2015학년도 대학수학능력시험 대비

2014학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 A형 정답

1	③	2	④	3	④	4	④	5	⑤
6	⑤	7	④	8	③	9	⑤	10	①
11	①	12	②	13	①	14	③	15	③
16	②	17	③	18	⑤	19	②	20	①
21	②	22	45	23	72	24	132	25	11
26	101	27	13	28	14	29	50	30	315

해 설

1. [출제의도] 지수를 계산하여 값을 구한다.

$(3^2)^{\frac{1}{2}}+(3^{-2})^{\frac{1}{2}}=3^{2\times\frac{1}{2}}+3^{-2\times\frac{1}{2}}=3+3^{-1}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

2. [출제의도] 그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성질을 이해하여 성분의 값을 계산한다.

그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬의 $(i,\ j)$성분과 $(j,\ i)$성분의 값이 같으므로 $a=0,\ b=1$

따라서 $2a+b=1$

3. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n^2}}{1}=4$$

4. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 값을 계산한다.

두 사건 $A,\ B$가 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}\end{aligned}$$

5. [출제의도] 미분계수를 이해하고 조건의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\{f(1+h)-3\}&=\lim_{h\to0}h\left\{\frac{f(1+h)-3}{h}\right\}\\&=\lim_{h\to0}h\cdot\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-3}{h}=0\end{aligned}$$

$\lim_{h\to0}\{f(1+h)-3\}=\lim_{h\to0}f(1+h)-3=0$이므로

$\lim_{h\to0}f(1+h)=3$

$f(x)$가 연속이므로

$f(1)=\lim_{h\to0}f(1+h)=3$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=\frac{3}{2}$$

따라서 $f'(1)+f(1)=\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$

6. [출제의도] 확률분포를 이해하여 주어진 조건의 값을 구한다.

$\mathrm{E}(6X)=6\mathrm{E}(X)=13$이므로 $\mathrm{E}(X)=\frac{13}{6}$

주어진 표를 이용하여 $\mathrm{E}(X)$를 구하면

$1\times\frac{1}{6}+2a+3b=\frac{13}{6}$

따라서 $2a+3b=2$

7. [출제의도] 행렬의 성질을 이용하여 성분의 값을 구한다.

행렬 A의 역행렬이 존재한다면

$A^2=A^{-1}A^3=A^{-1}O=O$이므로 $A^2=O$

$A=A^{-1}A^2=A^{-1}O=O$이므로 $A=O$

행렬 A는 영행렬이 될 수 없으므로 모순이다.

따라서 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않으므로

$-2a+4=0$에서 $a=2$이다.

8. [출제의도] 지수함수를 이해하고 함수의 값을 구한다.

$f(b)=a^b=3,\ f(c)=a^c=6$이므로 $a^b\times a^c=a^{b+c}=18$

$$f\left(\frac{b+c}{2}\right)=a^{\frac{b+c}{2}}=\left(a^{b+c}\right)^{\frac{1}{2}}=18^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{2}$$

9. [출제의도] 극한의 성질을 이해하여 등차수열의 일반항과 합으로 이루어진 극한값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2,\ d=3$인 등차수열이므로

$a_n=3n-1,\ a_{n+1}=3n+2$

첫째항부터 제n항까지 합 S_n은

$$S_n=\frac{n(2+3n-1)}{2}=\frac{3n^2+n}{2}$$

따라서
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_na_{n+1}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2+n}{2}}{(3n-1)(3n+2)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{18+\frac{6}{n}-\frac{4}{n^2}}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

10. [출제의도] 함수의 극한을 이해하고 극한값을 구한다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=2$이므로 $f(x)=x^2+2x+c$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{2}{x}+c$$

$$\lim_{x\to+0}x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+0}(1+2x+cx^2)=1$$

[다른 풀이]

$\frac{1}{x}=t$라 하면 $x\to+0$일 때, $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to+0}x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+2t+c}{t^2}=1$$

11. [출제의도] 정규분포를 이해하여 주어진 조건의 확률을 구한다.

확률변수 X는 정규분포 $N(16,0.3^2)$을 따른다.

$$\begin{aligned}&P(X\le15.25)\\&=P\left(\frac{X-16}{0.3}\le\frac{15.25-16}{0.3}\right)=P(Z\le-2.5)\\&=P(Z\ge2.5)=0.5-P(0\le Z\le2.5)=0.5-0.49=0.01\end{aligned}$$

12. [출제의도] 지수를 활용하여 실생활 관련 문제를 해결한다.

