2015학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 B형 정답 및 풀이

01. ④	02. ⑤	03. ③	04. ①	05. ②
06. ③	07. ⑤	08. ④	09. ①	10. ④
11. ①	12. ②	13. ①	14. ②	15. ⑤
16. ④	17. ②	18. ③	19. ⑤	20. ③
21. ①	22. 20	23. 14	24. 10	25. 19
26. 9	27. 7	28. 6	29. 11	30. 127

1. **출제의도** : 행렬의 연산법칙을 이용하여 행렬의 모든 성분의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$A+B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\a&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&2\\1+a&1\end{pmatrix}$$

이고, 행렬 $A+B$의 모든 성분의 합이 10이므로

$2+2+1+a+1=10$

$\therefore\ a=4$

정답 ④

2. **출제의도** : 함수의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{5}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^5$$
$$=e^5$$

정답 ⑤

3. **출제의도** : 삼각함수와 다항함수의 도함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\sin x-4x$에서

$f'(x)=\cos x-4$이므로

$f'(0)=\cos0-4$

$=1-4$

$=-3$

정답 ③

4. **출제의도** : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^1 2e^{2x}dx=\left[e^{2x}\right]_0^1$$
$$=e^2-1$$

정답 ①

5. **출제의도** : 벡터의 내적을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\vec{a}\perp(\vec{a}-t\vec{b})$이므로

$\vec{a}\cdot(\vec{a}-t\vec{b})=0$이다.

즉, $\vec{a}\cdot\vec{a}-t(\vec{a}\cdot\vec{b})=0$

$|\vec{a}|^2-t(\vec{a}\cdot\vec{b})=0$

$2^2-t\times2=0$

$\therefore\ t=2$

정답 ②

6. **출제의도** : 분수방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{(x+2)(x^2+1)}{x-1}\le0$$

$(x+2)(x^2+1)(x-1)\le0\ \ (x\ne1)$

이때, $x^2+1>0$이므로

$(x+2)(x-1) \le 0 \ \ (x \ne 1)$

$\therefore \ -2 \le x < 1$

따라서, 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0$으로

3개이다.

정답 ③

7. **출제의도** : 합성변환을 이용하여 이동한 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직각이등변삼각형 OAB에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OA}}=1$

$\therefore \ \mathrm{A}(1,\ 0)$

직각이등변삼각형 OGH에서

$\overline{\mathrm{GH}}=2\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OH}}=2$

$\therefore \ \mathrm{H}(0,\ -2)$

합성변환 $g \circ f$를 나타내는 행렬은

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$

이고,

$\begin{pmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -k \end{pmatrix}$

이므로

합성변환 $g \circ f$에 의하여 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$이 옮겨지는 점의 좌표는 $(0,\ -k)$이다.

이 점이 점 $\mathrm{H}(0,\ -2)$와 일치하므로

$k=2$이다.

정답 ⑤

8. **출제의도** : 삼각방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin x = \sin 2x$에서

$\sin x = 2\sin x \cos x$

$\sin x(2\cos x - 1)=0$

$\therefore \ \sin x = 0$ 또는 $\cos x = \dfrac{1}{2}$

따라서, $0 \le x \le \pi$에서 해를 구하면

$x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{3}$

그러므로 모든 해의 합은 $\dfrac{4}{3}\pi$이다.

정답 ④

9. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 두 확률 $\mathrm{P}(A\cup B)$, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 비를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{3}\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{5}\mathrm{P}(B)$에서

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{2}\mathrm{P}(A\cap B)$

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{5}{2}\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\dfrac{3}{2}\mathrm{P}(A\cap B)+\dfrac{5}{2}\mathrm{P}(A\cap B)\\&\quad -\mathrm{P}(A\cap B)\\&=3\mathrm{P}(A\cap B)\end{aligned}$$

$\therefore \ \dfrac{\mathrm{P}(A\cup B)}{\mathrm{P}(A\cap B)}=\dfrac{3\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)}=3$

정답 ①

10. **출제의도** : 실생활에 활용된 상용로그에 관련된 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

