므로

$P_A - P_B = 10\log \frac{100E_A}{E_A}$

$= 10\log 100$

$= 20$

<답> ③

11. **출제의도** : 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$

수열 $\{a_n{}^2\}$은

첫째항이 $a_1{}^2 = 9$이고,

공비가 $r^2 = \frac{1}{9}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 = \frac{9}{1-\frac{1}{9}}$

$= \frac{9}{\frac{8}{9}}$

$= \frac{81}{8}$

<답> ①

12. **출제의도** : 정규분포를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

토마토 모종을 심은 지 3주가 지났을 때의 토마토 줄기의 길이를 확률변수 X라 하면

X는 정규분포 $\mathrm{N}(30, 2^2)$을 따르며,

$Z = \frac{X-30}{2}$라 하면

확률변수 Z는 표준정규분포를 따른다.

따라서, 구하는 확률은

$\mathrm{P}(27 \le X \le 32)$

$= \mathrm{P}\left(\frac{27-30}{2} \le \frac{X-30}{2} \le \frac{32-30}{2}\right)$

$= \mathrm{P}(-1.5 \le Z \le 1)$

$= \mathrm{P}(-1.5 \le Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4332+0.3413$

$=0.7745$

<답> ②

13. **출제의도** : 행렬의 연산을 이용하여 삼차방정식을 세우고, 그 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\f(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}f(a)\\3f(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\therefore\ f(a)=0$

$f(a)=a(a+1)(a-4)=0$에서

$a=-1$ 또는 $a=0$ 또는 $a=4$이므로

모든 a의 값의 합은

$-1+0+4=3$

<답> ③

14. **출제의도** : 미분을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선 $y=5x+k$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선 $y=5x+k$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 접해야 한다.

접점의 좌표를 $(a, f(a))$라 하면

$f(x)=x^3-3x^2-4x$에서

$f'(x)=3x^2-6x-4$

이므로 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2-6a-4$

한편, 기울기가 5이므로

$3a^2-6a-4=5$

$a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=3$

(i) $a=-1$일 때,

접점은 $(-1, 0)$이므로

접선의 방정식은

$y=5(x+1)+0$

즉, $y=5x+5$이므로

$k=5$

(ii) $a=3$일 때,

접점은 $(3, -12)$이므로

접선의 방정식은

$y=5(x-3)-12$

즉, $y=5x-27$

이때, k는 양수이므로 k의 값은 없다.

따라서, (i), (ii)에 의하여

$k=5$

<답> ①

15. **출제의도** : 지수부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x}\le 5^{x+4}$에서

$5^{2x-1}\le 5^{x+4}$

$2x-1\le x+4$

$x\le 5$

따라서 자연수 x의 값은

1, 2, 3, 4, 5이므로

구하는 합은

$1+2+3+4+5=15$

<답> ⑤

16. **출제의도** : 조건부 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$이므로

$$\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{\frac{5}{24}}{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{5}{8}$$

<답> ⑤

17. **출제의도** : 등차수열의 합으로부터 공차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}=3n^2+n$이므로

$n=1$일 때, $a_1=3+1=4$

$n=2$일 때,

$\sum_{k=1}^{2} a_{2k-1}=a_1+a_3=3\times 2^2+2=14$

$a_3=14-a_1=14-4=10$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3=a_1+2d$이므로

$10=4+2d$에서 $d=3$

$\therefore\ a_8=a_1+7d$

$=4+7\times 3$

$=25$

<답> ④

18. **출제의도** : 중복조합을 활용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{cases} x+y+z+3w=14 & \cdots ㉠ \\ x+y+z+w=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면

$2w=4$

$\therefore\ w=2$

이때, $x+y+z=8$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

서로 다른 3개에서 8개를 택하는

중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3+8-1}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_8$$

$$={}_{10}\mathrm{C}_2$$

$$=\frac{10\times 9}{2\times 1}$$

$$=45$$

<답> ②

19. **출제의도** : 행렬의 성질을 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $A^2-AB=3E$에서

$A(A-B)=3E$이므로

$A^{-1}=\frac{1}{3}(A-B)$ (참)

ㄴ. $A\cdot\frac{1}{3}(A-B)=\frac{1}{3}(A-B)\cdot A=E$

이므로

$A(A-B)=(A-B)A$

$A^2-AB=A^2-BA$

$\therefore\ AB=BA$ (참)

ㄷ. $AB=BA$이므로

$A^2B-B^2A=A^2B-AB^2$

또, $A^2-AB=3E$의 양변에 B를 곱하면

$A^2B-AB^2=3B$

따라서 조건 $A^2B-B^2A=A+B$에서

$3B=A+B,\ A=2B$

이므로

$A^2-AB=3E$에 대입하면

$(2B)^2-2B\cdot B=3E$

$4B^2-2B^2=3E,\ 2B^2=3E$

$\therefore\ B^2=\frac{3}{2}E$

$$\begin{aligned}\therefore\ (A+2B)^2&=(2B+2B)^2\\&=16B^2\\&=16\times\frac{3}{2}E\\&=24E\ (\text{참})\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

