2015학년도 대학수학능력시험 대비

2014학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학B형 정답

1	④	2	④	3	⑤	4	②	5	②
6	①	7	①	8	①	9	⑤	10	①
11	②	12	②	13	③	14	②	15	③
16	⑤	17	③	18	⑤	19	④	20	④
21	③	22	9	23	72	24	160	25	55
26	13	27	23	28	14	29	3	30	20

해 설

1. [출제의도] 지수와 로그를 계산한다.

$4^{\frac{3}{2}} \times \log_4 2 = (2^2)^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{2}\log_2 2 = 2^3 \times \frac{1}{2} = 4$

2. [출제의도] 지수함수의 극한값을 구한다.

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x} = 2\times 1 = 2$

3. [출제의도] 삼각함수의 합성을 이용하여 최댓값을 구한다.

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$일 때,

$f(x) = \sqrt{3^2+4^2}\sin(x+\alpha) = 5\sin(x+\alpha)$

이므로 $f(x)$의 최댓값은 5이다.

4. [출제의도] 무한급수의 수렴과 수열의 극한값 사이의 관계를 이해한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{n}{2n+1}\right) = 2$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{n}{2n+1}\right) = 0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(a_n - \frac{n}{2n+1}\right) + \frac{n}{2n+1}\right\} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

5. [출제의도] 무리방정식의 실근을 구한다.

$t = \sqrt{x^2+x}\ (t \geq 0)$으로 놓으면

$t+2 = t^2$, $(t-2)(t+1) = 0$

$t \geq 0$에서 $t = 2$

$\sqrt{x^2+x} = 2$에서 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+x-4 = 0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에서 두 실근의 곱은 -4이다.

6. [출제의도] 일차변환의 성질을 이해하고 합성변환에 의해 옮겨지는 점의 좌표를 구한다.

일차변환 f는 원점을 중심으로 $45°$만큼 회전하는 회전변환이므로 합성변환 $f\circ f$는 원점을 중심으로 $90°$만큼 회전하는 회전변환이다. 따라서 합성변환 $f\circ f$에 의하여 점 $(1, -1)$이 옮겨지는 점의 좌표는 $(1, 1)$이다.

[다른 풀이]

일차변환 f를 나타내는 행렬이 $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$이므로

합성변환 $f\circ f$를 나타내는 행렬은

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$

이다. $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$이므로

구하는 점의 좌표는 $(1, 1)$이다.

7. [출제의도] 부분적분법을 이용하여 적분값을 구한다.

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$

$= e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1$

8. [출제의도] 독립사건을 이해하여 확률을 구한다.

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A^C, B도 서로 독립이다.

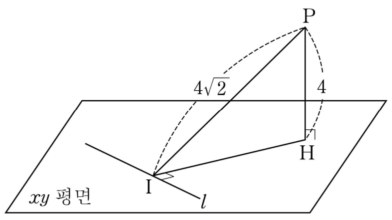
$\mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B) = \mathrm{P}(A^C)\,\mathrm{P}(B)$

이므로 $\frac{3}{4}\mathrm{P}(B) = \frac{1}{4}$에서 $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

9. [출제의도] 삼수선의 정리를 이해하여 점과 직선 사이의 거리를 구한다.



점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 I라 하자.

직선 PH가 xy평면에 수직이고, $\overline{\mathrm{PI}}\perp l$이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{HI}}\perp l$이다.

$\overline{\mathrm{PH}} = 4$, $\overline{\mathrm{PI}} = 4\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{HI}} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - 4^2} = \sqrt{16} = 4$

따라서 구하는 거리는 4이다.

10. [출제의도] 치환적분법을 이용하여 적분값을 구한다.

$t = a-x$로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -1$이고,

$x = a+1$일 때 $t = -1$, $x = a-1$일 때 $t = 1$이므로

$\int_{a-1}^{a+1} f(a-x)dx = \int_1^{-1} f(t)(-1)dt = \int_{-1}^{1} f(t)dt$

함수 $y = f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$\int_{-1}^{1} f(t)dt = 2\int_0^1 f(t)dt = 24$

따라서 $\int_0^1 f(x)dx = 12$

11. [출제의도] 'A'형 12번과 동일

12. [출제의도] 표본평균의 분포를 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

표본의 크기가 16이므로

$\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(70, \left(\frac{2.5}{4}\right)^2\right)$을 따른다.