교통량이 도로용량의 2배이므로

$V=2C$

또, 통행시간은 기준 통행시간 t_0의 $\dfrac{7}{2}$배

이므로

$t=\frac{7}{2}t_0$

이 값을 $\log\left(\frac{t}{t_0}-1\right)=k+4\log\frac{V}{C}$

에 대입하면

$$\log\left(\frac{\frac{7}{2}t_0}{t_0}-1\right)=k+4\log\frac{2C}{C}$$

$$\log\frac{5}{2}=k+4\log 2$$

$$\therefore\ k=\log\frac{5}{2}-4\log 2$$

$$=\log\frac{10}{2^2}-4\log 2$$

$$=1-6\log 2$$

정답 ④

11. 출제의도 : 포물선과 직선이 접할 조건을 이용하여 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

꼭짓점의 좌표가 $(0,\,0)$이고 초점이 $(a_n,\,0)$인 포물선의 방정식은

$y^2=4a_nx$

이고, 기울기가 n인 접선의 방정식은

$$y=nx+\frac{a_n}{n}\cdots㉠$$

㉠과 직선 $y=nx+(n+1)$이 일치하므로

$$\frac{a_n}{n}=n+1$$

$$\therefore\ a_n=n(n+1)\ \ (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{5}a_n=\sum_{n=1}^{5}n(n+1)$$

$$=2+6+12+20+30$$

$$=70$$

정답 ①

12. 출제의도 : 수열에 관련된 식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 식(*)에 의하여

$$\frac{S_n}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}S_k\ \ (n\geq 2)\ \text{---}㉠$$

이다. (*)에서 ㉠을 빼면

$$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\sum_{k=1}^{n}S_k-\sum_{k=1}^{n-1}S_k$$

$$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=S_n$$

$$\frac{S_{n+1}}{n+1}=\frac{n+1}{n}S_n$$

$$\therefore\ \frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\boxed{(n+1)^2}}{n}\ \ (n\geq 2)$$

이다. ㉠으로부터 $S_2=2$이고,

$$S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}\times\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\times\cdots\times\frac{S_3}{S_2}\times S_2$$

이므로

$$S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}\times\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\times\cdots\times\frac{S_3}{S_2}\times S_2$$

$$S_n=\frac{n^2}{n-1}\times\frac{(n-1)^2}{n-2}\times\cdots\times\frac{3^2}{2}\times 2$$

$$\therefore\ S_n=n!\times\boxed{\frac{n}{2}}\ \ (n\geq 3)$$

이다. 그러므로 a_n은

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=1,\,2)\\ \frac{n^2-n+1}{2}\times(n-1)! & (n\geq 3)\end{cases}$$

이다.

따라서, $f(n)=(n+1)^2$, $g(n)=\frac{n}{2}$이므로

$f(4)\times g(20)=25\times 10=250$

정답 ②

13. **출제의도** : 정적분을 이용하여 무한 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\angle P_m O P_{m+1} = \frac{1}{2n} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4n}$$

$$(m = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1)$$

이므로 삼각형 $OP_{n-k}P_{n+k}$에서

$$\angle P_{n+k} O P_{n-k} = 2k \times \frac{\pi}{4n} = \frac{k\pi}{2n}$$

$$(n = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

따라서 삼각형 $OP_{n-k}P_{n+k}$의 넓이 S_k는

$$S_k = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x\, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1$$

$$= 0 + \frac{1}{\pi}\cos 0$$

$$= \frac{1}{\pi}$$

정답 ①

14. **출제의도** : 확률분포를 이용하여 평균을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

작은 부채꼴 하나의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{24}$$

이때, 점 P에 따라 두 부채꼴의 넓이의 차는 0, $2\times\frac{\pi}{24}$, $4\times\frac{\pi}{24}$의 값을 가질 수 있다. 그러므로 X의 확률분포를 구하면 다음과 같다.

X	0	$2\times\frac{\pi}{24}$	$4\times\frac{\pi}{24}$
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

따라서,

$$\mathrm{E}(X) = 0 \times \frac{1}{5} + \frac{2\pi}{24} \times \frac{2}{5} + \frac{4\pi}{24} \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{\pi}{10}$$

정답 ②

15. **출제의도** : 좌표공간에서 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선 l의 방향벡터는 $\vec{u} = (a, -6, 0)$이고 직선 l의 방정식은

$$\frac{x-a}{a} = \frac{y}{-6}, \quad z = 0$$

이다. 점 $A(0, 0, 4)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 $H(x_1, y_1, 0)$이라 하고,

$$\frac{x_1 - a}{a} = \frac{y_1}{-6} = t \quad (t\text{는 실수})$$

로 놓으면 $x_1 = at + a$, $y_1 = -6t$이므로

$H(at+a, -6t, 0)$이다.