$T_0=60,\ T_s=20$이므로

$t=a,\ T=40$ 일 때

$40=20+(60-20)K^{-a}\cdots$㉠

$t=a+20,\ T=25$ 일 때

$25=20+(60-20)K^{-a-20}\cdots$㉡

㉠, ㉡에 의해서 $K^{-a}=\frac{1}{2}\cdots$㉢, $K^{-a-20}=\frac{1}{8}\cdots$㉣

㉢을 ㉣에 대입하면 $K^{-20}=\frac{1}{4}$

$K=2^{\frac{1}{10}}$을 ㉢에 대입하면 $2^{-\frac{a}{10}}=\frac{1}{2}=2^{-1}$

따라서 $a=10$

[다른 풀이]

$K^{-a}=\frac{1}{2},\ K^{-20}=\frac{1}{4}$이므로 $K^{-20}=\left(K^{-a}\right)^2=K^{-2a}$

따라서 $a=10$

13. [출제의도] 수열의 일반항을 구하는 과정을 추론한다.

주어진 식에 의하여

$$a_{n+1}-1=\frac{a_n-1}{2a_n-1}$$

이므로

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{2a_n-1}{a_n-1}=\frac{1+2(a_n-1)}{a_n-1}=\frac{1}{a_n-1}+\boxed{2}$$

이다. $b_n=\frac{1}{a_n-1}$이라 하면

$$b_{n+1}=b_n+\boxed{2}$$

수열 $\{b_n\}$은 $b_1=1$이고, 공차가 2인 등차수열이다.

$$b_n=\boxed{2n-1}\quad(n\ge1)$$

이다. 따라서 $a_n=\frac{1}{\boxed{2n-1}}+1\ (n\ge1)$이다.

따라서 $k=2,\ f(n)=2n-1$이므로 $f(k)=f(2)=3$

14. [출제의도] 함수의 극한과 연속을 이해하여 함숫값을 구한다.

$g(x)=ax+b\ (a\ne0)$라 하고 $h(x)=f(x)g(x)$라 하자.

$g(0)=\lim_{x\to1-0}f(x)=2$이므로 $b=2$

$h(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-0}h(x)=\lim_{x\to1+0}h(x)=h(1)$이다.

$\lim_{x\to1-0}h(x)=\lim_{x\to1-0}f(x)(ax+2)=2(a+2),$

$\lim_{x\to1+0}h(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)(ax+2)=0,$

$h(1)=f(1)(a+2)=a+2$이므로 $a+2=0$

따라서 $a=-2$이고 $g(x)=-2x+2$이므로 $g(-1)=4$이다.

15. [출제의도] 수열의 일반항을 이용하여 좌표 구하는 문제를 해결한다.

$\mathrm{P}_1\left(\frac{1}{2},\frac{a}{4}\right)$를 지나는 직선은 $y=-\frac{a}{2}x+\frac{a}{2}$

직선 $y=-\frac{a}{2}x+\frac{a}{2}$와 곡선 $y=ax^2$을 연립하면

$ax^2=-\frac{a}{2}x+\frac{a}{2}$

$2x^2+x-1=0$

$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=-1$

P_2는 $(-1,a),\ x_2=-1$

같은 방법으로 P_3을 구하면 P_3은 $(2,4a),\ x_3=2$

⋮

$x_n=\frac{1}{2}(-2)^{n-1}$

따라서 $x_{10}=-256$

16. [출제의도] 정적분을 활용하여 직선과 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하는 문제를 해결한다.

점 $\mathrm{P}_1\left(1,\frac{1}{3}\right)$은 곡선 $y=ax^2$ 위의 점이므로 $a=\frac{1}{3}$

직선 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$의 방정식은

$y=-\frac{1}{3}\times1\times x+2\times\frac{1}{3}\times1^2,\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

점 P_2의 x좌표는 직선 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$와 곡선 $y=\frac{1}{3}x^2$의

교점이므로 $\frac{1}{3}x^2=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

$x^2+x-2=0$

$x=-2$ 또는 $x=1$

점 P_2의 x좌표는 -2

구하는 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0}\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x^2\right)dx&=\left[-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}x^3\right]_{-2}^{0}\\&=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}-\frac{8}{9}=\frac{10}{9}\end{aligned}$$

17. [출제의도] 주어진 조건을 이용하여 행렬의 참, 거짓을 추론한다.

ㄱ. $(A+B)A=E$이므로 $A^{-1}=A+B$ (참)

ㄴ. $A(A+B)=(A+B)A=E$이므로 $A^2+AB=A^2+BA$

$AB=BA$이므로

$(AB)^2=ABAB=AABB=A^2B^2$ (참)

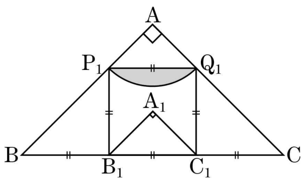
ㄷ. $B(A+B)=A-E$이고 $(A+B)^{-1}=A$이므로

$B=(A-E)A=A^2-A$

그러므로 $A^2+(A^2-A)A=E$에서 $A^3=E$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

18. [출제의도] 등비수열의 일반항을 추측하여 무한등비급수의 합을 구한다.