$\mathrm{P}(|\overline{X}-70| \leq a) = \mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-70}{\frac{2.5}{4}}\right| \leq \frac{a}{\frac{2.5}{4}}\right) = \mathrm{P}\left(|Z| \leq \frac{8}{5}a\right)$

$\mathrm{P}(|Z| \leq 2) = 0.9544$이므로 $\frac{8}{5}a = 2$에서 $a = 1.25$

13. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 식을 추론한다.

삼각형 ABC에서

$\frac{1}{\sin(\pi-3\theta)} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin 2\theta} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\theta}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{AC}} = \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin 3\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta}{\sin 3\theta}$

$= \frac{\sin\theta(2\cos\theta+1)}{\sin 3\theta}$

이때 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$이므로

$\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{AC}} = a$에서

$a = \frac{\sin\theta(2\cos\theta+1)}{\sin\theta(3-4\sin^2\theta)} = \frac{2\cos\theta+1}{3-4\sin^2\theta} = \frac{2\cos\theta+1}{4\cos^2\theta-1} = \frac{1}{2\cos\theta-1}$

따라서 $\cos\theta = \frac{a+1}{2a}$이다.

위의 과정에서

$f(\theta) = 2\cos\theta+1$, $g(\theta) = 2\cos\theta-1$, $h(a) = \frac{a+1}{2a}$

이므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) + g\left(\frac{\pi}{6}\right) + h(2) = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1) + \frac{3}{4} = 2\sqrt{3} + \frac{3}{4}$

14. [출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구한다.

꺼낸 3개의 공에 적힌 수 중 네 수 0, 2, 3, 5의 개수를 각각 a, b, c, d라 하자.

세 수의 곱은 0 또는 $2^b3^c5^d$이고

$a+b+c+d = 3\ (a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0,\ d \geq 0)$

이다.

ⅰ) $a \neq 0$일 때

세 수의 곱은 항상 0이므로 구하는 정수는 1개이다.

ⅱ) $a = 0$일 때

순서쌍 (b, c, d)가 다르면 $2^b3^c5^d$의 값도 다르므로 구하는 정수의 개수는 $b+c+d = 3$을 만족시키는 순서쌍 (b, c, d)의 개수와 같다. 즉, ${}_3\mathrm{H}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = 10$이다.

위의 ⅰ), ⅱ)에서 구하는 정수의 개수는 11이다.

15. [출제의도] 'A'형 17번과 동일

16. [출제의도] 'A'형 18번과 동일

17. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 명제의 참, 거짓을 추론한다.

ㄱ. $x\to -1+0$일 때, $f(x)\to 1$ (참)

ㄴ. $x\to 1+0$일 때, $f(x)\to -1$

$2-x = t$로 놓으면 $x\to 1+0$일 때,

$t\to 1-0$이므로 $f(t)\to 1$이다.

따라서 $\lim_{x\to 1+0}\{f(x)+f(2-x)\} = (-1)+1 = 0$ (참)

ㄷ. $x\to 1+0$일 때, $f(x)\to -1+0$이므로 $f(f(x))\to 1$

$x\to 1-0$일 때, $f(x)\to 1-0$이므로 $f(f(x))\to 1$

$(f\circ f)(1) = f(f(1)) = f(0) = 0$

따라서 $\lim_{x\to 1}(f\circ f)(x) \neq (f\circ f)(1)$이므로

함수 $(f\circ f)(x)$는 $x = 1$에서 불연속이다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

18. [출제의도] 타원의 정의를 이용하여 선분의 길이를 구한다.

$x^2+(y-3)^2 = 5^2$에서 $y = 0$일 때, $x = 4$ 또는 $x = -4$

따라서 원이 x축과 만나는 두 점의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(-4, 0)$, $\mathrm{B}(4, 0)$으로 놓을 수 있다.

