제 2 교시

수학 영역(B 형)

5지선다형

1. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\a&0\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A+B$의 모든 성분의 합이 10일 때, a의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{5}{x}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{e^5}$ ② $\frac{1}{e^3}$ ③ 1 ④ e^3 ⑤ e^5

3. 함수 $f(x)=\sin x-4x$에 대하여 $f'(0)$의 값은? [2점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

4. $\int_0^1 2e^{2x}dx$ 의 값은? [3점]

① e^2-1 ② e^2+1 ③ e^2+2
④ $2e^2-1$ ⑤ $2e^2+1$

5. 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$이고 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$일 때, 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{a}-t\vec{b}$가 서로 수직이 되도록 하는 실수 t의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

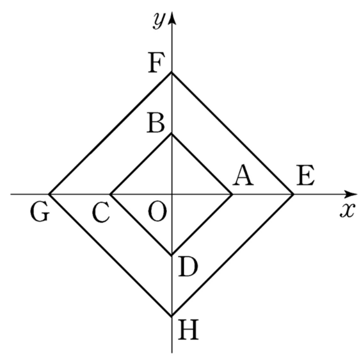
6. 분수부등식

$$\frac{(x+2)(x^2+1)}{x-1} \le 0$$

을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

7. 그림과 같이 좌표평면에 모든 꼭짓점이 좌표축 위에 있고 한 변의 길이가 각각 $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$인 정사각형 ABCD와 정사각형 EFGH가 있다. 두 일차변환 f, g를 나타내는 행렬을 각각 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$이라 하자. 합성변환 $g\circ f$에 의하여 점 A가 점 H로 옮겨질 때, 상수 k의 값은? [3점]



① -2　② $-\sqrt{2}$　③ -1
④ $\sqrt{2}$　⑤ 2

8. $0 \le x \le \pi$일 때, 삼각방정식

$$\sin x = \sin 2x$$

의 모든 해의 합은? [3점]

① π ② $\frac{7}{6}\pi$ ③ $\frac{5}{4}\pi$ ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

9. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{2}{3}\mathrm{P}(A) = \frac{2}{5}\mathrm{P}(B)$$

일 때, $\frac{\mathrm{P}(A \cup B)}{\mathrm{P}(A \cap B)}$의 값은? (단, $\mathrm{P}(A \cap B) \ne 0$이다.) [3점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

10. 도로용량이 C인 어느 도로구간의 교통량을 V, 통행시간을 t라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log\left(\frac{t}{t_0} - 1\right) = k + 4\log\frac{V}{C} \quad (t > t_0)$$

(단, t_0은 도로 특성 등에 따른 기준통행시간이고, k는 상수이다.)

이 도로구간의 교통량이 도로용량의 2배일 때 통행시간은 기준통행시간 t_0의 $\frac{7}{2}$배이다. k의 값은? [3점]

① $-4\log 2$ ② $1-7\log 2$ ③ $-3\log 2$
④ $1-6\log 2$ ⑤ $1-5\log 2$

11. 자연수 n에 대하여 직선 $y=nx+(n+1)$이 꼭짓점의 좌표가 $(0, 0)$이고 초점이 $(a_n, 0)$인 포물선에 접할 때, $\sum_{n=1}^{5} a_n$의 값은? [3점]

① 70 ② 72 ③ 74 ④ 76 ⑤ 78

12. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$라 할 때,

$$\frac{S_{n+1}}{n+1}=\sum_{k=1}^{n} S_k \quad (n \geq 1) \cdots\cdots (*)$$

이 성립한다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

주어진 식 (*)에 의하여

$$\frac{S_n}{n}=\sum_{k=1}^{n-1} S_k \quad (n \geq 2) \cdots\cdots ㉠$$

이다. (*)에서 ㉠을 빼서 정리하면

$$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\boxed{(가)}}{n} \quad (n \geq 2)$$