$\overrightarrow{AH} = (at+a, -6t, -4)$이고

$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$이므로

$(at+a, -6t, -4) \cdot (a, -6, 0) = 0$에서

$$a^2t + a^2 + 36t = 0, \quad t = -\frac{a^2}{a^2+36}$$

$\overline{AH} = 5$이므로

$$(at+a)^2 + 36t^2 + 16 = 25$$

$(a^2+36)t^2+2a^2t+a^2-9=0$

$(a^2+36)\times\dfrac{a^4}{(a^2+36)^2}-\dfrac{2a^4}{a^2+36}+a^2-9=0$

$-\dfrac{a^4}{a^2+36}+a^2-9=0$

$a^2-9=\dfrac{a^4}{a^2+36}$

$a^4+27a^2-324=a^4$

$27a^2=324$

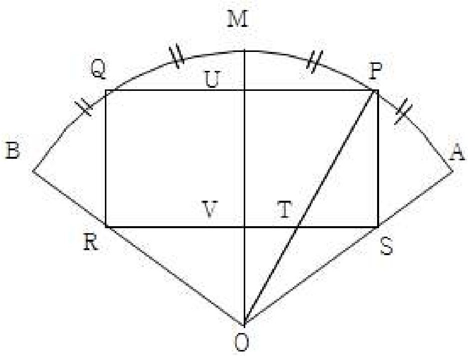
$\therefore\ a^2=12$

정답 ⑤

16. 출제의도 : 무한등비급수에 관련된 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

그림과 같이 부채꼴에 내접하는 사각형의 각 꼭짓점을 P, Q, R, S라 하고 선분 OP가 이 직사각형과 만나는 점을 T, 선분 OM이 이 직사각형과 만나는 점을 U, V라 하자.



삼각형 OPU에서

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{UP}}$

$=2\times\overline{\mathrm{OP}}\sin\dfrac{\pi}{6}$

$=1$

또, 두 삼각형 OPU, OSV에서

$\overline{\mathrm{PS}}=\overline{\mathrm{UV}}$

$=\overline{\mathrm{OU}}-\overline{\mathrm{OV}}$

$=\overline{\mathrm{OP}}\cos\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\overline{\mathrm{VS}}}{\tan\dfrac{\pi}{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

그러므로

$S_1=\dfrac{1}{2}\times1^2\times\dfrac{2}{3}\pi-\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PS}}$

$=\dfrac{\pi-\sqrt{3}}{3}$

한편, 직사각형에 내접하는 부채꼴의 반지름의 길이를 r이라 하면

$r=\overline{\mathrm{UV}}=\overline{\mathrm{PS}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

그러므로 넓이의 비는 $1^2:\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$ 즉, $1:\dfrac{1}{3}$이다.

따라서,

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{\pi-\sqrt{3}}{3}}{1-\dfrac{1}{3}}$

$=\dfrac{\pi-\sqrt{3}}{2}$

정답 ④

17. 출제의도 : 부등식의 영역을 이용하여 조건부확률의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

15개의 점 중에서 서로 다른 두 점을

선택하는 방법의 수는

$${}_{15}\mathrm{C}_2=\frac{15\times 14}{2\times 1}=105\,(가지)$$

y좌표가 1인 두 점을 선택하는 방법의 수는

$${}_{7}\mathrm{C}_2=21\,(가지)$$

y좌표가 2인 두 점을 선택하는 방법의 수는

$${}_{5}\mathrm{C}_2=10\,(가지)$$

y좌표가 3인 두 점을 선택하는 방법의 수는

$${}_{3}\mathrm{C}_2=3\,(가지)$$

이다. 선택된 두 점의 y좌표가 같은 사건을 A, 선택된 두 점의 y좌표가 2인 사건을 B라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{21+10+3}{105}=\frac{34}{105}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{10}{105}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{10}{105}}{\frac{34}{105}}=\frac{5}{17}$$

정답 ②

18. **출제의도** : 행렬에 관한 성질을 알고 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $AB+A+B=2E$에서

$AB+A+B+E=3E$

$(A+E)(B+E)=3E$ --㉠

$(A+E)\frac{1}{3}(B+E)=E$

$\therefore\ (A+E)^{-1}=\frac{1}{3}(B+E)$ (참)