그런데 이 두 점은 타원의 초점이고 점 P는 타원 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}} = 10$ … ㉠

삼각형 APB에서 $\angle\mathrm{APB} = \theta$라 하면

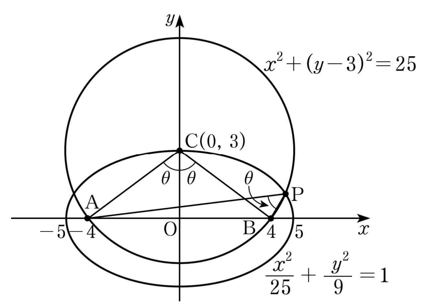
$\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 - 2\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\cos\theta = 8^2$ … ㉡

각 $\angle\mathrm{APB}$는 호 AB의 원주각이고, 원의 중심을 $\mathrm{C}(0, 3)$이라 하면 각 $\angle\mathrm{ACB}$는 호 AB의 중심각이다.

따라서 $\angle\mathrm{ACB} = 2\theta$에서 $\angle\mathrm{OCA} = \angle\mathrm{APB} = \theta$

이때 $\overline{\mathrm{AC}} = 5$, $\overline{\mathrm{OC}} = 3$이므로 $\cos\theta = \frac{3}{5}$ … ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BP}} = \frac{45}{4}$



19. [출제의도] 정적분을 이용하여 삼각함수의 극한값 구하는 문제를 해결한다.

직선 l의 방정식은 $y = (\tan\theta)x$이므로

$-x^3+x = (\tan\theta)x$에서 $x(x^2+\tan\theta-1) = 0$

$x \geq 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = \sqrt{1-\tan\theta}$이다.

따라서 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$S(\theta)=\int_0^{\sqrt{1-\tan\theta}}\{(-x^3+x)-(\tan\theta)x\}dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}(1-\tan\theta)x^2\right]_0^{\sqrt{1-\tan\theta}}$

$=\frac{1}{4}(1-\tan\theta)^2$

이므로 $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{S(\theta)}{\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)^2}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{1}{4}\left(\frac{\tan\theta-1}{\theta-\frac{\pi}{4}}\right)^2$이다.

$f(\theta)=\tan\theta$라 하면 $f'(\theta)=\sec^2\theta$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$이므로

$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\tan\theta-1}{\theta-\frac{\pi}{4}}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{f(\theta)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\theta-\frac{\pi}{4}}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$

따라서 $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{S(\theta)}{\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}\left(f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2=\frac{1}{4}\times2^2=1$

20. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 확률을 구한다.

A가 2번 가위바위보를 하여 최종 승자가 되는 사건을 X, 2번째 가위바위보를 한 학생이 2명인 사건을 Y라 하자.

ⅰ) 첫 번째에 이긴 학생이 없을 때

세 학생이 첫 번째에 모두 다른 것을 내거나 모두 같은 것을 내고, 2번째에 A가 이길 확률은

$P(X\cap Y^C)=\frac{3!+3}{3^3}\times\frac{3}{3^3}=\frac{1}{27}$이다.

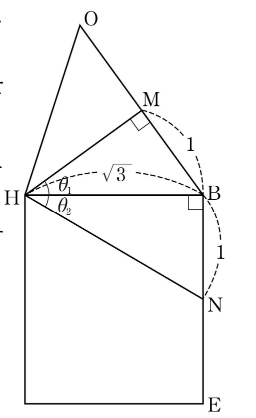
ⅱ) 첫 번째에 이긴 학생이 2명일 때

첫 번째에 A를 포함한 2명이 이기고, 2번째에 A가 이길 확률은 $P(X\cap Y)=\frac{3\times2}{3^3}\times\frac{3}{3^2}=\frac{2}{27}$이다.

ⅰ), ⅱ)에서 $P(X)=P(X\cap Y^C)+P(X\cap Y)=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$

따라서 $P(Y|X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{2}{3}$

21. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 이면각의 크기 구하는 문제를 해결한다.



점 M에서 모서리 AC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 주어진 도형을 평면 OBH로 자른 단면은 그림과 같다.