이다. ㉠으로부터 $S_2=2$이고,

$$S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}\times\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\times\cdots\times\frac{S_3}{S_2}\times S_2 \quad (n \geq 3)$$

이므로

$$S_n=n!\times\boxed{(나)} \quad (n \geq 3)$$

이다. 그러므로 a_n은

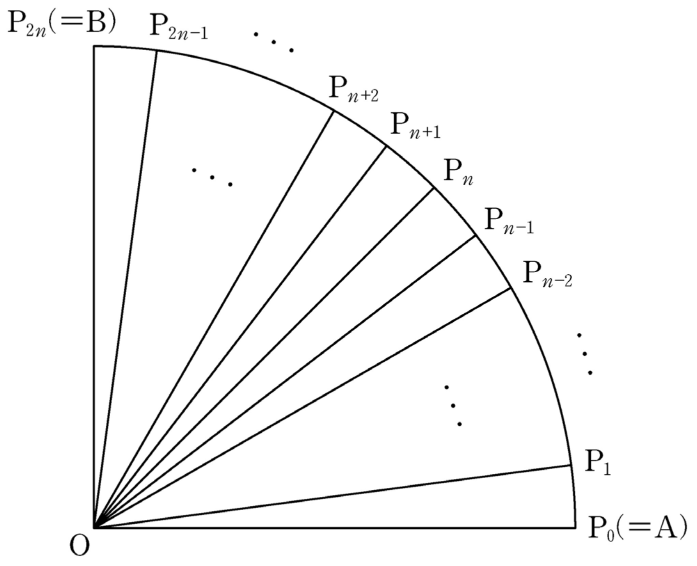
$$a_n=\begin{cases} 1 & (n=1, 2) \\ \dfrac{n^2-n+1}{2}\times(n-1)! & (n \geq 3) \end{cases}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(4)\times g(20)$의 값은? [3점]

① 225 ② 250 ③ 275 ④ 300 ⑤ 325

[13～14] 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다.
자연수 n에 대하여 호 AB를 $2n$등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $\mathrm{P}_0(=\mathrm{A})$, P_1, P_2, $\cdots$, P_{2n-1}, $\mathrm{P}_{2n}(=\mathrm{B})$라 하자.
13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. 주어진 자연수 n에 대하여 $S_k\,(1 \le k \le n)$을 삼각형 $\mathrm{OP}_{n-k}\mathrm{P}_{n+k}$의 넓이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{13}{12\pi}$ ③ $\frac{7}{6\pi}$ ④ $\frac{5}{4\pi}$ ⑤ $\frac{4}{3\pi}$

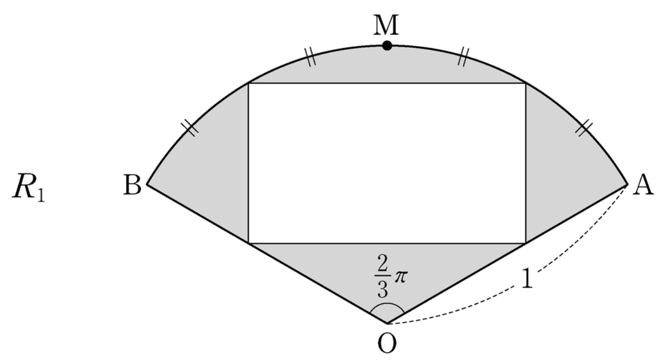
14. $n=3$일 때, 점 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 중에서 임의로 선택한 한 개의 점을 P라 하자. 부채꼴 OPA의 넓이와 부채꼴 OPB의 넓이의 차를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [4점]