두 삼각형 P_1BB_1, Q_1CC_1 은 직각이등변삼각형이고 사각형 $P_1B_1C_1Q_1$ 은 정사각형이므로

$\overline{BB_1}=\overline{P_1B_1}=\overline{B_1C_1}=\overline{C_1C}$, $\overline{BC}:\overline{B_1C_1}=3:1$

그러므로 의 넓이의 비는 $9:1$

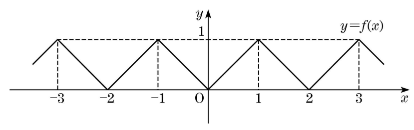
그런데 삼각형 AP_1Q_1 은 선분 P_1Q_1 이 빗변인 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AP_1}=\overline{AB}-\overline{BP_1}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

S_1 은 부채꼴 AP_1Q_1 의 넓이에서 삼각형 AP_1Q_1 의 넓이를 뺀 값이므로

$S_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{\pi-2}{18}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{\pi-2}{18}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{\pi-2}{16}$

19. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 정적분의 값 구하는 문제를 해결한다.



주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로

$g(a+4)-g(4)$

$=\int_{-2}^{a+4}f(t)dt-\int_{-2}^{a}f(t)dt$

$=\int_{-2}^{a+4}f(t)dt+\int_{a}^{-2}f(t)dt$

$=\int_{a}^{a+4}f(t)dt=\int_{0}^{4}f(t)dt=2\int_{0}^{2}f(t)dt=2$

20. [출제의도] 중복조합을 활용하여 실생활 관련 문제를 해결한다.

한 상자에 공을 담는 경우가 결정되면 다른 상자에 공을 담는 경우도 한 가지로 결정된다.

예를 들어 각 상자에는 상자의 색과 다른 색의 공을 담아야 하므로 빨간 상자에 파란 공 1개와 노란 공 4개를 담으면 노란 상자에는 파란 공 4개와 빨간 공 1개를, 파란 상자에는 노란 공 1개와 빨간 공 4개를 담아야 한다.

즉, 빨간 상자에 공을 담는 경우가 결정되면 다른 상자에 공을 담는 경우도 한 가지로 결정된다.

그러므로 노란 공 5개와 파란 공 5개 중에서 빨간 상자에 담을 5개의 공을 선택하는 방법의 수가 구하는 경우의 수이다.

따라서 노란 공과 파란 공 2종류의 공에서 중복을 허락하여 5개의 공을 빨간 상자에 담는 방법의 수는 ${}_{2+5-1}C_5=6$이다.

21. [출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 y좌표 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)=\frac{x^2}{2}$이라 하면 $f'(x)=x$

$f'(a)=a$이므로 접선 l의 방정식은 $y=ax-\frac{a^2}{2}$

직선 m은 l과 수직이므로 기울기가 $-\frac{1}{a}$

미분계수가 $-\frac{1}{a}$인 점 Q의 x좌표는 $f'(x)=-\frac{1}{a}$에서 $x=-\frac{1}{a}$

직선 m과 곡선 $y=\frac{x^2}{2}$의 접점은 $Q\left(-\frac{1}{a},\ \frac{1}{2a^2}\right)$

직선 PQ의 방정식은

$y=\dfrac{\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2a^2}}{a+\frac{1}{a}}(x-a)+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2-1}{2a}x+\frac{1}{2}$

이 직선이 y축과 만나는 점 R을 구하면 $R\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$

따라서 점 R의 y좌표는 $\frac{1}{2}$이다.

22. [출제의도] 이항정리를 이용하여 x^2의 계수를 계산한다.

$(x+1)^{10}=\sum_{r=0}^{10}{}_{10}C_r\ x^r\cdot 1^{10-r}$

따라서 x^2의 계수는 ${}_{10}C_2=45$이다.

23. [출제의도] 수열을 이해하고 주어진 조건의 값을 계산한다.

$a, 10, 17, b$가 등차수열이므로 공차는 $17-10=7$

그러므로 $a=10-7=3$, $b=17+7=24$

a, x, y, b가 등비수열이므로 $xy=ab=72$

24. [출제의도] 정적분의 성질을 이해하여 정적분의 값을 구한다.