ㄴ. ㉠에서

$(A+E)(B+E)=3E$ --㉡

이므로

$(B+E)(A+E)=3E$ --㉢

㉡과 ㉢을 전개하면

$AB+A+B+E=3E$

$BA+B+A+E=3E$

두 식을 변변 빼면

$AB-BA=O$

$\therefore\ AB=BA$ (참)

ㄷ. $A^3+E=O$에서

$(A+E)(A^2-A+E)=O$

이때, ㄱ에서 $A+E$의 역행렬이 존재하므로

$(A+E)^{-1}(A+E)(A^2-A+E)=(A+E)^{-1}O$

$A^2-A+E=O$

그러므로

$(A+E)(A-2E)=-3E$

$(A+E)\left\{-\frac{1}{3}(A-2E)\right\}=E$

$\therefore\ (A+E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A-2E)$

ㄱ에서 $(A+E)^{-1}=\frac{1}{3}(B+E)$이므로

$-\frac{1}{3}(A-2E)=\frac{1}{3}(B+E)$

$A-2E=-B-E$

$\therefore\ A+B=E$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답 ③

19. **출제의도** : 정규분포를 따르는 확률변수에 대하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

A 과목 시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르고,

B 과목 시험 점수를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m+3, \sigma^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X \geq 80) = 0.09$ 이므로

$$\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.09$$

$$\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.5 - 0.09 = 0.41$$

$$\therefore \frac{80-m}{\sigma} = 1.34 \qquad \cdots ㉠$$

$\mathrm{P}(Y \geq 80) = 0.15$ 이므로

$$\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{80-m-3}{\sigma}\right) = 0.15$$

$$\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{77-m}{\sigma}\right) = 0.5 - 0.15 = 0.35$$

$$\therefore \frac{77-m}{\sigma} = 1.04 \qquad \cdots ㉡$$

㉠÷㉡에서 $\dfrac{80-m}{77-m} = \dfrac{1.34}{1.04} = \dfrac{67}{52}$

$4160 - 52m = 5159 - 67m$

$15m = 999$, $m = \dfrac{333}{5} = 66.6$

㉠에서 $\sigma = \dfrac{80-66.6}{1.34} = \dfrac{13.4}{1.34} = 10$

$\therefore m + \sigma = 66.6 + 10 = 76.6$

정답 ⑤

20. 출제의도 : 미분을 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $f(x) = x^n e^{-x}$에서

$$f\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-\frac{n}{2}} \quad ---㉠$$

또,

$$f'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}$$
$$= x^{n-1}e^{-x}(n-x)$$

이므로

$$f'\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} \times e^{-\frac{n}{2}} \times \frac{n}{2}$$
$$= \left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-\frac{n}{2}} \quad ---㉡$$

㉠과 ㉡에서

$f\left(\dfrac{n}{2}\right) = f'\left(\dfrac{n}{2}\right)$ (참)

ㄴ. $f'(x) = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$이므로

$f'(x) = 0$에서 $x = n$

또, $0 < x < n$일 때, $f'(x) > 0$이고 $x > n$일 때, $f'(x) < 0$이므로 함수 $f(x)$는 $x = n$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. $f'(x) = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$에서

$$f''(x) = (n-1)x^{n-2}e^{-x}(n-x)$$
$$+ x^{n-1}(-e^{-x})(n-x)$$
$$+ x^{n-1}e^{-x}(-1)$$
$$= x^{n-2}e^{-x}(x^2 - 2nx + n^2 - n)$$

$n = 4$일 때, $f''(x) = x^2 e^{-x}(x^2 - 8x + 12)$이므로 $f''(0) = 0$이지만 x의 값이 0보다 작은 값에서 0보다 큰 값으로 변할 때, $f''(x)$의 부호가 변하지 않는다.

그러므로 점 $(0, 0)$이 곡선 $y = f(x)$의 변곡점이라 할 수 없다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답 ③

21. 출제의도 : 지표와 가수의 성질을 이용하여 수열의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log t = f(t) + g(t)$

$f(t)$는 정수, $0 \leq g(t) < 1$ 이므로

$-\frac{1}{3} \le g(t) - \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$

$0 \le \left\{g(t) - \frac{1}{3}\right\}^2 < \frac{4}{9}$

$0 \le 9n\left\{g(t) - \frac{1}{3}\right\}^2 < 4n$

$-n \le 9n\left\{g(t) - \frac{1}{3}\right\}^2 - n < 3n$

즉, $-n \le f(t) < 3n$이고,

$f(t)$는 정수이므로 $f(t)$의 값은

$-n,\ -n+1,\ -n+2,\ \cdots, 0, 1, 2,\ \cdots,\ 3n-1$

이다.