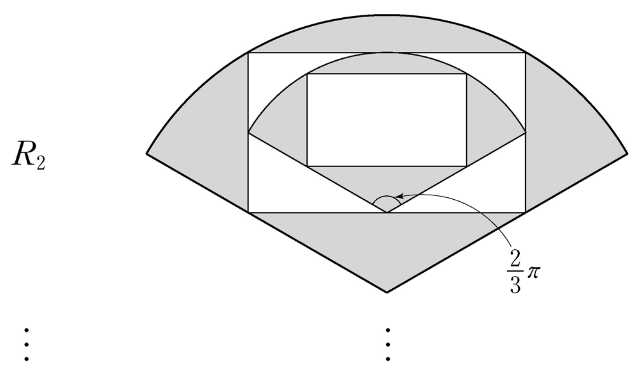
① $\frac{\pi}{11}$ ② $\frac{\pi}{10}$ ③ $\frac{\pi}{9}$ ④ $\frac{\pi}{8}$ ⑤ $\frac{\pi}{7}$

15. 좌표공간에 두 점 $(a, 0, 0)$과 $(0, 6, 0)$을 지나는 직선 l이 있다. 점 $(0, 0, 4)$와 직선 l 사이의 거리가 5일 때, a^2의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

16. 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴 OAB가 있다. 그림과 같이 호 AB를 이등분하는 점을 M이라 하고 호 AM과 호 MB를 각각 이등분하는 점을 두 꼭짓점으로 하는 직사각형을 부채꼴 OAB에 내접하도록 그리고, 부채꼴의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 새로 그려진 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



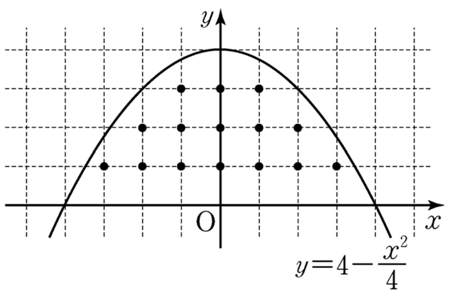


① $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\pi-\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{2\pi-3\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{3}$

17. 다음 조건을 만족시키는 좌표평면 위의 점 (a, b) 중에서 임의로 서로 다른 두 점을 선택한다. 선택된 두 점의 y좌표가 같을 때, 이 두 점의 y좌표가 2일 확률은? [4점]

> (가) a, b는 정수이다.
>
> (나) $0 < b < 4-\dfrac{a^2}{4}$

① $\dfrac{4}{17}$ ② $\dfrac{5}{17}$ ③ $\dfrac{6}{17}$ ④ $\dfrac{7}{17}$ ⑤ $\dfrac{8}{17}$



18. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$AB+A+B=2E, \quad A^3+E=O$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [4점]

> <보 기>
>
> ㄱ. $A+E$의 역행렬이 존재한다.
>
> ㄴ. $AB=BA$
>
> ㄷ. $A+B=-E$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 어느 학교 3학년 학생의 A 과목 시험 점수는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고, B 과목 시험 점수는 평균이 $m+3$, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학교 3학년 학생 중에서 A 과목 시험 점수가 80점 이상인 학생의 비율이 9%이고, B 과목 시험 점수가 80점 이상인 학생의 비율이 15%일 때, $m+\sigma$의 값은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.04) = 0.35$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.34) = 0.41$로 계산한다.) [4점]

① 68.6 ② 70.6 ③ 72.6 ④ 74.6 ⑤ 76.6

20. 3 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x) = x^n e^{-x}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f\left(\frac{n}{2}\right) = f'\left(\frac{n}{2}\right)$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 점 $(0, 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 양수 t에 대하여 $\log t$의 지표와 가수를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여

$$f(t)=9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 $f(t)$의 합을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? [4점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

단답형

22. 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_2+a_4=55$일 때, a_3의 값을 구하시오. [3점]

23. 로그방정식 $\log_8 x-\log_8(x-7)=\frac{1}{3}$의 해를 구하시오. [3점]

24. 좌표공간에서 직선 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{a}=\frac{z+5}{4}$ 에 수직이고 점 $(1,\,1,\,-2)$를 지나는 평면의 방정식을 $2x+5y+bz+c=0$ 이라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, $a,\,b,\,c$는 상수이다.) [3점]