20. **출제의도** : 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 상수 a의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=f(x)$는 y축에 대하여 대칭이므로

$\int_{-a}^{a}f(x)dx=13$에서

$2\int_{0}^{a}f(x)dx=13$

$\therefore\ \int_{0}^{a}f(x)dx=\frac{13}{2}$

한편,

$$\begin{aligned}\int_{0}^{3}f(x)dx&=\frac{1}{2}\times(3+1)\times1\\&=2\end{aligned}$$

이고, $f(x+3)=f(x)$이므로

$\int_{0}^{3}f(x)dx=\int_{3}^{6}f(x)dx=\int_{0}^{9}f(x)dx=2$

$\therefore\ \int_{0}^{9}f(x)dx=6$

따라서 $\int_{0}^{9}f(x)dx+\int_{9}^{a}f(x)dx=\frac{13}{2}$에서

$\int_{9}^{a}f(x)dx=\frac{1}{2}$

한편

$\int_{9}^{10}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{1}{2}$

이므로

$a=10$

<답> ①

21. **출제의도** : 도함수로부터 삼차함수의 그래프의 성질을 파악하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
조건(가)에 의하여

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 놓을 수 있다.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f(0)=f'(0)$에서

$c=b$

$\therefore\ f(x)=x^3+ax^2+bx+b$

$g(x)=f(x)-f'(x)$라 하면

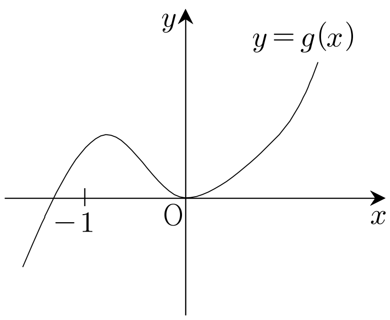
$g(x)=(x^3+ax^2+bx+b)-(3x^2+2ax+b)$

$\quad =x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$

$g(0)=0$이고,

조건(다)에 의해 $x\geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 0$이므로

그림과 같이 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.



따라서 $g'(0)=0$이므로

$g'(x)=3x^2+2(a-3)x+b-2a$에서

$g'(0)=b-2a=0$

$\therefore\ b=2a$

$g(x)=x^3+(a-3)x^2=x^2(x+a-3)$

이므로

$g(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3-a$이고,

$x\geq -1$에서 $g(x)\geq 0$이므로

$3-a\leq -1$이어야 한다.

$\therefore\ a\geq 4 \qquad \cdots$ ㉠

$f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$이므로

$f(2)=8+4a+4a+2a=10a+8$

$\quad \geq 10\times 4+8=48$ ($\because$ ㉠)

따라서 $f(2)$의 최솟값은 48이다.

<답> ⑤

22. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+7)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(x+7)$

$=0+7$

$=7$

<답> 7

23. **출제의도** : 함수의 연속성을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=f(1)$이다.

$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(2x+10)=12$

$\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(x+a)=1+a$

$f(1)=1+a$

이므로

$12=1+a$

$\therefore\ a=11$

<답> 11

24. **출제의도** : 무한급수의 성질을 이용하여 무한급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=4,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n=10$

이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+5b_n)$

$=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+5\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$=4+5\times 10$

$=54$

<답> 54

25. **출제의도** : 이항분포의 분산을 계산하고, 분산의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}n$

$\mathrm{V}(3X)=9\mathrm{V}(X)=9\times\frac{2}{9}n=2n$이므로

$2n=40$에서

$n=20$

<답> 20

26. **출제의도** : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=6x^2+4$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(6x^2+4)dx$

$=2x^3+4x+C$ (단, C는 적분상수)

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프가

점 $(0,6)$을 지나므로 $f(0)=6$에서

$C=6$

따라서, $f(x)=2x^3+4x+6$이므로

$f(1)=2+4+6=12$

<답> 12

27. **출제의도** : 확률밀도함수의 그래프를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=1$이므로

$3k+\frac{1}{2}\times 3\times 2k=1$

$6k=1$

$\therefore\ k=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(0\le X\le 2)=\frac{1}{2}\times(3k+k)\times 2$

$=4k$

$=4\times\frac{1}{6}$

$=\frac{2}{3}$

$\therefore\ p+q=3+2=5$

<답> 5

28. **출제의도** : 등비수열의 극한을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^{n}+1}$$