$\overline{MB}=1$, $\overline{HB}=\sqrt{3}$

$\overline{HM}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1}=\sqrt{2}$,

$\overline{HN}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=2$

$\cos\theta_1=\frac{\overline{HM}}{\overline{BH}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\theta_2=\frac{\overline{BH}}{\overline{HN}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\cos(\theta_1+\theta_2)$

$=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$

$=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$

22. [출제의도] 로그함수의 미분계수를 구한다.

$f'(x)=\frac{1}{x}-1$이므로 $f'\left(\frac{1}{10}\right)=10-1=9$이다.

23. [출제의도] 'A'형 23번과 동일

24. [출제의도] 구의 성질을 이용하여 평면과 점 사이의 거리의 최댓값을 구한다.

점 P와 평면 사이의 거리가 최대일 때는 구의 중심 $C(0,0,1)$을 지나고 평면에 수직인 직선이 구와 만나는 두 점 중 평면과의 거리가 더 먼 점이 P일 때이다.

점 $C(0,0,1)$과 평면 $2x-y+2z-7=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\times0-1\times0+2\times1-7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{5}{3}$

이므로 거리의 최댓값은 $\frac{5}{3}+1=\frac{8}{3}$이다.

따라서 $60d=60\times\frac{8}{3}=160$

25. [출제의도] 포물선의 접선을 이해하여 수열의 합 구하는 문제를 해결한다.

포물선 $y^2=4x$와 접하고 기울기가 a_n인 접선의 방정식은 $y=a_nx+\frac{1}{a_n}$이다.

이 접선이 점 $(-n,0)$을 지나므로

$0=a_n\times(-n)+\frac{1}{a_n}$, $a_n^{\ 2}=\frac{1}{n}$

접선이 제1사분면에서 접하므로 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{a_n}\right)^2=\sum_{n=1}^{10}n=55$

26. [출제의도] 등비수열의 합을 이용하여 지수방정식을 해결한다.

첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3a_5=a_1$에서 $(ar^2)\times(ar^4)=a$이므로 $a=\frac{1}{r^6}$이다.

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{r^n}\right)}{1-\frac{1}{r}}=\frac{r(r^n-1)}{ar^n(r-1)}$, $\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

이므로 $\frac{r(r^n-1)}{ar^n(r-1)}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$에서 $r^{n-1}=\frac{1}{a^2}$이다.

$r^{n-1}=r^{12}$이므로 $n=13$

27. [출제의도] 벡터의 내적을 이용하여 확률변수의 평균 구하는 문제를 해결한다.

7개의 점 중 서로 다른 2개의 점을 선택하는 경우의 수는 ${}_7C_2=21$이다.

서로 다른 두 벡터 $\overrightarrow{OP_i}$, $\overrightarrow{OP_j}$가 이루는 각의 크기를 θ_k라 하면 $\theta_k=\frac{k}{6}\pi$ $(k=1,2,3,4,5,6)$이다.

$|\overrightarrow{OP_i}|=|\overrightarrow{OP_j}|=1$이므로

$X=\overrightarrow{OP_i}\cdot\overrightarrow{OP_j}=|\overrightarrow{OP_i}||\overrightarrow{OP_j}|\cos\theta_k=\cos\theta_k$

가 되는 두 점의 순서쌍은

(P_0,P_k), (P_1,P_{k+1}), $\cdots$, (P_{6-k},P_6)

으로 $7-k$가지이고, $\cos\theta_k$의 값은 차례로

$\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1

이다. 따라서 확률변수 X의 확률분포를 나타내는 표는 다음과 같다.

X	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$	1

$E(X)=(-1)\times\frac{1}{21}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{2}{21}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{21}+0\times\frac{4}{21}$

$+\frac{1}{2}\times\frac{5}{21}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{6}{21}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{21}$

따라서 $p+q=21+2=23$

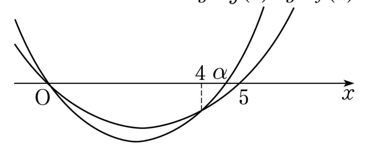
28. [출제의도] 분수부등식을 이용하여 방정식의 실근의 최댓값을 구한다.