정적분의 성질에 의해 $x=12$를 대입하면

$\int_{12}^{12}f(t)dt=0$이므로 $-12^3+12^2+\int_0^1 12f(t)dt=0$

따라서 $\int_0^1 f(x)dx=132$

[다른 풀이]

$\int_{12}^{x}f(t)dt=-x^3+x^2+\int_0^1 xf(t)dt$

$\qquad=-x^3+x^2+x\int_0^1 f(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt=c$라 하고 위 등식의 양변을 x에 관하여 미분하면 $f(x)=-3x^2+2x+c$

$\int_{12}^{x}f(t)dt=-x^3+x^2+\int_0^1 xf(t)dt$에 대입하면

$\int_{12}^{x}(-3t^2+2t+c)\,dt=\left[-t^3+t^2+c\,t\right]_{12}^{x}$

$=-x^3+x^2+cx-12(-132+c)=-x^3+x^2+cx$

즉, $-132+c=0$

따라서 $\int_0^1 f(x)dx=132$

25. [출제의도] 상용로그의 가수의 성질을 이용하여 주어진 집합의 원소의 개수를 구한다.

n의 값을 구하면 다음과 같다.

ⅰ) $1\le n\le 9$

$\log n$의 지표는 0이므로 $f(n)$의 값은

$\log 1$, $\log 2$, $\cdots$, $\log 9$

이 중 $f(n)<\log 2$인 n은 1

ⅱ) $10\le n\le 99$

$\log n$의 지표는 1이므로 $f(n)$의 값은

$\log\frac{10}{10}$, $\log\frac{11}{10}$, $\cdots$, $\log\frac{99}{10}$

이 중 $f(n)<\log 2$인 n은 10, 11, $\cdots$, 19

따라서 집합 A의 원소의 개수는 $1+10=11$이다.

26. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이해하여 최솟값 구하는 문제를 해결한다.

$|f(x)-g(x)|\ge 0$이므로

$f(x)-g(x)=0$일 때 최솟값을 갖는다.

$\log_2(x+10)-\log_{\frac{1}{2}}(x-10)=\log_2(x+10)+\log_2(x-10)$

$\qquad=\log_2(x^2-100)=0$

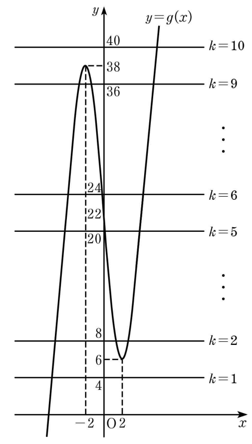
따라서 $p^2-100=1$에서 $p^2=101$이다.

27. [출제의도] 도함수를 활용하여 양의 실근의 개수를 추측한다.

$g(x)=x^3-12x+22$라 하면 $g'(x)=3(x-2)(x+2)$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	38	↘	6	↗



삼차방정식의 양의 실근의 개수 $f(k)$는 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=4k$가 제1사분면에서 만나는 교점의 개수와 같다.

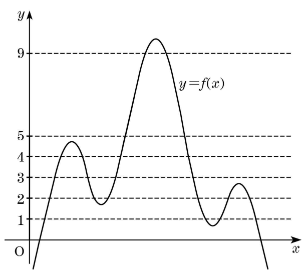
ⅰ) $k=1$일 때 $f(k)=0$

ⅱ) $k=2, 3, 4, 5$일 때 $f(k)=2$

ⅲ) $k=6, 7, \cdots, 10$일 때 $f(k)=1$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}f(k)=0\times 1+2\times 4+1\times 5=13$

28. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 평균 구하는 문제를 해결한다.



확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(X)=2\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{2}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{11}{3}$

따라서 $p=3$, $q=11$이므로 $p+q=14$이다.

29. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 극한값을 구한다.

직선 PQ의 방정식은

$y=(2a+1)(x-a)+a^2=(2a+1)x-(a^2+a)$

직선 PQ와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x=(2a+1)x-(a^2+a)$이고 $a\ne 0$일 때 $x=\frac{a^2+a}{2a}$

$f(a)=\frac{a^2+a}{2a}$이고 $\lim_{a\to 0}f(a)=\lim_{a\to 0}\frac{a^2+a}{2a}=\frac{1}{2}$

따라서 $100\lim_{a\to 0}f(a)=50$

30. [출제의도] 주어진 조건을 이용하여 수열의 합 구하는 문제를 해결한다.

(가)에서 $a_n+a_{n+1}\le|a_n|+a_{n+1}=n+6$

$n=2k-1$일 때 $a_{2k-1}+a_{2k}\le 2k+5$

그런데 $\sum_{n=1}^{40}a_n=\sum_{k=1}^{20}(a_{2k-1}+a_{2k})\le\sum_{k=1}^{20}(2k+5)=520$

(나)에서 $\sum_{n=1}^{40} a_n = 520$ 이므로

$a_{2k-1} = |a_{2k-1}|$ ($k = 1, 2, \cdots, 20$)

$a_{2k-1} \geq 0$이므로 $a_{2k-1} + a_{2k} = 2k+5$

따라서 $\sum_{n=1}^{30} a_n = \sum_{k=1}^{15} (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^{15} (2k+5) = 315$