$$\begin{aligned} a_n &= (-n)+(-n+1)+\cdots+(-1)+0 \\ &\quad +1+2+\cdots+n \\ &\quad +(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-1) \\ &= (n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-1) \\ &= \frac{(2n-1)\{(n+1)+(3n-1)\}}{2} \\ &= 2n(2n-1) \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n(2n-1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n-2}{n} = 4$$

정답 ①

22. **출제의도** : 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수열 $\{a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이므로 첫째항을 a라 하면

$a_1 + a_2 + a_4$

$= 2 + 2a + 2^3 a$

$= 11a$

$= 55$

$\therefore\ a = 5$

따라서, $a_3 = 5 \times 2^2 = 20$

정답 20

23. **출제의도** : 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수 조건에 의하여

$x > 0$, $x - 7 > 0$이므로 $x > 7$

$\log_8 \frac{x}{x-7} = \frac{1}{3}$ 에서

$\frac{x}{x-7} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$

$x = 2x - 14$

$x = 14$

이고, 이는 진수의 조건을 만족하므로 구하는 해는 14이다.

정답 14

24. **출제의도** : 평면의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선의 방향벡터 $\vec{d} = (2, a, 4)$가 평면의 법선벡터이다.

또, 평면이 점 $(1, 1, -2)$를 지나므로 구하는 평면의 방정식은

$2(x-1) + a(y-1) + 4(z+2) = 0$

$2x + ay + 4z - a + 6 = 0$

이때, 평면의 방정식이

$2x + 5y + bz + c = 0$

이므로

$a = 5$, $b = 4$, $-a + 6 = c$

따라서,

$a + b + c = 5 + 4 + 1 = 10$

정답 10

25. 출제의도 : 타원과 쌍곡선의 초점의 좌표를 구하여 사각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

타원 $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1$에서 $a>1$이므로

두 초점의 좌표는

$A(0,\ \sqrt{a^2-1}\,)$, $B(0,\ -\sqrt{a^2-1}\,)$

이고, 쌍곡선 $x^2-y^2=1$의 두 초점의 좌표는

$C(\sqrt{2},0)$, $D(-\sqrt{2},0)$

이다.

네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 12이므로

$2\times\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{a^2-1}=12$

$\sqrt{a^2-1}=3\sqrt{2}$

$a^2-1=18$

$\therefore\ a^2=19$

정답 19

26. 출제의도 : 중복조합의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a=2^x,\ b=2^y,\ c=2^z$

$(x, y, z$는 1이상의 자연수$)$

라 하면 $abc=2^n$에서

$2^{x+y+z}=2^n$

$\therefore\ x+y+z=n$ --㉠

$x=x'+1,\ y=y'+1,\ z=z'+1$이라 하면

$x',\ y',\ z'$은 0이상의 정수이고 ㉠은

$x'+y'+z'=n-3$

이때, 순서쌍 (a,b,c)의 개수는

${}_3H_{n-3}$

$={}_{n-1}C_{n-3}$

$={}_{n-1}C_2$

$=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$

$=28$

따라서, $n=9$

정답 9

27. 출제의도 : 이차함수를 이용하여 무리방정식의 실근의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x(x+4)=x^2+4x$이므로

$f(1)=5$이다.

따라서 $f(t)=5$인 t의 값은

$t^2+4t=5$에서

$t^2+4t-5=0$, $(t+5)(t-1)=0$

$t=-5,\ 1$

이므로

$f(\sqrt{x+1}-x)=f(1)=5$에서

$\sqrt{x+1}-x=-5$ 또는

$\sqrt{x+1}-x=1$이다.

(ⅰ) $\sqrt{x+1}-x=-5$일 때,

$\sqrt{x+1}=x-5$ $\cdots$㉠

양변을 제곱하면

$x+1=x^2-10x+25$

$x^2-11x+24=0$

$(x-3)(x-8)=0$

㉠에서 $x\ge5$이므로 $x=8$

(ⅱ) $\sqrt{x+1}-x=1$일 때,

$\sqrt{x+1}=x+1$ $\cdots$㉡

양변을 제곱하면

$x+1=x^2+2x+1$

$x^2+x=0$

$x(x+1)=0$

$x=-1$ 또는 $x=0$

이는 ㉡을 만족시킨다.