에서 공비가 $\frac{6}{k}$이므로

각 경우로 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) $\frac{6}{k}<1$ 즉, $k>6$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^{n}=0$이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^{n}+1}$$

$$=\frac{0}{0+1}$$

$$=0$$

(ⅱ) $\frac{6}{k}=1$ 즉, $k=6$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^{n}=1$이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{n+1}}{1^{n}+1}=\frac{1}{2}$$

(ⅲ) $\frac{6}{k}>1$, 즉, $k<6$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^{n}=\infty$이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^{n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)}{1+\frac{1}{\left(\frac{6}{k}\right)^{n}}}$$

$$=\frac{\frac{6}{k}}{1+0}$$

$$=\frac{6}{k}$$

따라서,

$$\sum_{k=1}^{10}ka_k$$

$$=1\times a_1+2\times a_2+\cdots+10\times a_{10}$$

$$=1\times\frac{6}{1}+2\times\frac{6}{2}+3\times\frac{6}{3}+4\times\frac{6}{4}+5\times\frac{6}{5}$$

$$+6\times\frac{1}{2}+7\times0+8\times0+9\times0+10\times0$$

$$=6+6+6+6+6+3$$

$$=33$$

<답> 33

29. **출제의도** : 곱의 미분법과 함수의 극대, 극소를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=(x^3+2)f(x)$ 에서

$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+2)f'(x)$

$g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가지므로

$g(1)=24$, $g'(1)=0$

$g(1)=3f(1)=24$ 에서

$f(1)=8$

$g'(1)=3f(1)+3f'(1)=0$ 에서

$3\times8+3f'(1)=0$, $f'(1)=-8$

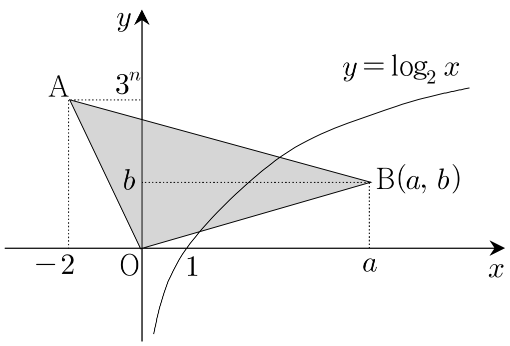
$\therefore\ f(1)-f'(1)=8-(-8)$

$\qquad\qquad\quad =16$

<답> 16

30. 출제의도 : 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족하는 삼각형의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(a+2)\times(3^n+b)-\frac{1}{2}\times 2\times 3^n-\frac{1}{2}ab$

$=\frac{1}{2}(a\cdot 3^n+ab+2\cdot 3^n+2b)-3^n-\frac{1}{2}ab$

$=\frac{3^n}{2}a+b$

이때, 넓이가 50이하이므로

$\frac{3^n}{2}a+b\le 50$

$\therefore\ 3^n a+2b\le 100 \qquad \cdots ㉠$

(ⅰ) $n=1$일 때,

㉠에서 $3a+2b\le 100$이므로 a의 값은 2, 3, $\cdots$, 32의 값을 가질 수 있다.

이때, $b\le\log_2 a$를 만족시키므로

$2^1\le a<2^2$일 때, $b=1$

$2^2\le a<2^3$일 때, $b=1, 2$

$2^3\le a<2^4$일 때, $b=1, 2, 3$

$2^4\le a\le 30$일 때, $b=1, 2, 3, 4$

$a=31$일 때, $b=1, 2, 3$

$a=32$일 때, $b=1, 2$

$f(1)$은 순서쌍 (a, b)의 개수와 같으므로

$f(1)=1\times(2^2-1^1)+2\times(2^3-2^2)$

$\qquad +3\times(2^4-2^3)+4\times(30-2^4+1)$

$\qquad +3+2$

$=2+8+24+60+3+2$

$=99$

(ⅱ) $n=2$일 때,

㉠에서 $9a+2b\le 100$이므로 a의 값은 2, 3, $\cdots$, 10의 값을 가질 수 있다.

이때, $b\le\log_2 a$를 만족시키므로

$2^1\le a<2^2$일 때, $b=1$

$2^2\le a<2^3$일 때, $b=1, 2$

$2^3\le a\le 10$일 때, $b=1, 2, 3$

$f(2)$는 순서쌍 (a, b)의 개수와 같으므로

$f(2)=1\times(2^2-2^1)+2\times(2^3-2^2)+3\times 3$

$\qquad =2+8+9$

$\qquad =19$

(ⅲ) $n=3$일 때,

㉠에서 $27a+2b\le 100$이므로 a의 값은 2, 3의 값을 가질 수 있다.

이때, $b\le\log_2 a$를 만족시키므로

$a=2, 3$일 때, $b=1$

$f(3)$은 순서쌍 (a, b)의 개수와 같으므로

$f(3)=2$

따라서, (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$f(1)+f(2)+f(3)=99+19+2$

$\qquad\qquad\qquad\quad =120$

<답> 120