25. 1보다 큰 실수 a에 대하여 타원 $x^2+\frac{y^2}{a^2}=1$의 두 초점과 쌍곡선 $x^2-y^2=1$의 두 초점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 12일 때, a^2의 값을 구하시오. [3점]

26. 자연수 n에 대하여 $abc=2^n$을 만족시키는 1보다 큰 자연수 $a,\,b,\,c$의 순서쌍 $(a,\,b,\,c)$의 개수가 28일 때, n의 값을 구하시오. [4점]

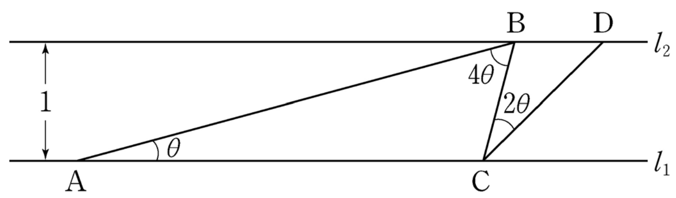
27. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-4, 0)$, $(0, 0)$을 지날 때, 무리방정식

$$f(\sqrt{x+1}-x)=f(1)$$

의 모든 실근의 합을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 서로 평행한 두 직선 l_1과 l_2 사이의 거리가 1이다. 직선 l_1 위의 점 A에 대하여 직선 l_2 위에 점 B를 선분 AB와 직선 l_1이 이루는 각의 크기가 θ가 되도록 잡고, 직선 l_1 위에 점 C를 $\angle \mathrm{ABC}=4\theta$가 되도록 잡는다. 직선 l_2 위에 점 D를 $\angle \mathrm{BCD}=2\theta$이고 선분 CD가 선분 AB와 만나지 않도록 잡는다.

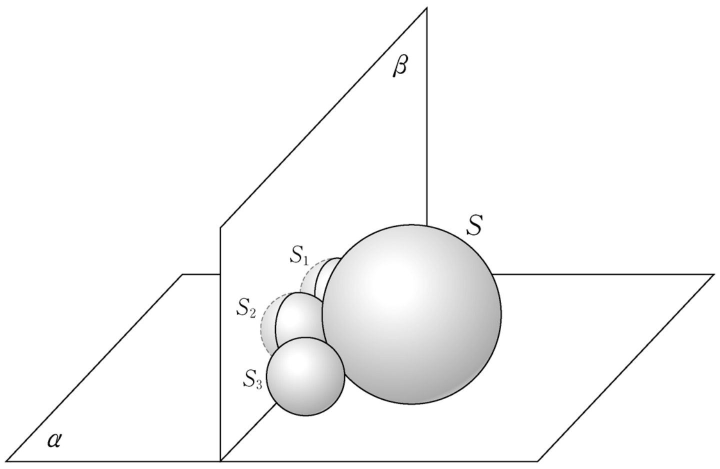
삼각형 ABC의 넓이를 T_1, 삼각형 BCD의 넓이를 T_2라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \frac{T_1}{T_2}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{10}$) [4점]



29. 그림과 같이 평면 α 위에 놓여 있는 서로 다른 네 구 S, S_1, S_2, S_3이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) S의 반지름의 길이는 3이고, S_1, S_2, S_3의 반지름의 길이는 1이다.
> (나) S_1, S_2, S_3은 모두 S에 접한다.
> (다) S_1은 S_2와 접하고, S_2는 S_3과 접한다.

S_1, S_2, S_3의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3이라 하자. 두 점 O_1, O_2를 지나고 평면 α에 수직인 평면을 β, 두 점 O_2, O_3을 지나고 평면 α에 수직인 평면이 S_3과 만나서 생기는 단면을 D라 하자. 단면 D의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 $\frac{q}{p}\pi$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.
> (나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점
> $(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$
> 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\frac{t+1}{t}$이다.
> (다) $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=2$

$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.