따라서 주어진 무리방정식의 실근은 $8, 0, -1$이므로 구하는 합은 7이다.

정답 7

28. 출제의도 : 삼각함수의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 B에서 직선 l_1에 내린 수선의 발을 B′이라 하면 삼각형 ABB′에서

$$\overline{AB}=\frac{1}{\sin\theta}$$

삼각형 ABC에서 $\angle ACB=\pi-5\theta$이므로

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=\frac{\frac{1}{\sin\theta}}{\sin(\pi-5\theta)}$$

$$\therefore\ \overline{BC}=\frac{1}{\sin5\theta}\quad ---㉠$$

그러므로

$$T_1=\frac{1}{2}\times\overline{BA}\times\overline{BC}\times\sin4\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sin\theta}\times\frac{1}{\sin5\theta}\times\sin4\theta$$

$$=\frac{\sin4\theta}{2\sin\theta\sin5\theta}$$

또, 삼각형 BCD에서

$\angle CBD=\pi-5\theta$, $\angle CDB=3\theta$이므로

$$\frac{\overline{BC}}{\sin3\theta}=\frac{\overline{BD}}{\sin2\theta}$$

㉠에서

$$\overline{BD}=\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta\sin5\theta}$$

그러므로

$$T_2=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{BD}\times\sin(\pi-5\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta\sin5\theta}\times\frac{1}{\sin5\theta}\times\sin5\theta$$

$$=\frac{\sin2\theta}{2\sin3\theta\sin5\theta}$$

따라서,

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{T_1}{T_2}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\frac{\sin4\theta}{2\sin\theta\sin5\theta}}{\frac{\sin2\theta}{2\sin3\theta\sin5\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin4\theta\sin3\theta}{\sin\theta\sin2\theta}$$

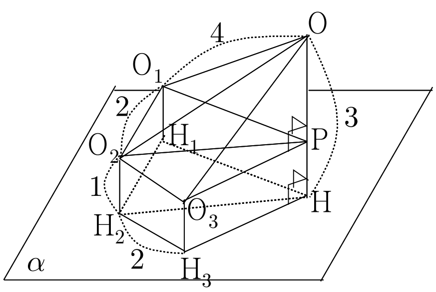
$$=6\lim_{\theta\to+0}\frac{\frac{\sin4\theta}{4\theta}\times\frac{\sin3\theta}{3\theta}}{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin2\theta}{2\theta}}$$

$$=6$$

정답 6

29. 출제의도 : 공간도형의 성질을 이용하여 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



구 S의 중심을 O라 하고

네 점 O, O_1, O_2, O_3에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 H, H_1, H_2, H_3이라 하면

$\overline{OH}=3$, $\overline{O_1H_1}=\overline{O_2H_2}=\overline{O_3H_3}=1$

또, 점 O_1에서 선분 OH에 내린 수선의 발을 P라 하면

$\overline{O_1P} \perp \overline{OH}$, $\overline{O_2P} \perp \overline{OH}$, $\overline{O_3P} \perp \overline{OH}$

두 구 S, S_1이 외접하므로

$\overline{OO_1} = 3+1 = 4$

마찬가지로, $\overline{OO_2} = \overline{OO_3} = 4$

직각삼각형 OO_1P에서 $\overline{OP} = 3-1 = 2$

이므로 $\overline{O_1P} = \sqrt{4^2-2^2} = 2\sqrt{3}$

마찬가지로, $\overline{O_2P} = \overline{O_3P} = 2\sqrt{3}$

평면 $O_1O_2H_2H_1$은 평면 β와 같고,

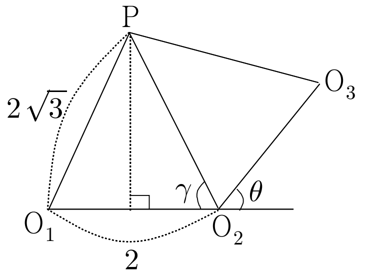
평면 $O_2H_2H_3O_3$은 단면 D를 포함한다.

또, 두 평면 $O_1O_2H_2H_1$, $O_2H_2H_3O_3$의

교선이 직선 O_2H_2이므로 두 평면이 이

루는 각을 θ라 하면

$\theta = \pi - \angle O_1O_2O_3$이다.