(다)에서 구하는 부등식의 해는

$g(x)>0$, $f(x)\le g(x)$ 또는 $g(x)<0$, $f(x)\ge g(x)$

의 해와 같다.

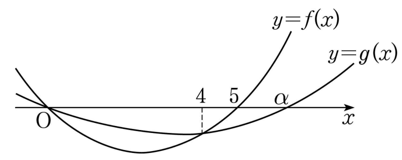
ⅰ) $4<\alpha<5$일 때



구하는 해는 $x<0$ 또는 $0<x\le4$ 또는 $x>\alpha$이다.

이때 조건 (다)를 만족시키는 α는 존재하지 않는다.

ⅱ) $\alpha>5$일 때



구하는 해는 $4\le x<\alpha$이다.

이때 조건 (다)를 만족시키는 정수 x의 개수가 10이므로 $13<\alpha\le14$이어야 한다.

따라서 α의 최댓값은 14이다.

29. [출제의도] 함수의 그래프의 성질을 이용하여 미분가능한 함수 구하는 문제를 해결한다.

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$g'(1)=\lim_{x\to1-0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$\lim_{x\to1-0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

(가)에서 $1<x<2$일 때, $g(x)=f(2-x)$이므로

$\lim_{x\to1+0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{f(2-x)-f(1)}{x-1}$

$=-\lim_{x\to1+0}\frac{f(2-x)-f(1)}{(2-x)-1}$

$=-f'(1)$

이다. 즉, $f'(1)=-f'(1)$에서 $f'(1)=0$ ⋯ ㉠

또, 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$g'(0)=\lim_{x\to-0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{g(x)-g(0)}{x}$

$\lim_{x\to+0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

$-1<x<0$일 때, $1<x+2<2$이고

$g(x)=g(x+2)=f(2-(x+2))=f(-x)$이므로

$\lim_{x\to-0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{f(-x)-f(0)}{x}$

$=-\lim_{x\to-0}\frac{f(-x)-f(0)}{(-x)-0}$

$=-f'(0)$

이다. 즉, $f'(0)=-f'(0)$에서 $f'(0)=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $f'(x)=3x(x-1)=3x^2-3x$이므로

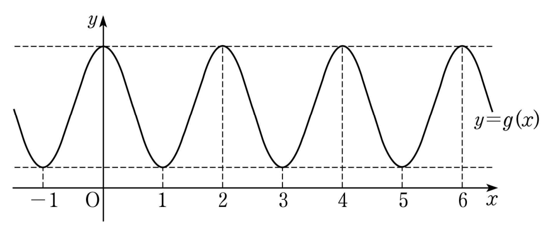
$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+C$ (C는 적분상수)

함수 $g(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로

$g(6)-g(3)=g(0)-g(1)=f(0)-f(1)$

$=C-\left(1-\frac{3}{2}+C\right)=\frac{1}{2}$

따라서 $p+q=2+1=3$



30. [출제의도] 평면의 법선벡터를 이용하여 정사영의 넓이 구하는 문제를 해결한다.

원점 O에서 평면 PQR에 내린 수선의 발은 삼각형 PQR의 무게중심 G와 같으므로 $\overrightarrow{OG}$는 평면 PQR의 법선벡터이다. 또, 면 PQR와 z축이 만나는 점을 A라 하면 $\overrightarrow{OA}$는 xy평면의 법선벡터이다.

따라서 평면 PQR와 xy평면이 이루는 각의 크기 θ는 두 벡터 $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OA}$가 이루는 각의 크기와 같다.

$\overline{OP}=1$, $\overline{PG}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\overline{OG}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{PG}^2}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

삼각형 OAG는 직각삼각형이고 $\overline{OA}\le\overline{OP}=1$이므로

$\cos\theta=\frac{\overline{OG}}{\overline{OA}}\ge\frac{\sqrt{6}}{3}$

정삼각형 PQR의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\cos\theta\geq\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

(단, 등호는 $\overline{OA}=1$, 즉 점 A가 세 꼭짓점 P, Q, R 중 하나일 때 성립한다.)

$k=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 $160k^2=20$이다.