삼각형 PO_1O_2에서

$\overline{O_1O_2} = 2$, $\overline{O_2P} = 2\sqrt{3}$ 이므로

$\angle O_1O_2P = \gamma$라 하면

$$\cos\gamma = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

두 삼각형 PO_1O_2, PO_2O_3은 합동이므로

$\angle O_1O_2O_3 = 2\gamma$

$$\cos 2\gamma = 2\cos^2\gamma - 1 = 2\times\frac{1}{12} - 1 = -\frac{5}{6}$$

$$\therefore\ \cos\theta = \cos(\pi - 2\gamma) = -\cos 2\gamma = \frac{5}{6}$$

단면 D는 반지름의 길이가 1인 원이므로 단면 D의 넓이는 π이고,

평면 β 위로의 정사영의 넓이는

$$\pi\times\cos\theta = \pi\times\frac{5}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

$\therefore\ p+q = 6+5 = 11$

정답 11

30. 출제의도 : 주어진 조건으로부터 정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형의 넓이는 넓이가 $\dfrac{t+1}{t}$이므로

$$\frac{1}{2}tf(t) + \frac{1}{2}\{f(t)+f(t+1)\} - \frac{1}{2}(t+1)f(t+1) = \frac{t+1}{t}$$

$$\frac{1}{2}\{(t+1)f(t) - tf(t+1)\} = \frac{t+1}{t}$$

양변에 $\dfrac{2}{t(t+1)}$을 곱하면

$$\frac{f(t)}{t} - \frac{f(t+1)}{t+1} = \frac{2}{t^2}$$

$$\therefore\ \frac{f(t+1)}{t+1} = \frac{f(t)}{t} - \frac{2}{t^2}$$

이때, $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}$로 놓으면

$$g(t+1) = g(t) - \frac{2}{t^2}$$

한편,

$$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx$$

$$= \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)dx$$

$$= \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx + \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)dx$$

$$= \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx + \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x+1)dx$$

$$=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx+\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}}\left\{g(x)-\frac{2}{x^2}\right\}dx$$

$$=2\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx+\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx$$

$$=2\left\{\int_{\frac{7}{2}}^{4} g(x)dx+\int_{4}^{\frac{9}{2}} g(x)dx\right\}+\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx$$

$$=2\left\{\int_{\frac{7}{2}}^{4} g(x)dx+\int_{3}^{\frac{7}{2}} g(x+1)dx\right\}+\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx$$

$$=2\left\{\int_{\frac{7}{2}}^{4} g(x)dx+\int_{3}^{\frac{7}{2}}\left\{g(x)-\frac{2}{x^2}\right\}dx\right\}+\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx$$

$$=2\left\{\int_{3}^{4} g(x)dx+\int_{3}^{\frac{7}{2}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx\right\}+\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx$$

$$=2\int_{3}^{4} g(x)dx+2\int_{3}^{\frac{7}{2}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx+\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx$$

$$=2\int_{3}^{4} g(x)dx+\int_{3}^{\frac{7}{2}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx+\int_{3}^{\frac{9}{2}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx$$

한편,

$$\int_{3}^{4} g(x)dx$$

$$=\int_{2}^{3} g(x+1)dx$$

$$=\int_{2}^{3} g(x)dx+\int_{2}^{3}\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx$$

$$=\int_{1}^{2} g(x+1)dx+\int_{2}^{3}\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx$$

$$=\int_{1}^{2} g(x)dx+\int_{1}^{2}\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx+\int_{2}^{3}\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx$$

$$=\int_{1}^{2} g(x)dx+\int_{1}^{3}\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx$$

$$=2+\left[\frac{2}{x}\right]_{1}^{3}$$

$$=2-\frac{4}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\ \text{---㉠}$$

또,

$$\int_{3}^{\frac{7}{2}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx+\int_{3}^{\frac{9}{2}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{2}{x}\right]_{3}^{\frac{7}{2}}+\left[\frac{2}{x}\right]_{3}^{\frac{9}{2}}$$

$$=-\frac{2}{21}-\frac{2}{9}$$

$$=-\frac{20}{63}\ \text{--㉡}$$

따라서, ㉠과 ㉡에서

$$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)dx$$

$$=2\times\frac{2}{3}-\frac{20}{63}$$

$$=\frac{84-20}{63}$$

$$=\frac{64}{63}$$

이므로

$p+q=63+64=127$

정답 127